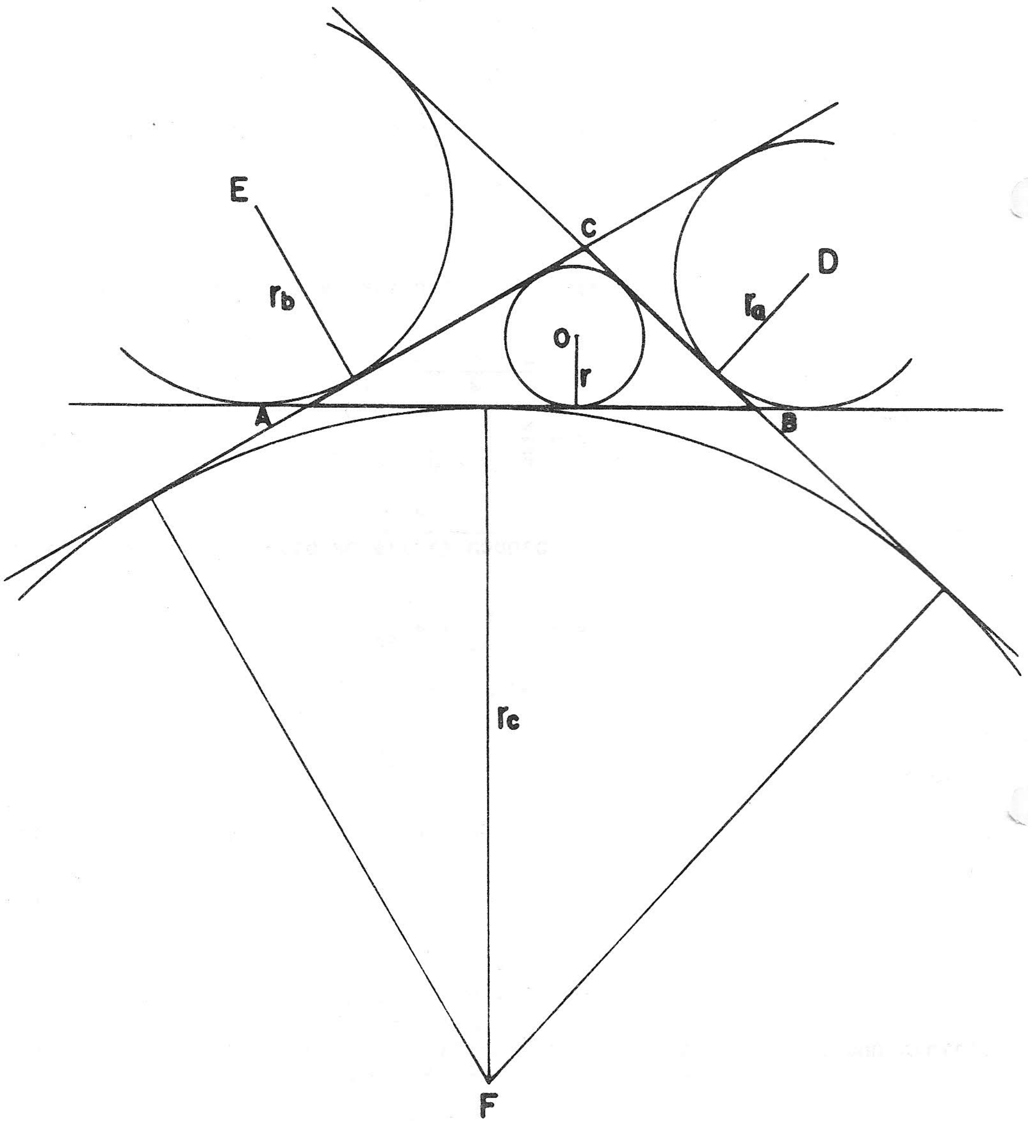
מעגלים משיקים למשולש

מאת: נורית זהבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות.

נשרטט משולש ABC ונבנה את המעגלים המשיקים לו מבפנים ומבחוץ.



ציור 1

את צלעות המשולש נסמן $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. מרכזי המעגלים מסומנים על ידי O , D , E , F והרדיוסים r , r_a, r_b, r_c (ראה ציור 1).

כידוע, שלוש צלעות קובעות את המשולש והבניה של המעגלים המשיקים היא יחידה (מרכזיהם נמצאים בנקודות הפגישה של חוצי הזויות). לפיכך, גם הרדיוסים נקבעים על ידי a , b , c .

נחפש אם כך שיטה לבטא את אורכי הרדיוסים בעזרת אורכי הצלעות במשולש.

נסמן ב- s את שטח המשולש ABC . נרשום את השטח כסכום שלושה שטחי משולשים המרכיבים את המשולש ABC .

$$s = s_{\Delta OBC} + s_{\Delta OAC} + s_{\Delta OAB}$$

$$s = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$s = r \cdot \frac{a + b + c}{2}$$

נהוג בספרי הלימוד לסמן את חצי ההיקף של משולש ב- p:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

ולפיכך:

$$r = \frac{s}{p}$$

על מנת לבטא את r_c נרשום את שוויון השטחים:

$$s = s_{\Delta FBC} + s_{\Delta FAC} - s_{\Delta FAB}$$

$$s = \frac{a \cdot r_c}{2} + \frac{b \cdot r_c}{2} - \frac{c \cdot r_c}{2}$$

$$s = r_c \cdot \frac{a + b - c}{2}$$

ולפיכך:

$$r_c = \frac{s}{p - c}$$

בדומה לכך:

$$r_a = \frac{s}{p - a}$$

$$r_b = \frac{s}{p - b}$$

נשאר לנו לבטא את s בעזרת אורכי הצלעות. נשתמש בנוסחה הנקראת נוסחת הירון*.

$$s = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

---

*הוכחת הנוסחה מופיעה בספרי לימוד בהנדסה. תוכל למצוא אותה ב"הנדסת המישור" חלק ב' מאת ש. קלעי וז. תוכמן, הוצאת עבר, (עמודים 5-144).

נקבל כי:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

לגבי משולש ישר זוית, נקבל ביטויים פחות מורכבים. נוסחת השטח של משולש ישר זוית, אשר ניצביו הם a ו b היא:

$$s = \frac{ab}{2}$$

לפיכך, רדיוסי המעגלים המשיקים למשולש ישר זוית הם:

$$r = \frac{ab}{a+b+c}$$

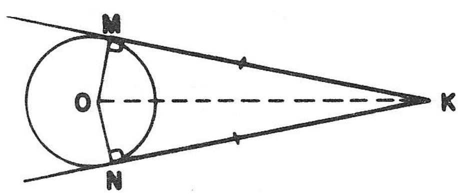
$$r_a = \frac{ab}{-a+b+c}$$

$$r_b = \frac{ab}{a-b+c}$$

$$r_c = \frac{ab}{a+b-c}$$

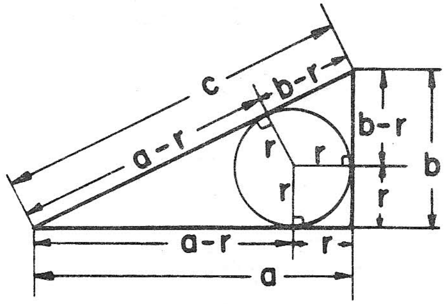
אם מתענינים רק במשולש ישר זוית אפשר לבטא את רדיוסי המעגלים בעזרת הצלעות בשיטה ישירה הקרובה יותר למושג ההשקה. לא בעזרת השטח של המשולש, כי אם על סמך המרחק מקודקוד זוית לנקודת השקה.

נשרטט מעגל המשיק לשוקי זוית (ציור 2). המשולשים OMK ו ONK הם חופפים ולכן המרחקים מקודקוד הזוית לנקודות ההשקה שווים זה לזה.



ציור 2

נחשב את r, רדיוס המעגל החסום במשולש:



ציור 3

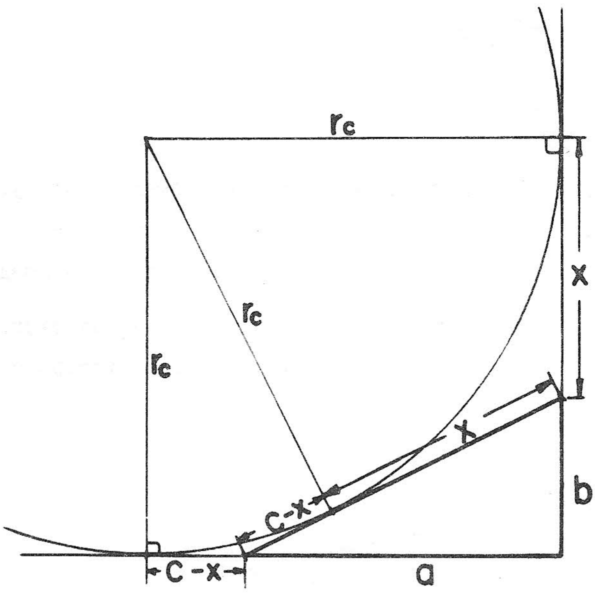
מציור 3 מקבלים: $a - r + b - r = c$

מכאן: $2r = a + b - c$

כלומר: $r = \dfrac{a + b - c}{2}$

הביטוי שונה מזה שקבלנו בשיטה הקודמת. אם זוכרים כי במשולש ישר זוית מתקיים משפט פיתגורס $(a^2 + b^2 = c^2)$, קל להראות כיצד ניתן לעבור מהביטוי שהתקבל בדרך אחת לזה שהתקבל בדרך השניה.

נחשב את r_c:



ציור 4

מציור 4 מקבלים: $$r_c = b + x$$

$$b + x = a + c - x$$

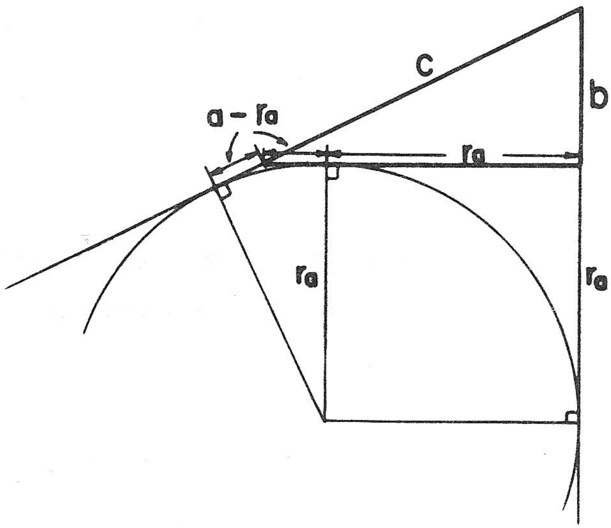
מכאן: $$2x = a + c - b$$

$$x = \frac{a - b + c}{2}$$

כלומר: $$r_c = b + \frac{a - b + c}{2}$$

$$r_c = \frac{a + b + c}{2}$$

נחשב את r_a:



ציור 5

מציור 5 מקבלים: $$b + r_a = c + a - r_a$$

מכאן: $$r_a = \frac{a - b + c}{2}$$

כדאי לשים לב כי r_a שווה ל x שמצאנו בסעיף ב' (ציור 4).

באופן דומה נקבל:

$$r_b = \frac{-a + b + c}{2}$$

כמו שהערנו לגבי r, אפשר להראות כיצד ניתן לעבור מהביטויים שהתקבלו בדרך אחת לאלו שהתקבלו בדרך השניה.

נתבונן בביטויים שהתקבלו, ונראה כי קיימים קשרים מענינים בין הרדיוסים והצלעות. כדאי בכל מקרה לשים לב למשמעות הגיאומטרית בציורים.

קשרים המתקבלים על ידי חיבור:

$$r + r_a = a$$

$$r + r_b = b$$

$$r_a + r_b = c$$

$$r_c - r = c$$

$$r + r_a + r_b = r_c$$

קשרים המתקבלים על ידי כפל:

$$r \cdot r_c = \frac{ab}{2}$$

$$r_a \cdot r_b = \frac{ab}{2}$$

הקורא יוכל להוכיח לעצמו קשרים נוספים כמו:

1. הראה כי בכל משולש מתקיים:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

2. הראה כי בכל משולש:

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = s^2$$

לקריאה נוספת:

COXETER, H.S.M , Introduction to Geometry , John Wiley & Sons. (1969)