ארבע בעיות מאולימפיאדות

מאת: א. אנגל, ה. סוורין*

נציג כאן ארבע בעיות הקשורות זו לזו אשר הופיעו באולימפיאדות מתמטיות. בשורש הבעיות מסתתר "עקרון המגרות" האלמנטרי, אותו פגשנו ב"שבבים" מס' 16 ומעניין לראות את ההתפתחות העשירה תוך כדי טיפול בבעיות.

בעיה 1

הוכח כי, בקבוצה של 6 אנשים, יש תמיד 3 אשר מכירים זה את זה או 3 אשר אינם מכירים זה את זה.

בעיה זו הופיעה ב- 1947 באולימפיאדה ההונגרית. ב-1953 היא הופיעה בתחרות פוטנם (Putnam). ב-1958 התפרסמה הבעיה ב American Mathematical Monthly (AMM) ומספרה שם E-1321. הכללה שלה הופיעה ב AMM ב-1964, כבעיה מספר E-1653. הבעיה התפרסמה מאוד והפרתה במידה ניכרת ענף של תורת הגרפים.

בעיה 2

בקבוצה של 17 מדענים כל אחד נמצא בקשר מכתבים מדעי עם כל אחד. הם דנים בשלושה נושאים בלבד וכל זוג מדענים מטפל בדיוק בנושא אחד. הוכח כי אפשר למצוא לפחות שלושה מדענים, הנמצאים בקשר זה עם זה לגבי נושא אחד.

בעיה 3

במרחב נתונות $P_n = [en!] + 1$ נקודות. מחברים כל זוג נקודות על ידי קטע וצובעים כל קטע באחד מתוך n צבעים.
הוכח כי יש לפחות משולש אחד, שכל צלעותיו בעלות אותו הצבע.

בעיה 4 (XX IMO 1978)

החברים בחברה בינלאומית באים משש ארצות. רשימת החברים מכילה 1978 שמות, אשר סומנו במספרים 1, 2, ..., 1978. הוכח כי: יש חבר אשר מספרו שווה (i) לסכום המספרים של שני חברים בני ארצו, או (ii) לכפליים המספר של חבר אחר בן ארצו.

---

*מאמר זה הוא תרגום ועיבוד של חלקו השני של מאמר העוסק ב"עקרון המגירות"; החלק הראשון התפרסם בשבבים, תיק מס' 16.

Arthur Engel and Horst Sewerin, Das Schubfachprinzip,
Der Mathematikunterricht, Vol. 25 No.1,1979. Used by permission.

שתי הבעיות הראשונות הן מקרים פרטיים של הבעיה השלישית עבור $n = 2$ ו $n = 3$.
אם נציג את האנשים בעזרת נקודות אז:

(i) במקרה של הבעיה הראשונה מחברים כל זוג נקודות בקטע אדום, אם שני האנשים מכירים זה את זה ובקטע כחול אם אינם מכירים זה את זה.

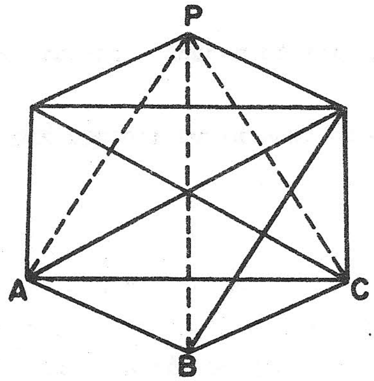
(ii) במקרה של הבעיה השניה מחברים כל זוג נקודות בקטע אדום, כחול או ירוק בהתאם לנושא מתוך שלושה הנושאים אשר מעסיק את זוג המדענים.

בשני המקרים יש להוכיח שקיים משולש שכל צלעותיו בצבע אחד.
את הקשר שבין הבעיה הרביעית והשלישית נפגוש בשלב מאוחר יותר.

פתרון הבעיות 1, 2, 3

לפני שניגש לפתרון הבעיות, נציג כאן מספר מושגים.
בוחרים p נקודות במרחב, כך שאין ביניהן 4 הנמצאות באותו מישור ואין שלוש על קו ישר אחד. מחברים כל זוג נקודות בקטע (או בעקום כל שהוא) וכך נוצר "גרף מושלם" K_p ובו: p קודקודים, $\binom{p}{2}$ מקצועות ו- $\binom{p}{3}$ משולשים. נצבע כל מקצוע באחד מתוך n צבעים ונקרא לזה "צביעת - n" של K_p. אם קיים ב K_p משולש אשר צלעותיו בעלות אותו הצבע אזי נקרא לו "משולש מונוכרומטי". אומרים אז כי K_p מכיל איזשהוא K_3 מונוכרומטי.

לגבי בעיה 1, נניח כי מקצועותיו של K_6 נצבעו בצבע אדום או כחול. נבחר באחד הקודקודים ונקרא לו P, (ראה ציור 1). לפחות 3 מבין 5 המקצועות היוצאים מ- P הם בעלי אותו צבע - נאמר אדום (עקרון המגירות).
מקצועות אדומים אלה מסתיימים בשלוש נקודות A, B, C . אם אחת מצלעות המשולש ABC, למשל AB, היא צלע אדומה אזי לפנינו משולש אדום PAB. אחרת, ABC יהיה משולש כחול, ולכן קיים משולש מונוכרומטי.



ציור 1

לגבי בעיה 2, נניח שמקצועותיו של K_{27} צבועים באדום, כחול או ירוק. לפחות 6 מבין 16 המקצועות היוצאים מקודקוד אחד P הם בעלי אותו הצבע, נניח אדום. מקצועות אדומים אלו מסתיימים ב-6 הנקודות A_1, A_2, ..., A_6. אם זוג אחד של הנקודות האלה מחובר על

ידי מקצוע אדום, אזי לפנינו משולש אדום. אם לא, אזי יש לנו K_6 צבוע בשני צבעים (כחול וירוק). לפי בעיה 1, הוא מכיל משולש כחול או ירוק.

עתה נעבור לבעיה 3 המכלילה את הבעיות הקודמות ותחילה נסכם את הידוע לנו במקרים הפרטיים:

עבור צביעה בצבע אחד ברור מאליו כי K_3 הוא משולש מונוכרומטי. עבור "צביעת 2" ראינו כי כל K_6 חייב להכיל משולש מונוכרומטי. שמנו לב כי במקרה זה חייבים לצאת מכל קודקוד לפחות 3 מקצועות שווי צבע (עקרון המגירות). כאשר עברנו ל"צביעת 3" הסתמכנו על העובדה כי ב K_{17} חייבים לצאת מכל קודקוד לפחות 6 מקצועות שווי צבע. K_{17} הוא הגרף בעל מספר הקודקודים הקטן ביותר שבו מתקיים תנאי זה, שכן מכל קודקוד יוצאים 16 מקצועות. עבור "צביעת 4" נרצה כי מכל קודקוד יצאו לפחות 17 מקצועות שווי צבע (כדי כל להסתמך על השלב הקודם). המספר הקטן ביותר של "פנינים" אשר בכל סידור שלהן בארבע "מגירות" תהיה אחת אשר תכיל לפחות 17 פנינים הוא:

$$3 \cdot 16 + 17 = 65$$

בגרף מושלם בעל 66 קודקודים יוצאים 65 מקצועות מכל קודקוד, לכן אנו מצפים כי "צביעת 4" של K_{66} תכיל לפחות משולש מונוכרומטי אחד.

נסמן ב p_{n+1} את מספר הקודקודים הקטן ביותר של גרף מושלם כך שבכל "צביעת n+1" שלו יצאו מכל קודקוד לפחות p_n מקצועות שווי צבע. נפתח נוסחת רקורסיה עבור p_{n+1}, כאשר $p_1 = 3$.

עבור "צביעת n+1" נרצה כי מכל קודקוד יצאו לפחות p_n מקצועות שווי צבע. מאחר ויש n+1 צבעים הרי המספר הקטן ביותר של מקצועות הוא $n(p_n-1) + p_n$ או $(n+1)(p_n-1) + 1$.

ולכן

$$p_{n+1} - 1 = (n+1)(p_n-1) + 1$$

ראינו לעיל כי: $p_2 = 6$, $p_3 = 17$, $p_4 = 66$

מהנוסחה נקבל: $p_5 = 327$, $p_6 = 1958$ וכו'

נסמן $q_n = p_n - 1$ ונקבל:

$$q_1 = 2 \quad ; \quad q_{n+1} = (n+1)q_n + 1$$

או

$$q_1 = 2 \quad ; \quad \frac{q_n+1}{(n+1)!} = \frac{q_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

מכאן מתקבל בקלות

$$q_n = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

אבל

$$e = \frac{q_n}{n!} + r_n$$

כאשר

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}$$

מכאן

$$q_n < en! < q_n + \frac{1}{n}$$

כלומר

$$q_n = [en!]$$

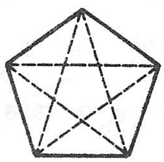
או

$$p_n = [en!] + 1$$

כדי לסיים את הוכחת בעיה 3, אפשר להראות בעזרת אינדוקציה כי עבור גרף מושלם שמספר קודקודיו נתון על ידי הנוסחה $p_n = [en!] + 1$, בכל "צביעת n" שלו חייב להופיע משולש מונוכרומטי.

נשוב ונתבונן בשלוש הבעיות הראשונות. ברור למדי כי נוכל להוכיח את הנדרש גם אם נשנה את מספר האנשים בבעיה הראשונה למספר הגדול מ 6, ובבעיה השניה למספר גדול מ 17 ובשלישית עבור מספר נקודות הגדול מ p_n. שאלה מעניינת היא האם ניתן להקטין ובכמה את המספרים ועדיין להוכיח את הנדרש.

ציור מס' 2 מראה "צביעת 2" של K_6 אשר איננה מכילה אף משולש מונוכרומטי, ולכן p=6 הוא המספר הקטן ביותר שעבורו כל K_p ב"צביעת 2" מכיל משולש מונוכרומטי.



ציור 2

גם עבור "צביעת 3", p=17 הוא המספר הקטן ביותר שעבורו כל K_p חייב להכיל משולש מונוכרומטי. טענה זו היא מסובכת יותר להוכחה, גם כאן נראה דוגמא מתאימה.
נגדיר תחילה מושג נוסף:
קבוצה חלקית של איברי חבורה קומוטטיבית נקראת "חסרת סכום", אם הסכום של כל שני איברים בקבוצה (שונים או שווים) איננו איבר של הקבוצה.
המושג "חסרת סכום" יתקשר עם אי קיום משולש מונוכרומטי.

עתה נבנה "צביעת-3" של K_{16} אשר בה לא יופיע משולש מונוכרומטי.
לשם כך נקח את החבורה הקומוטטיבית G מסדר 16, בעלת ארבעה איברים יוצרים a, b, c, d, אשר לגביהם מתקיים:

$$a + a = b + b = c + c = d + d = 0$$

נחלק את קבוצת האיברים של G, השונים מאפס, לשלוש קבוצות "חסרות סכום".

$$A_1 = \{a, b, c, d, a + b + c + d\}$$

$$A_2 = \{a + b, b + c, c + d, a + b + c, b + c + d\}$$

$$A_3 = \{a + c, a + d, b + d, a + c + d, a + b + d\}$$

(מומלץ לבדוק כי סכומם של כל שני איברים מ A_i אינו כלול ב A_i, $i = 1, 2, 3$).

נתאים לקבוצות A_1, A_2, A_3 את הצבעים אדום, כחול, ירוק. ב-K_{16} נסמן כל קודקוד באיבר שונה של החבורה. את המקצוע המחבר קודקוד x עם קודקוד y מסמנים $x + y$. אם $x + y$ שייכת ל A_i אזי צובעים את המקצוע בצבע i. אם $x + y$ ו- $y + z$ שייכים לאותה הקבוצה אזי יש לצלעות xy ו yz של המשולש xyz אותו הצבע. מאחר שהקבוצות הן "חסרות סכום", הרי שהצלע השלישית $x + z = (x+y) + (y+z)$ נמצאת בקבוצה אחרת, כלומר למקצוע yz יש צבע אחר. בצביעה שנבנתה כך לא נמצא משולש מונוכרומטי.

פתרון בעיה 4 וקשר לבעיות הקודמות

נסמן ב $R_n(3)$ את המספר המינימלי כך שבכל צביעת n של גרף מושלם שמספר קודקודיו עולה על $R_n(3)$, הגרף חייב להכיל משולש מונוכרומטי.

ראינו כי $R_2(3) = 6$, $R_3(3) = 17$

עבור ערכי n הגדולים מ 3 אין יודעים את ערכו של $R_n(3)$. מהוכחת בעיה 3 מקבלים חסם מלעיל:

$$R_n(3) \leq P_n = [en!] + 1$$

בהמשך נראה גם חסם מלרע, אך תחילה נעסוק בבעיה 4. בבעיה זו יש להראות כי את הקבו {1978, ..., 2, 1} לא ניתן לחלק לשש קבוצות חלקיות חסרות סכום. (ראה הגדרה בעמ' 4). אנחנו נחליף את 1978 ב 1957 (ברור כי מהוכחת הטענה עבור 1957 נובעת נכונותה עבור מספרים גדולים יותר כמו 1978, שנת הופעת הבעיה באולימפיאדה).

נניח אם כן שקיימת חלוקה של {1957, ..., 2, 1} לשש קבוצות חלקיות חסרות סכום F, E, D, C, B, A.

מסקנה: אחת הקבוצות החלקיות (נניח שזו A) מכילה לפחות

$$\frac{1957}{6} = 326\frac{1}{6}$$

כלומר 327 איברים. (נרשום אותם לפי הסדר)

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{327}$$

326 ההפרשים: $a_{327} - a_i$ $(i = 1 \ldots, 326)$ אינם איברים של A מכיוון ש A חסרת סכום. (הסבר: מהשוויון $a_{327} - a_i = a_j$ נובע ש $a_i + a_j = a_{327}$).

לכן ההפרשים הללו צריכים להמצא ב B עד F.

אחת הקבוצות החלקיות האלו, נאמר B, מכילה לפחות

$$\frac{326}{5} = 65\frac{1}{2}$$

כלומר 66 הפרשים

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_{66}$$

65 ההפרשים $b_{66} - b_i$ $(i = 1, \dots, 65)$ אינם נמצאים באף אחת משתי הקבוצות A או B, כיוון ששתי הקבוצות האלו הן חסרות סכום. על כן עליהם להמצא בקבוצות C עד F. אחת מהקבוצות החלקיות האלו למשל C מכילה לפחות

$$\frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$$

כלומר 17 הפרשים

$$c_1 < c_2 < \dots < c_{17}$$

16 ההפרשים $c_{17} - c_i$ $(i = 1, \dots, 16)$, אינם נמצאים באחת הקבוצות A עד C ולכן הם ב D עד F. אחת הקבוצות החלקיות, נאמר D מכילה לפחות

$$\frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

כלומר 6 הפרשים

$$d_1 < d_2 < \dots < d_6$$

5 ההפרשים $d_6 - d_i$ אינם נמצאים מ A עד D כלומר הם ב E או F.

אחת הקבוצות הללו, נאמר E, מכילה לפחות

$$\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

כלומר 3 איברים

$$e_1 < e_2 < e_3$$

שני ההפרשים $f_1 = e_3 - e_2$, $f_2 = e_3 - e_1$ אינם נמצאים ב A עד E, לכן הם צריכים להמצא ב F. ההפרש $g = f_2 - f_1$ אינו נמצא באף אחת מהקבוצות A עד F. אבל g הינו מספר חיובי בין 1 ל-1957 ולכן קבלנו סתירה.

מיעוט ניכר מבין השופטים של האולימפיאדה המתמטית הבינלאומית ה 20 רצה בניסוח אחר של בעיה זו. ניסוח זה נציג כאן בתור תרגיל.

1. החברים בחברה בינלאומית הם מחמש ארצות שונות, ברשימת החברים מופיעים 1978 שמות אשר סומנו במספרים 1, 2, ..., 1978. הוכח כי ישנו חבר אשר מספרו הסידורי שווה לסכום של שני חברים שונים בני ארצו.

אפשר להחליף את המספר 1978 בבעיה זו ב 1750.

קיים קשר בין בעיה 4 ובעיה 3 עבור $n = 6$. נרצה לעקוב עתה אחר קשר זה. בהקשר להשערת פרמה, טיפל Isai Schur בשנת 1916 בבעיה הבאה:

איזהו המספר הטבעי הגדול ביותר $f(n)$, כך שאפשר לחלק את הקבוצה $\{1, 2, \ldots, f(n)\}$ ל-n קבוצות חלקיות חסרות סכום?
עד היום ידועים רק 4 ערכים של פונקצית שור $f(n)$.

ברור כי $f(1) = 1$, על ידי ניסוי מוצאים כי $f(2) = 4$. ואמנם את הקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$ ניתן לחלק ל 2 קבוצות חסרות סכום, $\{2, 3\}$ ו $\{1, 4\}$ אבל את הקבוצה $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ לא ניתן לחלק ל 2 קבוצות חסרום סכום.

(הערה: בתת קבוצה חסרת סכום לא יכולים להופיע מספר וגם מכפלתו ב-2)

אפשר לבדוק ולראות כי $f(3) = 13$. הערך $f(4) = 44$ חושב רק בשנת 1961 בעזרת מחשב על ידי Baumert .

חלוקה חסרת סכום של $\{1, \ldots, 44\}$ נתונה כאן:

$$S_1 = \{1, 3, 5, 15, 17, 19, 26, 28, 40, 42, 44\}$$

$$S_2 = \{2, 7, 8, 18, 21, 24, 27, 33, 37, 38, 43\}$$

$$S_3 = \{4, 6, 13, 20, 22, 23, 25, 30, 32, 39, 41\}$$

$$S_4 = \{9, 10, 11, 12, 14, 16, 29, 31, 34, 35, 36\}$$

תרגילים

2. פרק את הקבוצה $\{1, 2, \ldots, 13\}$ לשלוש קבוצות חלקיות חסרות סכום. הראה שאת הקבוצה $\{1, 2, \ldots, 14\}$ כבר אי אפשר לפרק לשלוש קבוצות חלקיות חסרות סכום.

3. הראה, כי אפשר לפרק את הקבוצה $\{1, 2, \ldots, \frac{3^n - 1}{2}\}$ ל-n קבוצות חלקיות חסרות סכום.

4. חלקו את הקבוצה $\{1, 2, \ldots, 9\}$ בצורה כלשהי לשתי קבוצות חלקיות. הראה, כי באחת הקבוצות החלקיות לפחות נמצאים שלושה מספרים, כך שאחד מהם הוא הממוצע האריתמטי של שני האחרים.

5. את הקבוצה $\{1, 2, \ldots, 750\}$ חלקו בצורה כלשהי לשלוש קבוצות חלקיות. הראה שבאחת הקבוצות החלקיות לפחות ישנם שלושה מספרים כך שאחד מהם הוא הממוצע האריתמטי של שני האחרים.

6. מתוך הקבוצה $\{1, 2, \ldots, 2n + 1\}$ יש לבחור קבוצה חלקית חסרת סכום A, שמספר איבריה גדול ככל האפשר. מהו המספר הגדול ביותר של איברים ש A יכול להכיל?

שור (Schur) מצא את ההערכה הבאה:

$$\frac{3^n - 1}{2} \le f(n) \le [en!] - 1$$

אי-השויון השמאלי נובע מתרגיל 3. נוכיח את אי השויון הימני.

נראה כי את הקבוצה $\{1, 2, \ldots, [en!]\}$ לא ניתן לחלק ל n קבוצות חלקיות חסרות סכום.
מזה ינבע כי $f(n) \le [en!] - 1$.
תהי $A_1, A_2, \ldots, A_n$ חלוקה איזושהי של הקבוצה הנתונה $\{1, 2, \ldots, [en!]\}$. נסתכל בגרף המושלם K בעל $[en!] + 1$ קודקודים שנסמנם $1, 2, \ldots, [en!] + 1$. נצבע את K בעזרת צבעים $1, 2, \ldots, n$. את המקצוע rs נצבע בצבע m, אם $|r - s| \in A_m$. לפי בעיה 3 מכיל K משולש מונוכרומטי, פרוש הדבר שקיימים מספרים טבעיים t, s, r כך ש-$r < s < t \le [en!] + 1$ והמקצועות rs, rt, st הם כולם בעלי אותו הצבע m. פרוש הדבר כי $s - r, t - s, t - r \in A_m$.
מאחר ו $(s - r) + (t - s) = t - r$, הרי A_m אינה קבוצה חסרת סכום.
ואם כך, $f(n) \le [en!] - 1$.

במיוחד קיים $f(6) \le [720e] - 1 = 1956$. בכך קבלנו הוכחה שניה, פשוטה יותר, לבעיה 4 וגם ראינו כי 1957 הוא המספר הקטן ביותר שלגביו ידועה הוכחה.

לאחר שטפלנו בבעיה 4 ופגשנו את פונקצית שור $f(n)$, נמצא בעזרתה חסם מלרע ל $R_n(3)$.

נראה כי: $R_n(3) > f(n) + 1$

ההוכחה מתלכדת מלה במלה עם ההוכחה הקודמת. תהי $A_1, \ldots, A_n$ חלוקה חסרת סכום של $\{1, 2, \ldots, f(n)\}$. יהי K גרף מושלם בעל $f(n) + 1$ קודקודים $0, 1, \ldots, f(n)$.
אנחנו צובעים את מקצועות K ב-n צבעים $(1, \ldots, n)$ על ידי כך שנצבע את המקצוע rs בצבע m, כאשר $|r - s| \in A_m$. נניח כי על ידי כך נקבל משולש בעל הקודקודים r, s, t אשר למקצועותיו אותו הצבע m ויהיו $r < s < t$. אזי:
$s - r, t - r, t - s \in A_m$. אבל $(t - s) + (s - r) = t - r$. ובכך התקבלה סתירה להנחה ש A_m חסרת סכום.
על ידי כך הראינו כי קיימת "צביעת n" של K אשר אינה מכילה משולש מונוכרומטי ומכאן נובע ש $R_n(3) > f(n) + 1$, כפי שרצינו להוכיח.

ואם כך $$R_n(3) \ge f(n) + 2$$

מתרגיל 3 נובע כי $$f(n) \ge \frac{3^n - 1}{2}$$

ולכן $$\frac{3^n + 3}{2} \le R_n(3) \le [en!] + 1$$

מכאן $3 \le R_1(3) \le 3$ כלומר, $R_1(3) = 3$ וזה ידוע לנו.

$6 \le R_2(3) \le 6$ כלומר, $R_2(3) = 6$ וגם זה ידוע לנו כבר.

$$15 \le R_3(3) \le 17$$

נזכיר שהוכחנו לעיל כי $R_3(3) = 17$

$$42 \le R_4(3) \le 66$$

על סמך מסקנתו של Baumert ידוע לנו אפילו כי:

$$46 \le R_4(3) \le 66$$

אך איננו יודעים ערך מדויק.

בבעיות אשר דנו לעיל נזקקנו רק למושג משולש מונוכרומטי, ניתן להרחיב את המושג כמו בתרגיל שנביא לסיום.

7. הוכח כי:

א.. אם צובעים K_{14} בשני צבעים, אזי נוצר מרובע מונוכרומטי.

ב. אם צובעים K_{80} בשלושה צבעים, אזי נוצר מרובע מונוכרומטי.