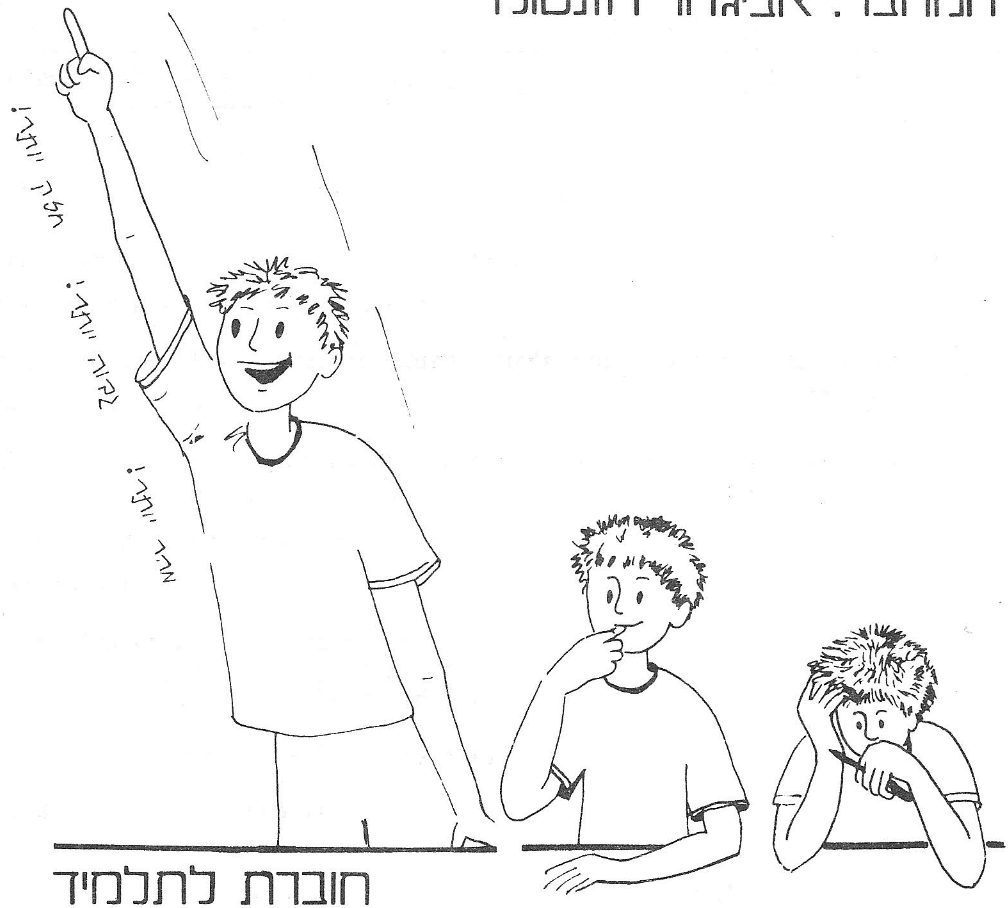
מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולר



חוברת לתלמיד

מס' 2

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

בעיות מינימום מכסימום בעזרת נוסחאות של כפל מקוצר

בכיתה ט' רמה א' הצגתי לתלמידים כשעורי בית את הבעיה הבאה "מבין זוגות המספרים שסכומם שווה ל-30 מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית. מהי המכפלה המכסימלית?".
למחרת הביאו התלמידים את תשובותיהם. רובם מצאו את התשובה המספרית הנכונה: המכפלה המכסימלית 225 והיא מתקבלת כאשר שני הגורמים שווים ל 15.
התלמידים ה"חרוצים" תארו את בדיקותיהם בטבלה:

מספר I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
מספר II	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
מכפלה	0	29	56	81	104	125	144	161	176	189	200	219	216	221	224	225

נשמעו בכיתה גם ההערות הבאות:

תלמיד אחד: אני חושב כי הרישום בטבלה אינו שיטה טובה. תארו לעצמכם מה יהיה גודל הטבלה אם סכום המספרים יהיה 1980, למשל?

תלמיד שני: בדקנו רק מספרים שלמים. אולי ניתן למצוא שני שברים אשר מכפלתם מכסימלית.

תלמיד שלישי: אחי הלומד בכיתה י"ב פתר לי את השאלה בעזרת נגזרות, אבל אנחנו לא יודעים להשתמש בנגזרות.
בסיכומה של השיחה הבטחתי לתלמידים כי נלמד לפתור בעיה זו ואחרות העוסקות במינימום ומכסימום מבלי להשתמש בנגזרות.

נעזר, לשם כך בנוסחאות לכפל מקוצר.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

בנושא זה נעסוק בחוברת זו.

בהצלחה!

ניסן, תש"ם

המחבר

שאלה מס' 1

סכום שני מספרים שווה 1980, מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית.

נסמן את שני המספרים ב a ו b , $a + b = 1980$

נרשום זהויות:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}$$

נתון כי, $a + b = 1980$

ן:

$$ab = \frac{1980^2 - (a - b)^2}{4}$$

$(a - b)^2$ הוא מספר לא שלילי, המכפלה ab תהיה מכסימלית אם ההפרש $a - b$ יהיה אפס, כלומר עבור $a = b$.

נתון כי: $a + b = 1980$ ולכן התשובה היא: $a = b = 990$

עתה ננסח עקרון כללי:

עקרון א'

מכפלת שני מספרים ממשיים חיוביים, אשר סכומם קבוע היא מכסימלית, כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה: נתונים שני מספרים ממשיים חיוביים a ו b , אשר סכומם $a + b = m$ מספר קבוע.

יש להוכיח כי מכפלת ab היא מכסימלית, כאשר $a = b$.

נרשום זהויות:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$ab = \frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{4}$$

נתון כי: $a + b = m$ ולכן,

$$ab = \frac{m^2 - (a - b)^2}{4}$$

$(a - b)^2$ הוא מספר לא שלילי, המכפלה ab תהיה מכסימלית אם ההפרש $a - b$ יהיה אפס, כלומר עבור $a = b$.

שאלה מס' 2

בין כל המלבנים אשר שטחם 100 סמ"ר, האם קיים מלבן אשר היקפו מינימלי או מכסימלי? מצא אותו.

נסמן את צלעות המלבן ב x ו y . השטח xy וההיקף $2(x + y)$.
המכפלה xy נתונה ועלינו לחקור את הסכום $x + y$.

נרשום זהויות:

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + 4xy$$

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

$$x + y = \sqrt{(x - y)^2 + 4xy}$$

נתון $xy = 100$ ולכן:

$$x + y = \sqrt{(x - y)^2 + 400}$$

$(x - y)^2$ הוא מספר לא שלילי, הסכום $x + y$ יהיה מינימלי אם ההפרש $x - y$ יהיה אפס, כלומר עבור $x = y$.

נתון כי $xy = 100$ ולכן התשובה היא: ריבוע אשר אורך צלעו 10 ס"מ הוא בעל ההיקף המינימלי בין המלבנים אשר שטחם 100 סמ"ר.

עקרון ב

סכום שני מספרים ממשיים חיוביים, אשר מכפלתם קבועה, הוא מינימלי, כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים ממשיים וחיוביים a ו b אשר מכפלתם $ab = m$.

נרשום זהות:

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$$

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$$

$$a + b = \sqrt{(a - b)^2 + 4ab}$$

נתון כי: $ab = m$ ולכן,

$$a + b = \sqrt{(a - b)^2 + 4m}$$

כמו בהוכחה הקודמת הערך המינימלי יתקבל כאשר $a - b = 0$ כלומר, עבור $a = b$.

עקרון ג

סכום ריבועיהם של שני מספרים, אשר סכומם קבוע הוא מינימלי/מקסימלי (מחק את המיותר) כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים a ו b, אשר סכומם $a + b = m$, m מספר קבוע.

אנחנו מתעניינים בסכום ריבועיהם $a^2 + b^2$

נרשום זהויות

$$a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2 + (a - b)^2}{2}$$

השלם את ההוכחה.

עקרון ד

מכפלת שני מספרים חיוביים, אשר סכום ריבועיהם קבוע, היא מינימלית/מכסימלית/ (מחק את המיותר) כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים a ו b, $a^2 + b^2 + m$ ו m מספר קבוע.
אנחנו מתעניינים במכפלה ab.

נרשום זהויות

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$$

$$4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$a^2b^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}{4}$$

$$ab = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2}}{2}$$

השלם את ההוכחה.

עקרון ה

סכום ריבועיהם של שני מספרים חיוביים אשר מכפלתם קבועה, הוא מינימלי/מכסימלי (מחק את המיותר), כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

הוכחה:

נתונים שני מספרים a ו b, מכפלתם $ab = m$, m מספר קבוע.
אנחנו מתעניינים בסכום הריבועים $a^2 + b^2$.

נרשום זהויות:

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2$$

$$(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2}$$

השלם את ההוכחה.

לפניך אוסף של בעיות, בחלק מהמקרים עליך גם להחליט אם המדובר בבעיות מינימום או מכסימום.

תוכל להיעזר בחמישה העקרונות שהובאו לעיל.

1. סכום שני מספרים שווה ל-12345, מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית.

2. סכום שני מספרים שווה ל-212, מה צריכים להיות שני המספרים כך שסכום ריבועיהם הוא מינימלי?

3. מבין הזוגות המספרים הלא שליליים שסכום ריבועיהם הוא 50, מצא את זוג המספרים שמכפלתם מכסימלית.

4. בין כל המלבנים בעלי היקף נתון 100 ס"מ, איזהו בעל השטח המכסימלי?

הוכח: בין כל המלבנים ששטח כל אחד מהם S, המלבן בעל ההיקף ________ הוא ריבוע.

6. בין כל המלבנים בעלי היקף נתון P, איזהו בעל האלכסון הקטן ביותר. מצא את צלעותיו.

7. בין כל המלבנים ששטחם קבוע ושווה ל-S, איזהו בעל האלכסון הקטן ביותר? מצא את צלעותיו.

8. הוכח: בין כל המלבנים בעלי אלכסון קבוע ושווה ל-d הריבוע הוא בעל השטח________.

9. הוכח כי למשולש ישר-זווית בעל אורך יתר קבוע, יש שטח ________ כאשר ניצביו שווים.

10. בין כל המשולשים ששטח כל אחד מהם 32 סמ"ר. איזהו המשולש שבו סכום הבסיס והגובה עליו הוא הקטן ביותר? חשב את הבסיס והגובה.

11. נתון: x ו y - הם מספרים ממשיים וחיוביים, כאשר $xy = 36$. מצא את הערך המינימלי של $x + y$.

12. נתון: x ו y - הם מספרים ממשיים וחיוביים, כאשר $x + y = 18$. מצא את הערך המינימלי של $x^2 + y^2$.

13. נתון: x ו y הם שני מספרים ממשיים וחיוביים, כאשר $x^2 + y^2 = 72$. מצא את הערך המכסימלי של xy.

14. נתון: $a + b = 1$, מצא את הערך המינימלי של $a^2 + b^2$.

עתה נעבור לבעיות קשות יותר, אשר אינן מסתמכות באופן ישיר על העקרונות שהבאנו בהתחלה. נסיונך בפתרון הבעיות הקודמות יעזור לך להתגבר על השאלות הבאות:

15. נתון: $a + b = 1$, מצא את ערך המינימלי של $a^4 + b^4$.

16. נתון: $a + b = 1$, מצא את ערך המינימלי של $a^8 + b^8$.

17. מצא את ערכה המינימלי של הפונקציה

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

18. מצא את ערכה המינימלי של הפונקציה

$$y = \sin^8 x + \cos^8 x$$

19. מצא את ערכה המינימלי של הפונקציה

$$y = \sin^{16} x + \cos^{16} x$$

20. נתון כי a ו b הם שני מספרים ממשיים חיוביים אשר מכפלת ab היא מספר קבוע. מצא תנאי לכך שהסכום $3a + 7b$ יהיה מינימלי/מכסימלי (מחק את המיותר).

21. נסח והוכח עקרון כללי על סמך בעיה מס' 20.

22. מצא את ערך המינימלי של $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, כאשר $x > 0$, $y > 0$ ו $x + y = 20$.

23. נתון $a + 2b = 1$, כאשר a ו b הם מספרים חיוביים.
מצא את הערך המכסימלי של ab.

24. חשב את ערך המינימלי של הפונקציה

$$y = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

25. מצא את ערך המינימלי של הביטוי $a^2 + ab + b^2$, כאשר $a + b = 10$
$a > 0$; $b > 0$.

26. במעגל בעל רדיוס R יש לחסום מלבן.
הוכח: בין כל המלבנים שאפשר לחסום במעגל זה, הגדול בשטחו הוא הריבוע.

27. איזהו המספר החיובי, שהסכום שלו ושל ההפכי לו קטן ביותר?

הבעיה הבאה הוצעה על ידי תלמידים בחוג למתמטיקה בנתניה.

28. מצא את ערכי x ו y כאשר ערך הביטוי $x^3 + y^3 + 2xy$
הוא הקטן ביותר ו- $x + y = 1$

נסה גם אתה את כוחך בחיבור ופתרון בעיות מכסימום - מינימום.
גם אתה יכול!