עוד על הפונקציה המעריכית

מאת: אורי לירון הפקולטה למתמטיקה, הטכניון
וביה"ס לחינוך, אוניברסיטת חיפה*.

הערת המערכת

הוראת הפונקציה המעריכית באמצעות "מערכת E", נוסתה החל מ- 1965 במסגרת תוכנית ניסוי בהנחיתו של פרופ' עמיצור. חומר לתלמידים ניתן למצוא בספרים הבאים:

1) עמוס ארליך ; מתמטיקה לכיתה י', אלגברה (פרק י"ט) ; משרד החינוך והתרבות ; תשכ"ה.

2) המרכז הישראלי להוראת המדעים ; אלגברה (פרק י"ב).

למאמר מצורפות הערות של פרופ' עמיצור (ראה נספח 2).

1. מבוא

הוראת הפונקציה המעריכית לפי תכנית הלימודים החדשה(1) נעשית באמצעות מערכת אכסיומטית ("מערכת E"), אשר בה מתקבלות כל תכונות הפונקציה מתוך כמה הנחות יסוד, שהעיקרית בהן היא המשוואה הפונקציונאלית: $f(x+y) = f(x)f(y)$. הצגה מפורטת של נושא זה הופיעה ב"שבבים" במאמר של ש. עמיצור(2).

במאמר זה ברצוני להביא מספר הצעות מתמטיות ודידקטיות. השינוי העיקרי המוצע, מתבטא בהכנסת הנגזרת כבר בשלבים מוקדמים של הפיתוח ושימוש בה בחקירת התכונות היסודיות של הפונקציה.

ראוי לציין כי לפי התכנית החדשה, הוראת הנגזרת ותכונותיה קודמת בכל הרמות (פרט לרמת 2 נקודות) להוראת הפונקציה המעריכית, כך שמכשיר זה עומד כבר לרשות התלמידים. כמו כן, הכרת הנגזרת של הפונקציה המעריכית נדרשת אף היא בכל הרמות ולכן אין בהצעתי הוספת חומר חדש, אלא רק שינוי סדר הנושאים.

---

* ברצוני להביע תודתי לפרופ' ש. עמיצור ולגב' ב. זהבי שהערותיהם תרמו לשיפור הצגת הנושא.

(1) תכניות הלימודים במתמטיקה, משרד החינוך והתרבות, תשל"ו.
(2) ש. עמיצור: הפונקציה המעריכית, תיק "שבבים" מס. 11.

להלן אסקור מה נראה לי כי יושג בעקבות השינויים המוצעים.

א. השימוש בנגזרת מאפשר להוכיח את תכונת המונוטוניות של הפונקציה במקום להניחה כאכסיומה נוספת.

ב. הוכחת המונוטוניות ולאחריה הוכחת הקמירות, הן פשוטות ואלגנטיות ומדגימות בבירור את כוחה של הנגזרת כמכשיר לחקירת פונקציות. בעזרת שתי תכונות אלו נוכל לשרטט את הגרף בקווים כלליים כבר בהתחלה.

ג. הוכחת יחידות הפונקציה ללא שימוש בנגזרת היא מסובכת למדי ובעלת אופי חישובי. ההוכחה המובאת כאן היא, לעומת זאת, "מושגית" יותר ולכן קלה להוראה ולהבנה. אחד היתרונות של הוכחה כזו הוא, שניתן לצפות כי תלמידים רבים יוכלו לבצעה בכוחות עצמם, לאחר שהמורה יביא במשפט אחד את הרעיון המרכזי.

ד. פונקציות רבות המופיעות במתמטיקה ובשמושיה אינן נתונות במפורש, אלא על-ידי תכונות של הפונקציה ונגזרותיה, דהיינו, על-ידי משוואה דיפרנציאלית. (דוגמא לכך מהווה החוק השני של ניוטון: הפונקציה המתארת מקומו של גוף אינה נתונה במפורש אלא נתונה משוואה עבור נגזרתה השנייה, הלא היא התאוצה.)
הפיתוח המוצע מדגים מצב אופייני זה.

ה. התכונה המרכזית שבה אנו משתמשים היא שהנגזרת פרופורציונית לפונקציה עצמה. תכונה זו קלה להוכחה מתוך המשוואה הפונקציונאלית הנתונה ולהלן אביא לה שתי הוכחות. אולם לתכונה זו יש גם פירוש ברור בסיטואציות המציאותיות שמתוכן בנינו את המודל המתמטי. אם נקח, למשל, את התופעה של גידול אוכלוסיה, פירוש תכונה זו הוא שקצב גידול האוכלוסיה בכל עת הוא פרופרציוני למספר האוכלוסין באותה עת.

ו. בעיה אחת המתעוררת עקב השימוש בנגזרת היא הצורך להניח את קיום הנגזרת, כלומר את גזירות הפונקציה. מבחינה מתמטית, הנחת הגזירות שקולה להנחת המונוטוניות עבור פונקציה המקיימת את המשוואה הפונקציונאלית; כלומר, אם נניח אחת מהן נוכל להוכיח את השנייה. עם זאת יש יתרון להנחת הגזירות שכן אז אנו באמת מוכיחים את המונוטוניות, והטיפול כולו נעשה פשוט יותר. לעומת זאת, אם נבחר במונוטוניות כבאכסיומה (כבמאמר עמיצור) לא נוכיח את הגזירות, אלא ממילא נניח אותה כהנחה נוספת בשלב מאוחר יותר (ר' תכנית הלימודים החדשה, עמ' 53 הערה 48). מבחינה דידקטית, נראה לי, כי כדאי לתת

לאכסיומת הגזירות מעמד של "הנחה סמוייה" ולא לציינה במפורש ברשימת האכסיומות ההתחלתית: התלמידים יקבלו בטבעיות את חישוב הנגזרת במשפט 5 (להלן) ולא ירגישו כי השתמשנו בהנחה נוספת. למען ההגינות המתמטית, נשלב בזמן המתאים הערה בדבר ההנחה הנוספת. אפשרות אחרת היא לשלב הנחה זו בדיון על קיום הפונקציה, שיובא בסוף הפיתוח: במקום לדון בקיום פונקציה שמקיימת את כל דרישותינו, נדון בקיום פונקציה גזירה כזו. כדאי לציין כי כמעט בכל הדרכים המקובלות להוכחת קיום הפונקציה (טורי חזקות, משוואה דיפרנציאלית, הפונקציה ההפוכה ללוגריתם), מקבלים ביחד עם הקיום גם את הגזירות, כך שגם מבחינה מתמטית אין גישה זו מהווה קושי.

2. פונקציות - E

בסעיף זה נתאר דרך להגדיר בצורה אכסיומטית ומדוייקת את הפונקציה המעריכית לכל x ממשי. אנו יוצאים מההנחה שהתלמידים מכירים את הפונקציה המעריכית a^x (a חיובי) רק עבור ערכים רציונאליים של x. בהרחיבנו את מושג החזקה גם למעריך אי רציונאלי, נשאף לשתי מטרות: ראשית, ההגדרה המורחבת של a^x תהיה כזו שעבור x רציונאלי תתלכד עם ההגדרה הקיימת; שנית, תכונות החזקה הידועות, ימשיכו להתקיים גם כאשר המעריך x הוא מספר ממשי כלשהו.

הגדרה: פונקציה f המוגדרת לכל x ממשי ואינה זהותית אפס תיקרא __פונקצית - E__, אם היא מקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$ לכל x ו y ממשיים.

הערה: הגדרה זו נראית לי כמתאימה לצרכי הכיתה. כפי שציינתי במבוא, ההגדרה המתמטית המלאה כוללת תנאי נוסף, דהיינו גזירות הפונקציה f.

פונקציות - E מתארות (אידיאליזציה של) מצבים מציאותיים רבים ומכאן שמושיותן. דיון בקשר בין הפונקציה ובין המצבים המציאותיים המתוארים על ידה, נמצא במאמרו של עמיצור.

להלן נניח כי נתונה לנו פונקציית - E כלשהי, f, ננסה לחקור את תכונותיה ולקבל תיאור מפורש ככל האפשר של הפונקציה. כמובן שבחקירותינו נסתמך רק על התכונות המופיעות בהגדרת פונקציית - E.

השינויים העיקריים ממאמרו של עמיצור מתבטאים במשפטים 5-8. שאר המשפטים מופיעים כאן בשינויים קלים בלבד, אך אני כוללם לנוחיות הקוראים.

משפט 1: לכל x ממשי, $f(x) \neq 0$.

הוכחה: אילו היה קיים מספר a שעבורו $f(a) = 0$, היינו מקבלים כי לכל x, $f(x) = f(a + (x-a)) = f(a)\cdot f(x-a) = 0\cdot f(x-a) = 0$ כלומר, הפונקציה היא זהותית אפס בסתירה לנתון.

משפט 2: $f(0) = 1$

הוכחה: $f(0) = f(0+0) = f(0)f(0)$. לפי משפט 1 נוכל לחלק את שני האגפים במספר $f(0) \neq 0$ ולקבל $f(0) = 1$.

משפט 3: לכל x ממשי $f(x) > 0$.

הוכחה: נשתמש במשפט 1 ובעובדה שהריבוע של מספר ממשי השונה מאפס הוא תמיד חיובי.

$$f(x) = f(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}) = f(\tfrac{x}{2})f(\tfrac{x}{2}) = f(\tfrac{x}{2})^2 > 0$$

מסקנה: הפונקציה מעתיקה את המספרים הממשיים לתוך המספרים החיוביים. כלומר, תחום הפונקציה הוא קבוצת המספרים הממשיים והטווח שלה - קבוצת המספרים החיוביים.

משפט 4: לכל x ו y ממשיים $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$, $f(-y) = \dfrac{1}{f(y)}$.

הוכחה: נחזור על ה"טריק" ממשפט 1:

$f(x) = f(y + (x-y)) = f(y)f(x-y)$.

ולאחר חילוק ב $f(y)$ (השונה מאפס לפי משפט 1) נקבל

$f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$, כדרוש.

השוויון השני נובע מהראשון בהצבת $x = 0$.

נעבור כעת לדון בנגזרת של f. במבוא הזכרנו כי התופעות המציאותיות המתוארות על-ידי פונקצית - E מצטיינות בכך שקצב גידולן (או קצב ירידתן) בכל עת פרופורציוני לכמותן באותה עת. כך הדבר בגידול אוכלוסיה, השקעה בבנק, התפרקות רדיואקטיבית וכו'. נוכל לצפות איפוא כי הנגזרת תקיים $f' = kf$ עבור קבוע מתאים k. ואמנם:

<u>משפט 5</u>: לכל x ממשי $f'(x) = kf(x)$, כאשר $k = f'(0)$.

נביא למשפט זה שתי הוכחות. הראשונה משתמשת בחוקי הגזירה ואילו השניה יוצאת ישירות מהגדרת הנגזרת.

<u>הוכחה ראשונה</u>:

כדי לחשב את הנגזרת בנקודה כלשהי a, נתבונן בשוויון

$f(a+x) = f(a)f(x)$ לכל x ממשי.

היות והפונקציות בשני אגפי השוויון שוות, שוות גם נגזרותיהן (לפי x): $f'(a+x) = f(a)f'(x)$ לכל x ממשי.

בפרט, אם נציב כאן $x = 0$ נקבל:

$$f'(a) = f'(0)f(a)$$

חישבנו את הנגזרת בנקודה מסוימת a, אך החישוב מתאים לכל a ממשי ולכן ניתן לסכם ולכתוב:

$$f'(x) = f'(0)f(x)$$

<u>הוכחה שנייה</u>:

כדי לחשב את הנגזרת בנקודה x, מחשבים את הגבול של המנה $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ כאשר h שואף ל 0. נחשב מנה זו בהסתמכנו על המשוואה הפונקציונאלית ומשפט 2:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - 1}{h} f(x) = \frac{f(h) - f(0)}{h} f(x)$$

כאשר נשאיף את h ל 0 ישאף הגורם הראשון לנגזרת של f ב 0. הגורם השני אינו תלוי ב h. לכן נקבל בגבול $f'(x) = f'(0)f(x)$, כדרוש.

<u>הערה</u>: מההוכחה השנייה רואים שאין צורך לדרוש גזירות f בכל x ; מספיק לדרוש גזירות ב 0 ואז <u>נובעת</u> הגזירות בכל x.

ועתה בעזרת הנגזרת ותכונותיה, נקבל משני המשפטים הבאים אינפורמציה מדוייקת למדי בדבר התנהגות הפונקציה f וצורת הגרף שלה.

משפט 6: נסמן $f'(0) = k$

(א) אם $k > 0$ אז f פונקציה עולה בכל מקום.

(ב) אם $k < 0$ אז f פונקציה יורדת בכל מקום.

(ג) אם $k = 0$ אז f שווה זהותית ל 1 (פונקציה קבועה)[3].

הוכחה: לפי משפט 3, $f(x) > 0$ לכל x ולפי משפט 5 $f'(x) = kf(x)$.
לכן:

(א) אם $k > 0$ אז $f'(x) > 0$ לכל x ולכן הפונקציה עולה.

(ב) אם $k < 0$ אז $f'(x) < 0$ לכל x ולכן הפונקציה יורדת.

(ג) אם $k = 0$ אז $f'(x) = 0$ לכל x ולכן הפונקציה קבועה.
אולם $f(0) = 1$ ולכן הפונקציה שווה זהותית ל 1.

הערה: היות והפונקציה השווה זהותית ל 1 מוכרת לנו היטב ואין צורך לחקרה, נניח מעתה כי הפונקציה הנתונה f אינה שווה זהותית ל 1, כלומר $k = f'(0) \neq 0$

משפט 7: הפונקציה f היא קמורה בכל מקום.

הוכחה: נחשב את הנגזרת השנייה של f:

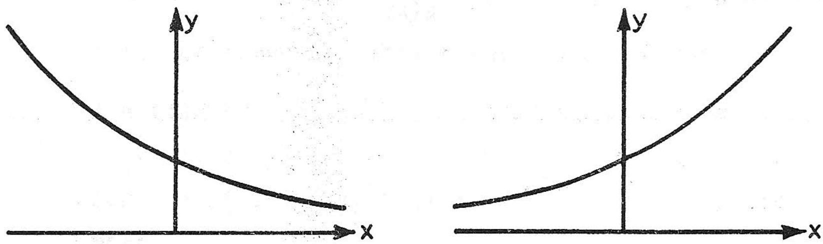
$$f'' = (f')' = (kf)' = kf' = k(kf) = k^2 f.$$

היות ו $f(x) > 0$ לכל x וגם $k^2 > 0$ (לפי הנחתנו $k \neq 0$)
נקבל $f''(x) > 0$ לכל x ולכן f קמורה.

---

(3) במאמרו של עמיצור, הדרישה (E3) מוציאה מכלל פונקציות ה- E את הפונקציה השווה זהותית ל 1 $(f(x) = 1^x)$, אך כדאי לכלול פונקציה זו במשפחה.
ר' גם השימוש בפונקציה זו בהוכחת משפט 8.

האינפורמציה שאספנו עד כה על f מאפשרת לנו תיאור גרפי מדוייק למדי של f.



המקרה $k < 0$ המקרה $k > 0$

(הציור מתאר את המקרה ששני ה-k-ים, החיובי והשלילי, הם בעלי אותו ערך מוחלט. אם נחשוב על ציר ה- y כעל ראי, נראה הדבר כי הגרפים בשני המקרים מופיעים כתמונת-ראי האחד של השני. התוכל להסביר מדוע?)

נעבור כעת לשאלת <u>היחידות</u> של הפונקציה f. באיזו מידה הדרישות שכפינו על f קובעות אותה חד ערכית? מתברר שאם נקבע עוד את ערכה עבור $x = 1$ (או ערך אחר שונה מ 0 כלשהו), נקבל שיש רק פונקציה אחת המקיימת את דרישותינו.

<u>משפט 8</u>: אם f ו g הן שתי פונקציות - E המקיימות $f(1) = g(1)$, אז הן שוות.

נדגיש את תוכן המשפט: שתי פונקציות - E המתלכדות בנקודה אחת (נוסף על התלכדותן ב 0 לפי משפט 2) חייבות להתלכד <u>בכל</u> נקודה! (תופעה דומה ניתן למצוא במשפחת כל הישרים העוברים דרך הראשית: כל שני ישרים במשפחה זו שיש להם נקודה נוספת משותפת - מתלכדים.)

הוכחה: עלינו להוכיח כי $f(x) = g(x)$ לכל x. במקום זה נוכיח את הטענה השקולה ש $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ לכל x. לשם כך נגדיר פונקציה חדשה h על-ידי הכלל $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ונוכיח כי h שווה זהותית ל 1. קל לבדוק כי h היא פונקצית - E ומקיימת: $h(0) = h(1) = 1$. מכאן, h אינה פונקציה עולה ואינה פונקציה יורדת ולכן, לפי משפט 6, $h(x) = 1$ לכל x.
בכך הראינו כי $f(x) = g(x)$ לכל x, כלומר הפונקציות f ו g שוות.

נראה כעת כי אם ידוע ערכה של f עבור $x = 1$, ניתן לחשב את ערכה עבור כל x רציונאלי. יתר על כן, בערכים רציונאליים של x, f מתלכדת עם הפונקציה המעריכית a^x המוגדרת כבר קודם.

משפט 9: נסמן $f(1) = a$ (a מספר חיובי). אזי לכל מספר רציונאלי r, $f(r) = a^r$. ביתר פירוט, לכל מספר שלם m ולכל מספר שלם חיובי n קיים

$$f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m .$$

שים לב כי נוסחה זו כוללת כמקרים פרטיים את הנוסחאות:

$$f(m) = a^m \ , \quad f(-m) = \frac{1}{a^m} \ , \quad f(0) = 1 \ , \quad f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a} .$$

הוכחה: ראשית, נשים לב כי מהמשוואה הפונקציונאלית הנתונה נובע כי לכל t ממשי ולכל k שלם חיובי

$$f(kt) = f(t + t + \dots + t) = f(t)f(t) \dots f(t) = f(t)^k$$

(פורמלית, יש להוכיח טענה זו באינדוקציה על k.) יתר על כן, גם אם k שלילי, כלומר $k = -\ell$ כאשר ℓ חיובי, עדיין קיימת אותה נוסחה, שכן ע"ס מה שהוכחנו כרגע וע"ס משפט 4:

$$f(kt) = f(-\ell t) = \frac{1}{f(\ell t)} = \frac{1}{f(t)^\ell} = f(t)^{-\ell} = f(t)^k$$

היות ונוסחה זו מתקיימת גם עבור $k = 0$, נוכל לסכם ולומר כי לכל t ממשי ולכל k שלם מתקיים $f(kt) = f(y)^k$.

בעזרת שוויון זה קל להוכיח את טענת המשפט. כדי להוכיח $f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{a^m}$ נוכיח את הטענה השקולה $f(\frac{m}{n})^n = a^m$. ואמנם:

$$f(\frac{m}{n})^n = f(n\cdot\frac{m}{n}) = f(m) = f(m\cdot 1) = f(1)^m = a^m$$

<u>הערה</u>: כמקרה פרטי של השוויון האחרון (עבור $m = 1$) נקבל $f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$

ולכן $f(\frac{m}{n}) = f(m\cdot\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$

קיבלנו איפוא הוכחה חדשה (ואלגנטית) לנוסחה הידועה

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

עד עתה הנחנו כי <u>נתונה</u> לנו פונקצית - E, f, וחקרנו את תכונותיה. עדיין נותרה פתוחה השאלה, האם בכלל <u>קיימת</u> פונקציה כזו? התשובה על שאלה זו נתונה במשפט הבא. הוכחת המשפט לא תובא כאן, שכן היא דורשת מכשירים מתמטיים מתקדמים יותר מאלו העומדים לרשותנו.

<u>משפט 10 והגדרה</u>: לכל a ממשי חיובי קיימת פונקצית - E (גזירה) אחת ויחידה f המקיימת $f(1) = a$. פונקציה זו תיקרא <u>הפונקציה המעריכית</u> על בסיס a ותסומן $f(x) = a^x$.

<u>הערות</u>: (א) את יחידות הפונקציה המעריכית על בסיס a הוכחנו במשפט 8.

(ב) משפט 9 מבטיח לנו שהפונקציה החדשה a^x מתלכדת עם הפונקציה המוכרת עבור x רציונאלי.

(ג) המשוואה הפונקציונאלית $f(x+y) = f(x)f(y)$, מופיעה בסימון החדש כתכונה המוכרת $a^{x+y} = a^x a^y$, אלא שעתה נכונה נוסחה זו לכל x ו y ממשיים.

(ד) שתי תכונות מוכרות נוספות של הפונקציה המעריכית (עבור מעריכים רציונאליים) הן $(a^x)^y = a^{xy}$ ו $(ab)^x = a^x b^x$.

המשפט הבא מראה כי תכונות אלו משתמרות גם בהרחבה למספרים ממשיים כלשהם.

משפט 11: יהיו a ו b ממשיים חיוביים, x ו y ממשיים כלשהם. אזי

(א) $(a^x)^y = a^{xy}$ (ב) $(ab)^x = a^x b^x$

(לביטויים אלו יש משמעות, שכן אם a ו b חיוביים אז גם ab חיובי ולכל x ממשי, a^x חיובי).

הוכחה: רעיון ההוכחה הוא פשוט.

(א) קל לבדוק כי עבור x קבוע הפונקציה a^{xy} (כפונקציה של y), היא פונקצית - E אשר ערכה בנקודה $y = 1$ הוא a^x. לכן a^{xy} היא הפונקציה המעריכית על בסיס a^x, כלומר $a^{xy} = (a^x)^y$.

(ב) קל לבדוק כי $a^x b^x$ היא פונקצית - E אשר ערכה בנקודה 1 הוא ab. לכן $a^x b^x$ היא הפונקציה המעריכית על בסיס ab, כלומר $a^x b^x = (ab)^x$.

הערה: הניסוח דלעיל מבליט את רעיון ההוכחה ולכן, בהכרח, מערפל במידת מה את הפרטים. (למשל, מה פירושו המדוייק של הביטוי "עבור x קבוע נסתכל על a^{xy} כפונקציה של y"?). נביא, לשם השוואה ניסוח פורמלי יותר של אותה הוכחה, שבו הפרטים מדוייקים וברורים, אך רעיון ההוכחה פחות ברור.

(א) יהי c מספר ממשי שרירותי ונוכיח כי $(a^c)^y = a^{cy}$ לכל y ממשי. לשם כך נסמן $d = a^c$, $f(y) = a^{cy}$, ואז קל לבדוק כי $f(y)$ היא פונקצית - E המקיימת $f(1) = d$. לכן $f(y)$ היא הפונקציה המעריכית על בסיס d, כלומר $f(y) = d^y$. בהציבנו כאן חזרה $f(y) = a^{cy}$, $d = a^c$ נקבל את השוויון הדרוש $a^{cy} = (a^c)^y$.

(ב) נסמן $g(x) = a^x b^x$, $p = ab$. אזי קל לבדוק כי $g(x)$ היא פונקצית - E המקיימת $g(1) = p$. לכן $g(x)$ היא הפונקציה המעריכית על בסיס p, כלומר $g(x) = p^x$. בהציבנו חזרה $g(x) = a^x b^x$ ו $p = ab$ נקבל את השוויון הדרוש $a^x b^x = (ab)^x$.

3. נספח 1: <u>ניתוח האכסיומות</u>

א. בנספח זה אביא ניתוח קצר של מערכת האכסיומות עבור הפונקציה המעריכית. חומר זה אינו מיועד להוראה בכיתה, אך נראה לי כי הוא בעל חשיבות ועניין למורים המלמדים את הנושא. שתי מטרות לפנינו: האחת - ניתוח מתמטי של האכסיומות והקשרים ביניהן ; השנייה - הדגשת האספקט ה"אנושי" בבחירת מערכת האכסיומות. יש לזכור כי בעוד אשר הוכחת תכונות הפונקציה מתוך האכסיומות היא מתמטית ומדוייקת, הרי עצם בחירת האכסיומות היא פעולה אנושית-ארגונית ובמידה רבה - שרירותית. פרט לכמה עקרונות יסוד אשר על מערכת אכסיומות לקיים, שיקולי הבחירה הם שיקולים אסתטיים, חסכוניים, ובמקרה שלנו - דידקטיים. (גישה זו לאכסיומטיקה, המקובלת כיום על רוב המתמטיקאים, שונה מזו של הגיאומטרים היוונים הקדומים שראו באכסיומות "אמיתות מובנות מאליהן".) גם מערכת האכסיומות שבחרנו כאן עבור הפונקציה המעריכית (בעיקר משקולים דידקטיים), אינה יוצאת מכלל זה: במשאל מקרי בדבר הגדרת הפונקציה המעריכית שנערך בין מתמטיקאים, נתקבלו תשובות שונות ומשונות, אשר לא רבות מהן כללו את המשוואה הפונקציונאלית שלנו.

ב. לצורך הניתוח נקרא לפונקציה <u>פונקצית - E_1</u>, אם היא מוגדרת לכל מספר ממשי ומקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$ לכל x ו y ממשיים. פונקצית - E_1 גזירה (בכל מקום) תיקרא <u>פונקצית - E_2</u>. פונקצית - E_1 מונוטונית (בכל מקום) תיקרא <u>פונקצית - E_3</u>. (כמו כן נסכים כי גם הפונקציה השווה זהותית ל 1 תיקרא פונקצית - E_3.) נשים לב כי פונקצית - E_2 אינה אלא פונקצית - E לפי הגדרות מאמר זה, בעוד שפונקצית - E_3 היא פונקצית - E לפי מאמרו של עמיצור (אך ראה הערת- שוליים (3)).

ג. מהם הקשרים בין הסוגים השונים של הפונקציות שהגדרנו? על כל אחת מההגדרות ניתן להסתכל כעל נסיון להכנסת מערכת אכסיומות עבור הפונקציה המעריכית (הפונקציה המעריכית a^x מקיימת את כל שלוש ההגדרות!) שאלתנו היא, איפוא, מהם הקשרים בין מערכות האכסיומות המוצעות? התשובה תינתן בשני המשפטים הבאים:

<u>משפט 12</u>: פונקציה f היא פונקצית - E_2 אם ורק אם היא פונקצית - E_3.

הוכחה: כיוון אחד של המשפט הוא תוכנו של משפט 6: ראינו כי עבור פונקצית - E_1, גזירות גוררת מונוטוניות (או שוויון זהותית ל 1) ; כלומר, כל פונקצית - E_2 היא בהכרח פונקצית - E_3.
הכיוון השני (מונוטוניות גוררת גזירות) הוא קשה יותר להוכחה ישירה, והקוראים המעוניינים מופנים לספריו של Aczél[4].
נוכל עם זאת לתת לחלק זה של המשפט הוכחה עקיפה כדלקמן.
במאמרו של עמיצור מוכח משפט היחידות הבא (משפט ה', שם) : אם f ו g הן פונקציות - E_3 המקיימות $f(1) = g(1)$ אזי לכל x $f(x) = g(x)$. תהי נתונה כעת פונקצית - E_3 כלשהי f ונסמן $f(1) = a$. תהי g פונקצית - E_2 כלשהי המקיימת $g(1) = a$ (פונקציה כזו קיימת לפי משפט 10). היות ולפי מה שכבר הוכחנו, g היא גם פונקצית - E_3, נובע ממשפט היחידות הנ"ל כי הפונקציות f ו g שוות. מכאן f פונקצית - E_2. (מעבר לפורמליזם מסתתרת העובדה הפשוטה ש: $f(x) = g(x) = a^x$.)

המסקנה ממשפט 12 היא שמערכות האכסיומות לפונקציה המעריכית במאמרי ובמאמר עמיצור הן שקולות, ומבחינה מתמטית אין כל הבדל באיזו מהן נבחר. ההחלטה לגבי בחירה זו היא, איפוא, דידקטית: איזו מהמערכות קלה יותר לניסוח ולהבנה? איזו טבעית יותר? איזו מאפשרת פיתוח אלגנטי יותר של המשפטים הרצויים?

היות וראינו כי פונקציות - E_2 ופונקציות - E_3 הן היינו הך, נקרא להן מעתה בשם המשותף <u>פונקציות - E</u>.

<u>משפט 13</u>: קיימות (אינסוף) פונקציות - E_1 שאינן פונקציות - E.

<u>הערה</u>: נוכל לבחור פונקציות אלו כך שיקיימו $f(1) = a$ עבור כל a חיובי נתון מראש.

הוכחת המשפט אינה קשה, אך מכילה פרטים רבים ומושגים לא מוכרים החורגים ממסגרת המאמר. אביא כאן רק סקיצה של ההוכחה, כדי שהקורא יוכל להתרשם מהשיטה.

---

(4) Aczél J., Lectures on Functional Equations and their Applications, Academic Press, 1966.

Aczél J., On Application and theory of Functional Equations, Academic Press, 1969.

כדי להגדיר את הפונקציה f הדרושה לנו, אנו זקוקים להצגה מתאימה של המספרים הממשיים. הצגה כזאת מתקבלת באמצעות המושג של "בסיס הָמֶל" שנתגלה על ידי המתמטיקאי הגרמני גיאורג המל ב 1905. בסיס המל הוא קבוצת B של מספרים ממשיים בעלת התכונה שכל מספר ממשי x ניתן להצגה אחת ויחידה בצורה $x = r_1 b_1 + \dots + r_n b_n$ כאשר r_i רציונאליים ו b_i איברים מתוך B. (מספר המחוברים n והאיברים b_i מתוך B יכולים להשתנות בהצגת מספרים ממשיים שונים; יחידות ההצגה דורשת הבהרה נוספת). עתה, אין זה קשה להראות כי אם נתאים באופן שרירותי לחלוטין "תמונה" ממשית חיובית f(b) לכל מספר b ב B ונקפיד, בנוסף, לבחור $f(1) = a$ (אפשר לבחור B כך שיכיל את 1), אזי ניתן להרחיב בחירה זו להגדרת פונקציה f עבור כל x ממשי כדלקמן:

$$f(x) = f(r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n) = f(b_1)^{r_1} f(b_2)^{r_2} \dots f(b_n)^{r_n}$$

פונקציה זו מקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$ וברור שאפשר לבחרה כך שלא תהיה גזירה או מונוטונית. זוהי אם כן פונקצית - E_1 שאינה פונקצית - E.

המסקנה ממשפט 13 היא שבין אם נניח גזירות ובין אם מונוטוניות (או כל דרישה מתאימה אחרת: ר' להלן), בכל אופן אנו <u>חייבים</u> להניח הנחה נוספת על המשוואה הפונקציונאלית. האכסיומה הנוספת אינה, איפוא, ענין של קיצור או נוחות בלבד, אלא הכרח מתמטי.

<u>הערות</u>: (1) אל אף האמור במשפט 13, מענין לציין כי כל פונקצית - E_1 חייבת לקיים $f(x) = a^x$ (כאשר $a = f(1)$) לכל x <u>רציונאלי</u>. ואמנם, קל לבדוק כי הוכחת משפט 9 משתמשת רק במשוואה הפונקציונאלית ולא בהנחות נוספות כלשהן.

(2) משפט 13 מסייע להבהיר נקודה מסויימת במאמרה של נורית זהבי על המשוואה הפונקציונאלית $f(x+y) = f(x) + f(y)$ [5]. עיקרו של מאמר זה הוא בהוכחה שפונקציה המקיימת משוואה זו חייבת להיות פונקציה קווית $f(x) = ax$ (כאשר $a = f(1)$). הכותבת מעירה כי "לא הצלחנו להראות כי לכל x ממשי מתקיים $f(x) = ax$ בלי הוספת דרישה נוספת". על סמך משפט 13 (או, ביתר דיוק, המשפט האנלוגי

---

(5) נורית זהבי, משוואות פונקציונאליות ופונקציות קוויות, תיק "שבבים" מס. 12.

לגבי המשוואה הפונקציונאלית הנדונה) אנו רואים כי אפשר להחליף את הביטוי "לא הצלחנו", עם כל המשתמע ממנו, בביטוי "אין אפשרות".

(3) ראינו כי מבחינה מתמטית אין זה משנה אם דורשים גזירות או מונוטוניות במערכת האכסיומות עבור הפונקציה המעריכית. דרישה נוספת השקולה לשתיים אלו היא דרישת הרציפות (בכל מקום). כמו כן, ניתן להחליף את דרישת הגזירות או הרציפות בדרישה החלשה יותר לכאורה, של גזירות או רציפות בנקודה אחת בלבד. דרישות שקולות אחרות הן דרישות חסימות מסויימות לגבי ערכי הפונקציה. פרטים על כך, בספרי Aczél (ר' הערת- שוליים (4)).
כאן נראה, לדוגמא, כי פונקצית - E_1 הרציפה ב 0, רציפה בכל נקודה.
לפי ההנחה, $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = f(0) = 1$.

נחשב עתה עבור מספר c כלשהו:

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0} [f(h)f(c)] = [\lim_{h\to 0} f(h)]f(c) = 1\cdot f(c) = f(c)$$

ולכן הפונקציה f רציפה בנקודה c.
הוכחה דומה קיימת לגבי גזירות ; ר' ההוכחה השנייה של משפט 5.

(4) גישה אחרת למערכת האכסיומות היא לשים במרכזה את המשוואה הדיפרנציאלית $f'(x) = kf(x)$, במקום המשוואה הפונקציונאלית $f(x+y) = f(x)+f(y)$. נברר עתה במדוייק מהו הקשר בין שתי דרישות אלו: ראינו כבר (משפט 5) כי המשוואה הפונקציונאלית, ביחד עם דרישת הגזירות, גוררת את המשוואה הדיפרנציאלית. האם שתי המשוואות שקולות? ובכן, לא בדיוק.
ראינו (משפט 2) כי מהמשוואה הפונקציונאלית נובע $f(0) = 1$; אך דבר זה איננו נובע מהמשוואה הדיפרנציאלית. למשל, הפונקציה $f(x) = 2e^{3x}$ מקיימת $f' = 3f$, אך $f(0) = 2$. אם כן, לא נוכל להוכיח $f(0) = 1$ מתוך המשוואה הדיפרנציאלית, ואם נרצה לקבל שקילות, עלינו להוסיף לפחות תכונה זו כדרישה. ואמנם:

<u>משפט 14</u>: התנאים הבאים לגבי פונקציה גזירה f הם שקולים:
(I) $f(x+y) = f(x)f(y)$ לכל x ו y ממשיים ;
(II) $f(0) = 1$ ולכל x ממשי $f'(x) = kf(x)$.

הוכחה: כאמור לעיל, משפטים 2 ו 5 מראים כי התנאי (I) גורר את התנאי (II). להוכחת הגרירה ההפוכה, נניח עתה את (II) ונוכיח את (I). נתון, איפוא, כי $f' = kf$ ו $f(0) = 1$, ועלינו להוכיח כי לכל x ו y $f(x+y) = f(x)f(y)$. נוכיח כי עבור a קבוע קיים $f(a+x) = f(a)f(x)$ לכל x.

(הערה לגבי רעיון ההוכחה: ננסה להשתמש ב"טריק" דומה לזה שבהוכחת משפט 8, ולהוכיח כי $\frac{f(a+x)}{f(x)}$ היא פונקציה קבועה (השווה ל $f(a)$). הצרה היא שכאן, בניגוד למשפט 8, איננו יודעים עדיין כי $f(x) \neq 0$ ולכן אין משמעות לביטוי $\frac{f(a+x)}{f(x)}$. כדי להתגבר על מכשול זה, נגביל תחילה את x לקטע קטן שעבורו $f(x) \neq 0$ ואח"כ "ננפח" קטע זה בהדרגה עד שיכסה את כל הישר).

נסמן איפוא $g(x) = f(a+x)$, ונשים לב תחילה כי הפונקציה g מקיימת אותה משוואה דיפרנציאלית (עם אותו k).

$$g'(x) = f'(a+x) = kf(a+x) = kg(x)$$

היות ו f היא פונקציה רציפה המקיימת $f(0) = 1$, הרי קיים קטע מסויים סביב $x = 0$, נאמר $-d \leq x \leq d$, כך שעבור כל x בקטע זה $f(x) \neq 0$. בקטע זה קיים:

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{fg' - gf'}{f^2} = \frac{f(kg) - g(kf)}{f^2} = 0$$

היות ו $\frac{g}{f}$ הינה פונקציה שנגזרתה 0, הרי הפונקציה קבועה בקטע הנ"ל: $\frac{g(x)}{f(x)} = c$, כלומר $g(x) = cf(x)$ לכל $-d \leq x \leq d$.

הראינו איפוא כי $f(a+x) = cf(x)$ לכל $-d \leq x \leq d$, ובהצבת $x = 0$ נקבל $f(a) = cf(0) = c$. לכן נוכל להחליף את c ב $f(a)$ ולקבל את השוויון המבוקש $f(a+x) = f(a)f(x)$.

השוויון $f(a+x) = f(a)f(x)$ הוכח, כאמור, לכל a ממשי ולכל $-d \leq x \leq d$. עתה נראה כי מנכונותו לכל $-d \leq x \leq d$, נובעת נכונותו גם לכל $-2d \leq x \leq 2d$. ואמנם, אם נתון $-2d \leq x \leq 2d$ אז $\frac{x}{2}$ מקיים $-d \leq \frac{x}{2} \leq d$ ולכן נוכל להשתמש עבורו במה שכבר הוכחנו. מכאן:

$$f(a+x) = f(a+\frac{x}{2}+\frac{x}{2})$$

$$= f(a+\frac{x}{2})f(\frac{x}{2})$$

$$= f(a)f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2})$$

$$= f(a)f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})$$

$$= f\ (a)f(x)$$

$$= f(a)f(x)$$

עתה משהוכחנו את השוויון המבוקש לכל a ולכל $-2d \leq x \leq 2d$, נוכל לחזור על אותו שיקול ולהוכיח נכונותו לכל $-4d \leq x \leq 4d$, וכן הלאה. ברור איפוא שהשוויון נכון <u>לכל</u> x ממשי. (המדקדקים יוכיחו באינדוקציה שלכל n שלם אי-שלילי נכונה הטענה:

$f(a+x) = f(a)f(x)$ לכל a ממשי ולכל $-2^n d \leq x \leq 2^n d$).

נספח 2: <u>הערות למאמר "עוד על הפונקציה המעריכית"</u>

מאת: ש. עמיצור
האוניברסיטה העברית, ירושלים.

1. למאמר "הפונקציה המעריכית" (שבבים 11) ולמאמר זה יש שתי גישות שונות. המאמר הראשון היה נסיון לשכנע מורים בקשר ההדדי שבין "מציאות" ו"השערה מתמטית", כלומר שלב מתקדם יותר במושג ה"מודל המתמטי" שהוא מעבר לבנית משוואות. במאמר הנ"ל הוטל אלוץ של אי-שימוש בנגזרת - כיוון שקיום נגזרת (ואפילו תכונת הרציפות), אינה הנחה טבעית בשלב בנית מודל מתמטי, אלא הנחה מלאכותית לצורך פישוט או קירוב ראשון למטרה. אין כל הצדקה לכך שפונקציות כלכליות, פיסיקליות, או "כלשהן" יהיו גזירות או רציפות. במדע מתברר שזה אף איננו נכון ואחת הדרכים להתגבר על קשיים של אי גזירות היא הסתכלות בפונקציות מפוצלות בתחומים נפרדים - שבהם הנחת הרציפות היא טבעית.

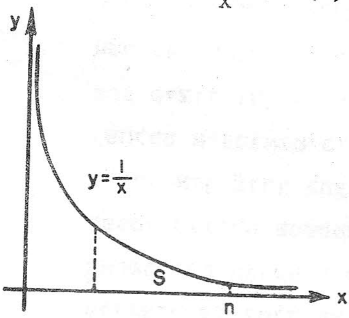
המאמר השני, של ד"ר לירון, הוא יישום המשוואה הדיפרנציאלית לדרכי הוראה מעשית בביה"ס התיכון. הסרת האילוץ של אי-שימוש בנגזרת, אשר לפי התכנית החדשה היא אפשרית (ואולי רצויה), מאפשרת ללא כל ספק קיצור דרך רב וצרוף הוכחות פשוטות יותר על יסוד משפטים (שחלקם אינטואיטיביים) מאנליזה. מאחר ובמטרה זו הבעיה היא דידקטית בלבד, אין צורך להעלות לדיון "קושי מתמטי" ביצירת התיאוריה של משפטי הנגזרת שמשתמשים בהם. אדרבא, יש צורך לנצל עד תום את האפשרויות הנוספות הטמונות בשיטה זו. למשל, האפשרות של הגדרת פונקציה על יסוד משוואה דיפרנציאלית או הקניית תרגום של מושג הנגזרת כמו "קצב גדול האוכלוסיה פרופורציונאלי למספר האוכלוסיה". אך באותה שעה מאבדים את האפשרויות להעלאת השערות כמו במשפט י"א של המאמר הראשון (שבבים 11 עמ' 11), היכול להוליך להשערת המונוטוניות. אולם, כל עוד האיבוד הוא לדעת - סבורני שכל מורה יגש לנושא לפי שיקוליו ויחליט אימתי השכר יוצא בהפסד בגישה אחת או בשניה. יתכן גם מקום לגישה משולבת ; למשל, רצוי להקדים את תיאור הגרף עבור ערכים רציונאליים, דבר שהוא קל למדי בתקופת המחשבים, עוד לפני הכנסת הנגזרת.

בהצעה דידקטית יש גם להביא בחשבון שבביה"ס התיכון (בניגוד להוראה למתמטיקאים באוניברסיטה), יש לדאוג למקום נרחב לעבודה משלימה בבית על-ידי התלמיד ולא להביא את החומר כהרצאה. לצורך זה אפילו הכרחי לעוות את הגישה המתמטית הדידוקטיבית, כדי לפתח אפשרויות רבות יותר של עבודת בית. נדמה לי שהכנסת הגרף עבור ערכים רציונאליים (הקדמת משפט 9 במאמרו של לירון) הוא נושא רצוי בשלבים הראשונים של לימוד הפונקציה המעריכית.

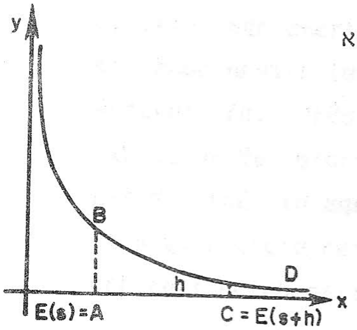
יש גם לציין שהשימוש בנגזרת דורש להקדים את נוסחת הנגזרת של פונקציה של פונקציה, או לפחות של פונקציה בעלת הצורה $f(x+a)$ (ראה משפט 5). כמו כן, הנגזרת השנייה מופיעה בתכנית הלימודים מאוחר יותר.

2. השימוש בנגזרת מאפשר גם להוכיח קיום פתרון למשוואה הדיפרנציאלית $y' = ky$. נראה זאת במקרה $k = 1$.

דרך אחת היא שימוש בפונקציה $L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $(L'(x) = \frac{1}{x})$ ושימוש בפונקציה ההפוכה.



או על ידי דלוג על השלב הפורמלי של הפונקציה ההפוכה כדלהלן:
בדרך כלל מטפלים בשאלה
"מה השטח מתחת לקו שבין 1 ו n?"
כאן נשאל שאלה הפוכה:
עבור $S > 0$ היכן היא הנקודה n כך שהשטח מתחת לקו עד n הוא S?
נסמן נקודה זו ב $n = E(S)$. זו פונקציה המוגדרת ל $0 < S$ (לא ברור שהיא מוגדרת לכל S).



קל לחשב את הנגזרת של הפונקציה $E(S)$:
נסמן: $A = E(S)$, $C = E(S+h)$.
השטח עד AB הוא S ועד CD הוא $S + h$. מכאן, התוספת בשטח היא h.

הקטע AC הוא $E(S+h) - E(S)$. שטח "המלבן" הנוסף h יקיים:

$$[E(S+h) - E(S)]\,\overline{CD} \le h \le [E(S+h) - E(S)]\,\overline{AB}$$

אבל, $$\overline{CD} = \frac{1}{E(S+h)}\quad,\quad \overline{AB} = \frac{1}{E(S)}$$

ולכן, $$hE(S) \le E(S+h) - E(S) \le h\,E(S+h)$$

האגף הימני באי-השוויון מקיים:

$$hE(s+h) = h[E(s+h) - E(s)] + hE(s) \le h^2E(s+h) + hE(s)$$

ולכן

$$E(s) + hE(s) \le E(s+h) \le E(s) + hE(s) + h^2E(s+h)$$

ומכאן

$$E'(s) = E(s)$$

3. בשיטת המשוואה הדיפרנציאלית, הפונקציה $f(x) = a^x$ מוגדרת כפונקציה (היחידה) המקיימת את התנאים הבאים:

$$f'(x) = kf(x)\quad \text{(ii)} \qquad\qquad f(0) = 1 \quad \text{(i)}$$

.$k = f'(0)$ ומהחישוב נובע ש $f(1) = a$ (iii)

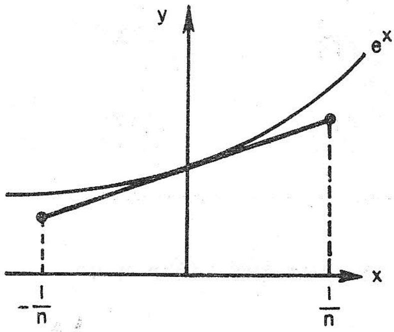
הערכים k ו a אינם בלתי תלויים - ונשאלת השאלה מה הקשר ביניהם?

התנאים (i) ו (ii) קובעים באופן יחיד את $f(x)$ (משפט 8) ולכן את (iii) $a = f(1)$. במקרה הפרטי שבו $k = 1$, יש לאבר המקיים (iii) סמון מיוחד והוא e. אם נסמן $E(x) = e^x$, הפונקציה מקיימת $E'(x) = E(x)$ $(k = 1)$ ונוכל לחשב בעזרתה את כל הפונקציות האחרות.

<u>טענה</u>: אם $f(x)$ מקיימת את (i) ו (ii) אזי $e^k = a$ $(k = \log_e a)$ וכן $e^{kx} = a^x$ לכל x.

<u>הוכחה</u>: $E(k\cdot 0) = E(0) = 1$ ו $E(kx)' = kE(kx)$ ולכן $E(kx)$ גם כן מקיימת את (i) ו (ii). מכאן $E(kx) = e^{kx} = a^x$. נציב $x = 1$ ונקבל $e^k = a$.

הערה: בעזרת נוסחה זו יכול הקורא להוכיח בנקל את כללי החזקה.



בעיה נוספת שנוכל לענות עליה - היא מציאת דרך קרוב לערך e.

המשיק לקו $E(x)$ בנקודה $x = 0$ הוא $y = x + 1$ כי $E'(0) = E(0) = 1$. כיוון שהקו קמור, הוא מעל המשיק ולכן

$$E(-\frac{1}{n}) \geq 1 - \frac{1}{n} \quad , \quad E(\frac{1}{n}) \geq 1 + \frac{1}{n}$$

לכל n.

ומכאן $e = E(1) = E(\frac{n}{n}) = E(\frac{1}{n})^n \geq (1 + \frac{1}{n})^n$

מצד שני $\frac{1}{e} = E(-1) = E(-\frac{n}{n}) = E(-\frac{1}{n})^n \geq (1 - \frac{1}{n})^n$

ולכן $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (\frac{n}{n-1})^n = (1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}(1 + \frac{1}{n-1})$

כיוון שאי השוויון נכון לכל n, נקבל מכאן (ע"י בחירת n במקום n-1 באגף הימני):

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq e \quad \text{ולכן} \quad \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$