מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר. אביגדור רוזנטולר

חוברת למורה

מס' 1

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע- רחובות

תכן ענינים

סודו של אלברט איינשטיין

השנה מלאו 100 שנה להולדתו של אלברט איינשטיין, מגדולי הגאונים של המדע בכל הדורות.
על תולדות חייו ופעלו יכולים התלמידים לקרוא בספרים ובאינציקלופדיות.

בשנת 1969 קראתי בחוברת של "Техника Молодёжи" והנה התגלה לי סוד של אלברט איינשטיין. התברר, כי בשנות העשרים פנה איינשטיין לעורך ראשי של עיתון בגרמניה והציע לו לפרסם בעיתונו חידות, בעיות ומשחקים מתמטיים אבל בעילום שמו. קוראים רבים "שברו את ראשם" במציאת פתרונות מבלי לדעת את שמו של מציג השאלות.

בחוברת הביאו שתי דוגמאות: בעית המגבעות ובעית הסולם (מס' 3 ומס' 5 בקובץ שלפניך) חפשתי את העיתון הגרמני שבו הופיעו שתי חידות אלה ומצאתי בו חידות נוספות.

בחוברת לתלמיד מוגשות מספר חידות מביניהן. בחוברת זו אנו מביאים אותן עם פתרון. ברור כי ניתן להגיע לפתרון גם בדרכים שונות מאלו המובאות בחוברת. הבעיות מתאימות לתלמידים מכיתות ד' ואילך והן מסודרות בחוברת בסדר עולה משוער של הידע המתמטי הנדרש לפתרונן. ברור כי קביעה זו אינה מוחלטת במיוחד כאשר מדובר בתלמידים בחוגי העשרה.

המורה יכול להציע לתלמידיו לא רק לפתור את הבעיות, כי אם גם לנסות לחבר ולפתור שאלות דומות בעצמם.

בהצלחה!

המחבר

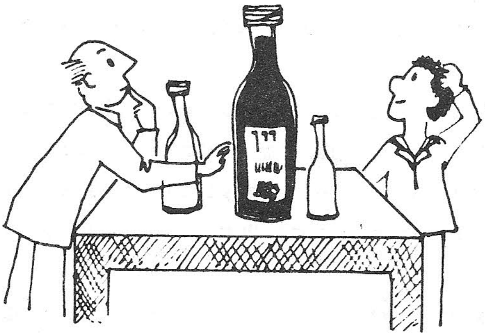
תשרי, תש"ם

הדפיסה: יעל עמנואל
איירה : רחל בוקשפן

בעיה מס' 1: כיצד לחלק?

שני אנשים קנו במשותף 8 ליטר יין בבקבוק גדול. הם רצו לחלק ביניהם את היין שווה בשווה. עמדו לרשותם שני בקבוקים ריקים בעלי קיבול של 3 ליטר ו 5 ליטר.

כיצד בצעו את החלוקה?



פתרון:

נסמן את כמות היין בבקבוק הגדול ב- a

את כמות היין בבקבוק שקיבולו 3 ליטר ב- b

ואת כמות היין בבקבוק שקיבולו 5 ליטר ב- c

נרשום בטבלה שלבים המביאים לחלוקה הדרושה, נציע שתי אפשרויות

	a	b	c
1	8	-	-
2	3	-	5
3	3	3	2
4	6	0	2
5	6	2	0
6	1	2	5
7	1	3	4
8	4	-	4

או

	a	b	c
1	8	-	-
2	5	3	-
3	5	-	3
4	2	3	3
5	2	1	5
6	7	1	-
7	7	-	1
8	4	3	1
9	4	-	4

בעיה מס' 2: צרף מספר

צרף למספר 97 ספרה a משני צדדיו $\overline{a97a}$ כך שהמספר החדש יתחלק ב 27.

פתרון

$\overline{a97a} = 1000a + 970 + a = 1001a + 970$

$= 37\cdot27a + 2a + 35\cdot27 + 25 = 27(37a+35) + 25 + 2a$

$25 + 2a$ מתחלק ב 27 עבור $a = 27k + 1$ $(k = 0,1,2\ldots.)$

מאחר ו a מייצג ספרה הרי $a = 1$

ואכן 1971 מתחלק ב 27.

בעיה מס' 3: מגבעות צבעוניות

סוחר מתורכיה חיפש שותף, הגיעו אליו שני אנשים. הוא רצה לבחור בחכם שביניהם. אבל כיצד ידע זאת? הוא החליט לבחון את האנשים.
הסוחר נכנס עם האנשים לחדר ללא חלונות ומראות, פתח קופסה ואמר: בקופסה זו נמצאות חמש מגבעות, שתיים אדומות ושלוש שחורות. אני אכבה את האור וכל אחד יקח מגבעת אחת ויחבוש לראשו. כאשר אדליק שוב את האור, כל אחד יצטרך להגיד לי מהו צבע המגבעת שעל ראשו. מי שיגלה זאת ראשון, יהיה שותפי.

כאשר הודלק האור, ראו שני האנשים על ראש הסוחר מגבעת אדומה, אמר האחד: על ראשי מגבעת שחורה. האם צדק?

<u>פתרון:</u>

המשיב צדק. שיקוליו היו: נניח שעל ראשי גם כן מגבעת אדומה, כי אז השני היה רואה שתי מגבעות אדומות ומיד מסיק שלראשו מגבעת שחורה. אבל הוא שתק ולכן על ראשי מגבעת שחורה.

בעיה מס' 4: חמישים כדורים בצבע אחד

בשק גדול נמצאים 220 כדורים שווי גודל: 55 כחולים, 55 אדומים, 55 צהובים ו- 55 שחורים. מהו המספר הקטן ביותר של כדורים שעליך להוציא בעיניים עצומות, כדי שיהיו לך לפחות 50 כדורים בצבע אחד?

<u>פתרון:</u>

אם נוציא 196 כדורים עדיין איננו בטוחים שהוצאנו 50 כדורים מאותו צבע, כי יתכן שהוצאנו 49 כחולים, 49 אדומים, 49 צהובים ו 49 שחורים. אם נוציא עוד כדור אחד, כלומר 197 כדורים יהיו בודאי לפחות 50 כדורים מאותו צבע.

בעיה מס' 5: כמה מדרגות בסולם?

ילד קופץ בחדר מדרגות.

אם הוא קופץ על כל מדרגה שניה נשארת בסוף מדרגה אחת.

אם הוא קופץ על כל מדרגה שלישית נשארות בסוף שתי מדרגות.

אם הוא קופץ על כל מדרגה רביעית נשארות בסוף שלש מדרגות.

אם הוא קופץ על כל מדרגה חמישית נשארות בסוף ארבע מדרגות.

אם הוא קופץ על כל מדרגה שישית נשארות בסוף חמש מדרגות.

אם הוא קופץ על כל מדרגה שביעית לא נשארת אף מדרגה בסוף.

כמה מדרגות בסולם?

<u>פתרון:</u>

עלינו למצוא מספר כזה שאם נחלק אותו ב n, $n = 2,3,4,5,6$ השארית תהיה $n - 1$.

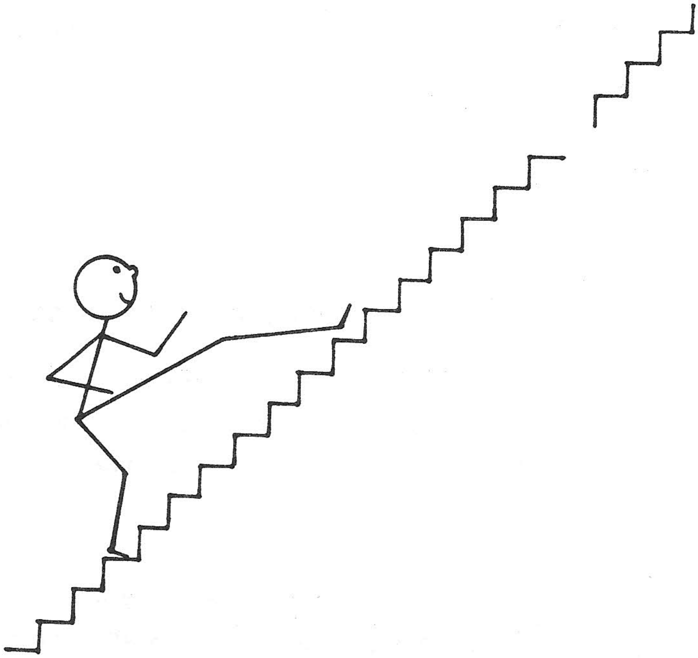
(הערה: עבור $n = 1$ הילד קופץ על כל מדרגה והשארית היא כמובן אפס.)

אם מחסרים 1 ממספר המתחלק ב n השארית היא $n - 1$.

המספר הקטן ביותר המתחלק ל- 2, 3, 4, 5 ו-6 הוא 60. אם נחסר 1 יתקבל 59 והוא עונה על הדרישות הנ"ל לגבי השאריות ואולם אינו מתחלק ב 7.

המספר הבא המתחלק ל- 2, 3, 4, 5 ו-6 הוא 120 והפעם 119 גם מתחלק ב 7.

אם נוסיף ל 120 7 כפולות של 60 כלומר 420 נקבל 540 והמספר 539 אף הוא עונה על דרישות השאלה. אבל זהו באמת סולם ארוך! (אפשר להמשיך כך ולמצוא מספרים גדולים יותר.)



בעיה מס' 6: מהן הספרות החסרות?

מהן הספרות החסרות בתרגילי הכפל הבאים? מצא את כל הפתרונות האפשריים.

I. א.   * * * * * 4 7
ב.   * *
____
* * * * * * *
* * * * * *
____
* * * * * 5 9

II.   * * *
* * 8
____
* * *
* * * *
* * * *
____
* * * * * 0

<u>פתרון</u>:

I. נתבונן בשורה ב', ספרת היחידות היא 7 $(7\times7 = 49)$ ואז בשורה ג' הספרה היחידות היא 9 והעשרות 2. כדי שיתקבל 5 בשורה ה' צריכה להיות ספרת היחידות בשורה ד'-3. אם כך, ספרת העשרות בשורה ב' היא 9 $(7\times9 = 63)$ וזה לא יתכן כי מכפלת שורה א' ב 7 היא קטנה ממכפלתה ב 9 ואלו המספר בשורה ג' הוא בן 7 ספרות וזה שבשורה ד' רק בן 6 ספרות.

II. לתרגיל זה שני פתרונות

$$\begin{array}{r} 115 \\ \times\ \underline{998} \\ 920 \\ 1035 \\ \underline{1035} \\ 114770 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 120 \\ \underline{998} \\ 960 \\ 1080 \\ \underline{1080} \\ 119760 \end{array}$$

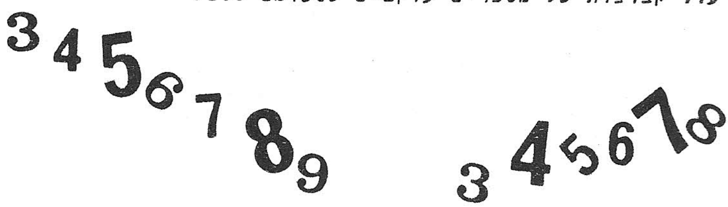
בעיה מס' 7: מספרים עוקבים

סכום חמשת המספרים העוקבים הבאים

$$18 + 19 + 20 + 21 + 22$$

הוא 100.

האם קיימות עוד קבוצות של מספרים עוקבים שסכומם 100?



<u>פתרון:</u>

נניח כי קיימים n מספרים עוקבים שסכומם 100

כלומר

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+n-1) = 100$$

$$\frac{(x+x) + n-1)\ n}{2} = 100$$

$$(2x + n-1)\ n = 200$$

אם n מספר זוגי ברור ש $2x + n - 1$ הוא מספר אי-זוגי ולהפך.

נרשום את 200 כמכפלות של שני מספרים. כל המכפלות האפשריות הן:

$$200 = \underline{200\cdot 1} = 100\cdot 2 = 50\cdot 4 = \underline{25\cdot 8} = 20\cdot 10 = \underline{40\cdot 5}$$

בשל השיקול שהבאנו לעיל עלינו לבדוק את המכפלות המודגשות בקו.

$n = 1$

$2x + n - 1 = 200$

$x = 100$ הפתרון הטריואלי.

$n = 5$

$2x + n - 1 = 40$

$x = 18$ זו הדוגמא שהבאנו לעיל.

$n = 8$

$2x + 4 - 1 = 25$

$x = 9$

תשובה נוספת: $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 100$

בעיה מס' 8: מכפלת מספרים עוקבים

מצא חמשה מספרים עוקבים שמכפלתם שווה 742560

<u>פתרון:</u>

נסמן את המספרים ב x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$

עלינו לפתור את המשוואה

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 742569$$

נפרק לגורמים את המספר 742560

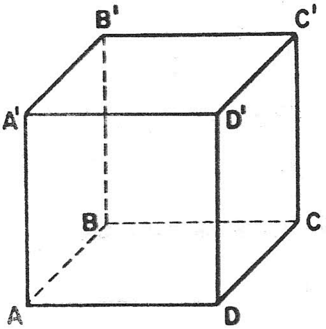
$$742560 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot13\cdot17$$

עתה ניצור מהגורמים הראשונים חמישה גורמים שהם מספרים עוקבים

$$13 = 13$$
$$2\cdot7 = 14$$
$$3\cdot5 = 15$$
$$2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$$
$$17 = 17$$

ואם כך $13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17 = 742560$

בעיה מס' 9: סדר את המספרים



נתונה קוביה ABCDA'B'C'D סמן את 12 המקצועות של הקוביה במספרים שונים מ 1 ועד 12, באופן שסכום כל שלושת מספרים הרשומים על שלושה מקצועות היוצאים מקודקוד אחד יהיה מספר קבוע.

כיצד לסדר את המספרים?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב S את הסכום של כל שלושה מספרים הרשומים על שלושה מקצועות היוצאים מקודקוד אחד.

לקוביה שמונה קודקודים, אם נחבר את כל המספרים לפי הקודקודים כל מספר שעל מקצוע ימנה פעמים ולפיכך נקבל

$$2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12) = 8S$$

$$2\cdot\frac{(1+12)12}{2} = 8S$$

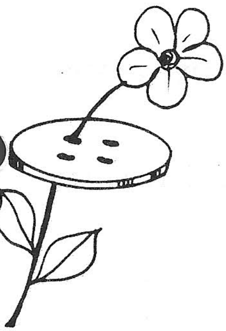
$$156 = 8S$$

$$S = 19\tfrac{1}{2}$$

מאחר ו S אמור להיות סכום של שלושה מספרים שלמים ואנו קבלנו מספר לא שלם, מתברר כי אי אפשר לסדר את המספרים באופן הנדרש בבעיה.

בעיה מס' 10: כמה כפתורים בכל חבילה

בחמש חבילות נמצאים 200 כפתורים, עליך למצוא כמה כפתורים בכל חבילה, אם ידוע כי:



א. בחבילה הראשונה והשניה ביחד יש 104 כפתורים.

ב. בחבילה השניה והשלישית ביחד יש 86 כפתורים.

ג. בחבילה הרביעית והחמישית ביחד יש 60 כפתורים.

ד. בכל חבילה מספר הכפתורים שונה.

ה. אין אף חבילה שמספר הכפתורים בה קטן מ- 28.

<u>פתרון</u>:

נסמן את מספר הכפתורים בחמש החבילות באופן הבא

$$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5$$

נכתוב מערכת של ארבע משוואות: (הערה: ניתן לפתור את השאלה גם בלי רישום פורמלי של המשוואות).

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 200$$

$$a_1 + a_2 = 104$$

$$a_2 + a_3 = 86$$

$$a_4 + a_5 = 60 .$$

אם נחבר את שלוש המשוואות האחרונות נקבל

$$a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 250$$

מכאן $a_2 = 50$

ולכן: $a_3 = 36$

ו $a_1 = 54$

בעזרת הנתונים ג, ד, ה נקבל כי

$a_4 = 29$ $a_5 = 31$ (או להפך)

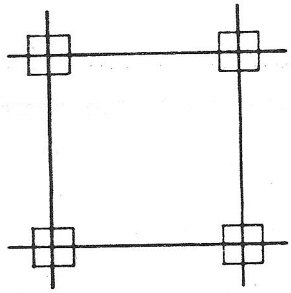
או

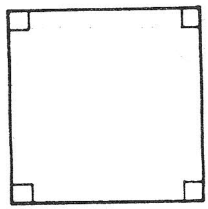
$a_4 = 28$ $a_5 = 32$ (או להפך)

בעיה מסי 11: 12 זויות ישרות

בציור א' בנו 4 זוית ישרות בעזרת ארבעה גפרורים

בציור ב' בנו 16 זוית ישרות בעזרת ארבעה גפרורים





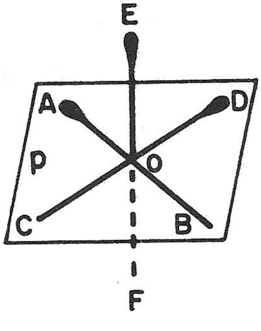
האם תוכל לבנות 12 זוית ישרות בעזרת שלושה גפרורים?

<u>פתרון:</u>

p - מישור

הגפרורים AB ו CD מונחים במישור p באופן ש $AB \perp CD$

ואילו הגפרור EF מאונך למישור ועובר דרך נקודת הפגישה של שני האחרים.



ולכן, $EF \perp AB$

$EF \perp CD$

כך נוצרות 12 זויות ישרות.

בעיה מס' 12:   מצא את המספר

אם נוסיף למספר 100 מספר מסוים נקבל ריבוע של מספר שלם. אם נוסיף אותו מספר מסוים ל- 164, גם אז נקבל ריבוע של מספר שלם אחר.
מצא את המספר המסוים שיש להוסיף.

<u>פתרון:</u>

נסמן את המספר המסוים שיש להוסיף ב x ונקבל מערכת משוואות

$$\begin{cases} 100 + x = a^2 \\ 164 + x = b^2 \end{cases}$$

כנדרש a^2 ו b^2 , הם ריבועים של מספרים שלמים.
זוהי מערכת של שתי משוואות בשלשה נעלמים a , b ו- x.
כדי לנסות לפתור את המערכת נחסר את אחת המשוואות מהשניה

$$b^2 - a^2 = (164+x) - (100+x)$$

או

$$b^2 - a^2 = 64$$

אם כך,

$$(b+a)(b-a) = 64$$

נרשום את כל המכפלות של שני מספרים שלמים הנותנות 64

$$64 = 64\cdot 1 = 32\cdot 2 = 16\cdot 4 = 8\cdot 8$$

ועתה ננסה לבדוק את האפשרויות השונות:

$$\begin{aligned} b + a &= 8 \\ b - a &= 8 \\ \hline b &= 8 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

לא מתאים לנתונים

$$\begin{aligned} b + a &= 16 \\ b - a &= 4 \\ \hline b &= 10 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

לא מתאים כי לפי הנתונים חייב להתקיים
$a^2 > 100$
$b^2 > 164$

$$\begin{aligned} b + a &= 32 \\ b - a &= 2 \\ \hline b &= 17 \\ a &= 15 \end{aligned}$$

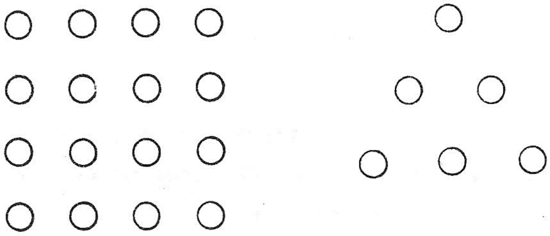
$$\begin{aligned} b + a &= 64 \\ b - a &= 1 \\ \hline b &= 32.5 \\ a &= 31.5 \end{aligned}$$

לא מתאים

אם כך, האפשרות היחידה היא $b = 17$ ו- $a = 15$.
נחשב את x ונקבל: $x = 125$.

בעיה מס' 13:   מצא את מספר הכדורים

בעזרת כדורים ניתן "להרכיב" משולש שווה צלעות (ראה ציור)
ניתן גם "להרכיב" ריבוע מכדורים (ראה ציור)



בידיך מספר כדורים שווי גודל, ידוע כי ניתן "להרכיב" מהם גם משולש שווה צלעות וגם ריבוע אלא שיש הבדל של שני כדורים בין מספר הכדורים על צלע הריבוע ומספרם על צלע המשולש.

מהו מספר הכדורים?

<u>פתרון:</u>

ברור כי מספר הכדורים על צלע המשולש גדול ממספרם על צלע הריבוע. נסמן את מספר הכדורים על צלע המשולש ב- x ואת מספר הכדורים על צלע הריבוע ב- $x - 2$

מספר הכדורים במשולש:

$$x + (x-1) + (x-2) + \dots 3 + 2 + 1 = \frac{x(x+1)}{2}$$

מספר הכדורים בריבוע:

$$(x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

נשווה את המספרים

$$\frac{x(x+1)}{2} = (x-2)^2$$

$$x^2 + x = 2x^2 - 8x + 3$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 8$$

$x_1 = 1$ **לא יתכן** (כי $x > 2$) **אם כך, מספר הכדורים הוא** $36 = 6^2 = (8-2)^2$

בעיה מס' 14: מצא את הערכים

בספר תרגילים במתמטיקה נפלה טעות, במקום להדפיס את תבנית המספר (ביטוי אלגברי):

$x\cdot 20.$____ (מכפלת x במספר המורכב מ 20 ושבר עשרוני סופי)

הדפיסו

$x^2\cdot 0.$____ (מכפלת x^2 בשבר עשרוני סופי)

בקשו להציב ערך מסוים עבור x ולחשב את התוצאה והנה, על אף הטעות בהדפסת התרגיל התקבלה אותה התוצאה בחישוב.

מצא את x כמספר דו ספרתי ואת השבר העשרוני.

<u>פתרון</u>:

נסמן את השבר העשרוני ב- y ונקבל את המשוואה

$$x^2\cdot y = x\cdot(20+y)$$

ברור, כי עבור $x = 0$ יתקבלו תוצאות השוות לאפס בשני הביטויים. עבור $x \neq 0$ נצמצם את שני האגפים:

$$xy = 20 + y$$

$$y\,(x-1) = 20$$

$$y = \frac{20}{x-1}$$

אם y הוא שבר עשרוני סופי אזי $x - 1$ הוא מספר דו ספרתי שאפשר לפרק אותו לגורמים של 2 ו 5 בלבד. נחפש את כל המספרים הללו הגדולים מ 20.

נסדר את התוצאות בטבלה

$x - 1$	x	$y = \frac{20}{x-1}$
25	26	0.8
32	33	0.625
50	51	0.4
64	65	0.3125
80	81	0.25

בעיה מס' 15: כמה גפרורים?

על השולחן מונחות ארבע ערימות של גפרורים, אם נעביר מהערימה הראשונה לשניה מספר גפרורים השווה למספרם בערימה השניה, אחר-כך נעביר מהשניה לשלישית מספר גפרורים השווה למספרם בערימה השלישית אחר כך מהשלישית לרביעית מספר השווה למספרם ברביעית ולבסוף נעביר לראשונה מספר השווה למספר הגפרורים שיימצא אז בערימה הראשונה, יהיה בכל הערימות מספר שווה של גפרורים.
כמה גפרורים (המספר האפשר הקטן ביותר) נמצאים על השולחן, ואיך הם מחולקים בין הערימות השונות?

__פתרון:__

שיטה ראשונה: נסמן את מספר הגפרורים בערימה הראשונה ב- a, בערימה השניה ב- b, בערימה השלישית ב- c ובערימה הרביעית ב- d.

אחרי שהעברנו מהערימה הראשונה לשניה מספר גפרורים השווה למספרם בערימה השניה. נשארו בערימה הראשונה a - b גפרורים ובערימה השניה יהיה מספרם 2b = b + b.
הערימות השלישית והרביעית נשארו בלי שינויים.
אחרי שהעברנו מהערימה השניה לשלישית מספר גפרורים השווה למספרם בערימה השלישית אז בערימה השניה נשארו 2b - c גפרורים ובערימה השלישית מספרם יהיה 2c = c + c, הערימות הראשונה והרביעית נשארו בלי שינויים וכך הלאה.

את התהליך אפשר להציג בעזרת טבלה הבאה:

	ערימה IV	ערימה III	ערימה II	ערימה I
התחלת המשחק	a	c	b	a
לאחר העברה ראשונה	d	c	2b	a-b
לאחר העברה שניה	d	2c	2b-c	a-b
לאחר העברה שלישית	2d	2c-d	2b-c	a-b
לאחר העברה שלישית	2d-a+b	2c-d	2b-c	2a-2b

קבלנו מערכת המשוואות

$$2a - 2b = 2b - c = 2c - d = 2d - a + b$$

כיצד נפתור מערכת זו?

מכוון ש- $2a - 2b = 2b - c$ נובע: $4b = 2a + c$

$$b = \frac{2a + c}{4} \qquad (1)$$

מכוון ש- $2d - c = 2c - d$ נובע: $2b = 3c - d$

(2) ו- $b = \frac{3c - d}{2}$

מכוון ש- $2c - d = 2d - a + b$ נובע: $2b = 4c - 6d + 2a$

(3) ו- $b = 2c - 3b + a$

לפי (1) ו (2) נובע:

$$\frac{2a + c}{4} = \frac{3c - d}{2}$$

$$2a + c = 6c - 2d$$

$$5c = 2a + 2d$$

$$c = \frac{2a + 2d}{5} \qquad (4)$$

לפי (2) ו (3) נובע:

$$\frac{3c - d}{2} = 2c - 3d + a$$

$$3c - d = 4c - 6d + 2a$$

$$c = 5d - 2a \qquad (5)$$

לפי (5) ו (4) נובע:

$$\frac{2a + 2b}{5} = 5d - 2a$$

$$2a + 2d = 25d - 10a$$

$$23d = 12a$$

$$\frac{a}{d} = \frac{23}{12}$$

המספרים הקטנים ביותר המקיימים יחס זה הם:

$$d = 12 \quad , \quad a = 23$$

ולכן: $c = 5d - 2a = 5\times12 - 2\times23 = 60 - 46 = 14$

$$b = \frac{3c - d}{2} = \frac{3.14 - 12}{2} = \frac{42 - 12}{2} = 15$$

תשובה:	IV	III	II	I
	12	14	15	23

שיטה שניה: (מהסוף להתחלה)

	ערימה IV	ערימה III	ערימה II	ערימה I
המצב בסוף	x	x	x	x
לפני העברה רביעית	$\frac{3}{2}x$	x	x	$\frac{x}{2}$
לפני העברה שלישית	$\frac{3}{4}x$	$\frac{7}{4}x$	x	$\frac{x}{2}$
לפני העברה שניה	$\frac{3}{4}x$	$\frac{7}{8}x$	$\frac{15}{8}x$	$\frac{x}{2}$
בהתחלה	$\frac{3}{4}x$	$\frac{7}{8}x$	$\frac{15}{16}x$	$\frac{23}{16}x$

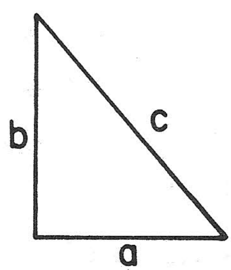
המספר הקטן ביותר של הגפרורים יתקבל אם נבחר $x = 16$ ואז מספרי הגפרורים בערימה הם בהתאמה

23 , 15 , 14 , 12

בעיה מס' 16: מוזר, אבל עובדה!

במשולש ישר זוית הניצבים הם 0.16 ס"מ = a   1.12 ס"מ = b

כדי למצוא את ריבוע היתר משתמשים במשפט פיתגורס



$$c^2 = a^2 + b^2$$

ואם כך
$$c^2 = 0.16^2 + 1.12^2$$

$$= 0.0256 + 1.2544$$

$$= 1.28$$

אבל "אפשר לקבל את התרצאה" בדרך יותר פשוטה:

$$0.16 + 1.12 = 1.28$$

מוזר, אבל עובדה!

האם קיימים עוד משולשים "מוזרים" כאלה?

פתרון:

נפתור את הבעיה בצורה כללית

נחפש משולשים ישרי זווית שעבורם מתקיים

$$a^2 + b^2 = a + b$$

נסמן את היחס בין a ל b ב m; $\frac{a}{b} = m$

ונציב במקום a את bm בשויון לעיל ונקבל:

$$(bm)^2 + b^2 = bm + b$$

$$b^2m^2 + b^2 = bm + b$$

$$b^2 \ (m^2+1) = b(m+1)$$

נחלק את שני האגפים ב- b, ואז נקבל:

$$b(m^2+1) = m + 1$$

$$b = \frac{m+1}{m^2+1}$$

מאחר ו $a = bm$, אז $a = \frac{m\ (m+1)}{m^2+1}$

קבלנו שתי משוואות פרמטריות עבור a ו b. עתה נוכל למצוא משולשים המקיימים את התכונה.
אם נציב במקום $m = 7$ נקבל

$$b = \frac{7+1}{49+1} = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 0.16$$

$$a = \frac{7(7+1)}{49+1} = \frac{56}{50} = \frac{112}{100} = 1.12$$

זהו המקרה שהופיע כדוגמא בבעיה.

אפשר למצוא נוספים.

למשל עבור $m = 3$ נקבל,

$$b = \frac{3+1}{9+1} = 0,4 \qquad\qquad a = \frac{3\cdot(3+1)}{9+1} = 1,2$$

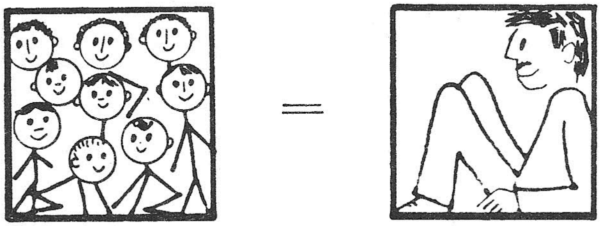
ואכן, $0,4^2 + 1,2^2 = 0,16 + 1,44 = 1.6$

$$0,4 + 1,2 = 1.6$$

וכך עבור ערכי m חיוביים שונים.

בעיה מס' 17: מצא את הגילים

במשפחה מסויימת 9 בנים. הפרש הגילים בין כל שני בנים הוא קבוע, כי סכום ריבועי הגילים של הבנים שווה לריבוע הגיל של אביהם.
מצא את גילי האב והבנים. (הגילים הם מספרים שלמים).



<u>פתרון</u>:

נסמן את גיל של הבן החמישי (מדוע?) ב x, ואת הפרש הגילים d, נרשום את המשוואה הבאה:

$$(x-4d)^2+(x-3d)^2+(x-2d)^2+(x-d)^2+x^2+(x+d)^2+(x+2d)^2+(x+3d)^2+(x+4d)^2 = y^2$$

כאשר y- הוא הגיל של אביהם.

נפשט את המשוואה:

$$x^2-8dx+16d^2+x^2-6dx+9d^2+x^2-4dx+4d^2+x^2-2dx+d^2+x^2+x^2+$$
$$+2dx+d^2+x^2+4dx+4d^2+x^2+6dx+9d^2+x^2+8dx+16d^2 = y^2$$

$$9x^2 + 60d^2 = y^2$$

מכאן נובע ש y מתחלק ב- 3 נרשום $y = 3k$ נציב

$$9x^2 + 60d^2 = 9k^2$$

$$3x^2 + 20d^2 = 3k^2$$

מכאן נובע, ש- d מתחלק ב- 3, והפתרון היחידי המתקבל על הדעת הוא: $d = 3$, נציב $d = 3$ ונקבל,

$$3x^2 + 180 = 3k^2$$

$$x^2 + 60 = k^2$$

$$k^2 - x^2 = 60$$

$$(k+x)(k-x) = 60\cdot1 = 30\cdot2 = 20\cdot3 = 15\cdot4 = 10\cdot6$$

מכאן מתקבלות 5 מערכות המשוואות בשני נעלמים:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$k+x = 60$	$k+x = 30$	$k+x = 20$	$k+x = 15$	$k+x = 10$
$k-x = 1$	$k-x = 2$	$k-x = 3$	$k-x = 4$	$k-x = 6$

קל להראות שרק מערכות המשוואות (2), (5) נותנות פתרונות שלמים. נפתור אותן:

(2)

$$\begin{aligned} k + x &= 30 \\ \underline{k - x} &\underline{= 2} \\ 2k &= 32 \\ k &= 16 \\ 2x &= 28 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} k + x &= 10 \\ \underline{k - x} &\underline{= 6} \\ 2k &= 16 \\ k &= 8 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

הפתרון של מערכת מס' (5) אינו הגיוני כי לפיה האב בן 24 והבן החמישי בן שנתיים.
התשובה היא אם כן:

האב בן 48 שנים והבנים בני 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26

ואכן,

$$2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + 14^2 + 17^2 + 23^2 + 26^2 = 2304 = 48^2$$