על חקירת בעיה גיאומטרית-אלגברית עם מספר תלמידים

מאת: א. רמתי

ברצוני לדווח בשורות הבאות על וויכוח שהתפתח עם כמה תלמידים בהמשך של בעיה גיאומטרית. יתכן שהוויכוח הזה ישמש דוגמא לחקירת בעיות לעומק על-ידי תלמידים טובים. התלמידים נהנו מגילוי הקשר בין מספר עובדות אלגבריות וגיאומטריות.

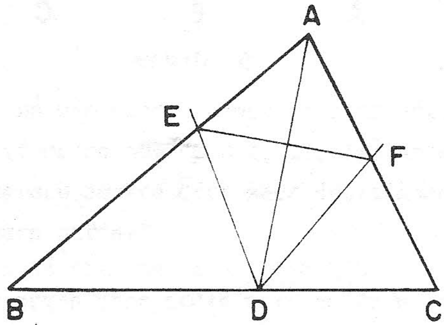
<u>בהתחלת הוויכוח עמדה בעית הבניה</u> שניתנה בבחינות תחרות במתמטיקה על הפרס ע"ש פרופ' גרוסמן ז"ל בשנת תשל"ג:

"נתון משולש כלשהו. תאר שיטת בניה (בעזרת סרגל ומחוגה) של משולש שווה-צלעות שכל אחד מקודקודיו נמצא על צלע אחרת של המשולש הנתון".

<u>הפתרון המוצע</u> על-ידי מחלקת ההוראה בטכניון היה:

"נסמן ב A את הזוית הגדולה במשולש. נעביר את חוצה הזוית AD. נקצה זויות של 30° $\sphericalangle$ ADE , $\sphericalangle$ ADF . המשולש EDF הוא המבוקש. (הנימוק: המשולשים AED ו AFD הם חופפים; לכן ΔEDF הוא המשולש שווה-שוקיים בעל זוית הראש 60°).

התנאי שהזוית A היא הגדולה במשולש מבטיח שנקודות E ו F תפולנה על הצלעות ולא על המשכיהן. (שרטוט מס' 1).

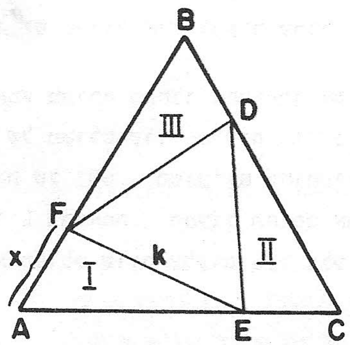


שרטוט 1

<u>חקירת הבעיה התעוררה</u> בהשוואת הפתרון המוצע הזה עם שאלה אלגברית גיאומטרית שניתנה במבחני בגרות (ריאלית) בשנת תשל"ז:

"במשולש שווה-צלעות ABC שאורך צלעו 12 ס"מ חסום משולש שווה-צלעות DEF שאורך צלעו k ס"מ. אורך הקטע AF הוא x.

הבע את x באמצעות k ובדוק עבור איזה ערכים של k קיים x יחיד המקיים את דרישות הבעיה או קיימים 2 ערכים של x המתאימים לה". (שרטוט מס' 2).



שרטוט 2

השימוש במשפט הקוסינוס באחד המשולשים החופפים I, II או III מוליך למשוואה הריבועית

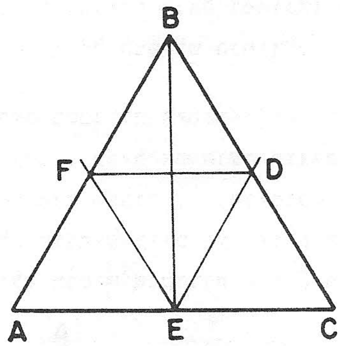
$$x^2 - 12x + 48 - \frac{k^2}{3} = 0$$

ומכאן:

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{\frac{k^2}{3} - 12}$$

לכן יש פתרון <u>אחד</u> לבעיה עבור: $k = 6$ ושני פתרונות עבור <u>כל</u> k בין 6 ל 12.

<u>הערה של תלמיד:</u> אפשר איפוא לחסום מספר גדול של משולשים שווי-צלעות בתוך המשולש שווה-צלעות הנתון. הבניה המוצעת הנ"ל נותנת את המקרה של פתרון אחד (שרטוט מס' 3), בו DF מקביל ל AC ושווה לחציו.



שרטוט 3

האם קיימת שיטה <u>לבנות</u> גם את שאר הפתרונות שמצאנו בדרך אלגברית? הכוונה היא למצוא שיטת בניה שאינה מבוססת על חפיפת המשולשים I, II, III שהיא טריויאלית ומתאימה רק למשולש שווה-צלעות. יתכן שגם במשולש כללי אפשר לחסום מספר משולשים שווי-הצלעות לכן נחפש שיטת בניה שמאפשרת הכללה.

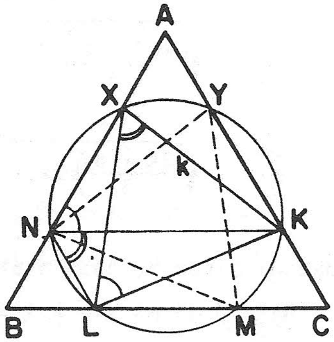
<u>תלמיד אחר</u> הציע לחקור את הבעיה בדרך כללית עבור משולש שווה-צלעות בעל צלע a. בדרך דומה לפתרון של המשולש בעל צלע 12 ס"מ הגענו לתשובה:

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{(4k^2 - a^2) : 3}}{2}$$

לכן יש פתרון אחד לבעיה עבור $k = \frac{a}{2}$ ושני פתרונות עבור <u>כל</u> $\frac{a}{2} < k < a$.

במאמץ משותף פתחנו אחרי-כך את הבניה הבאה (שרטוט מס' 4): בנקודה כלשהי N על הצלע AB של משולש שווה-צלעות BAC בעל צלע a, חילקו את הזוית השטוחה ANB לשלוש זויות שוות של $60°$. השוקיים החופשיות של הזויות האלו חותכות את הצלעות AC ו BC בנקודות K ו L בהתאמה. המעגל החוסם את המשולש LNK חותך את הצלע AB בנקודה X. המשולש KLX הוא משולש שווה-צלעות בעל צלע k $(\frac{a}{2} < k < a)$.

(הנימוק הוא שוויון הזויות ההיקפיות במעגל בהתאם לסימון בשרטוט מס' 4).



שרטוט 4

השוואת השרטוט עם תוצאת הבעיה האלגברית מלמדת:

$$BX = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{\frac{4k^2 - a^2}{3}}\right)$$

$$CK = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{\frac{4k^2 - a^2}{3}}\right)$$

הפתרון השני של המשוואה האלגברית הנ"ל עבור <u>כל</u> $k \neq \frac{a}{2}$ הוא **איפה המשולש** NMY, סימטרי למשולש KLX .

<u>בשאלת השאלה:</u> האם הצלחת הבניה בלתי-תלויה בבחירת הנקודה N **על אחת הצלעות?**

תלמיד אחר: כלומר יש לבדוק:

א. אם השוקיים החופשיות NK ו NL של הזויות ליד N תמיד **חותכות את שתי הצלעות** האחרות של המשולש.

ב. אם המעגל החוסם את המשולש LNK חייב לחתוך את הצלע AB **בנקודה שניה.**

<u>התשובה:</u> במשולש שווה-צלעות הבניה מקיימת את שני התנאים, כי:

א. לפי הבניה, זויות מתאימות ליד B ו N שוות $60°$

לכן NK || BC NK חותך את AC

כמו כן NL || KC NL חותך את BC

ב. מחישוב קל נובע כי AX = KC . כל אחד שווה

$$\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{\frac{4k^2 - a^2}{3}}\right)$$

לכן נקודת החיתוך השניה של המעגל עם AB נמצאת במרחק **השווה ל KC מן הקודקוד** A על הצלע AB .

<u>שאלה נוספת:</u> בבניה שבשרטוט מס' 4 **בחרנו בנקודה כלשהי** N (x = BN) **והגענו על-ידי** הבניה למשולש KLX בעל צלע k. האם יש אפשרות לקבוע מראש את **אורך הצלע** k ?

התשובה: הפתרון של כל משוואה ריבועית ניתן לבניה ע"י סרגל ומחוגה. במקרה שלנו x תלוי ב k על-ידי השוויונים:

$$\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{\frac{4k^2 - a^2}{3}}\right)$$

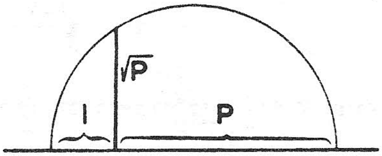
או:

$$= \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{\left(\frac{2k + a}{3}\right)(2k - a)}\right)$$

בביטוי הזה מופיעים חיבור, חיסור וכפל של קטעים והוצאת שורש ריבועי. לביצוע הבניה יש לבחור נוסף לקטעים a ו k קטע באורך היחידה. מכפלת שני הקטעים $(2k - a)$ ו $\left(\frac{2k + a}{3}\right)$ תבנה כפרופורציוני רביעי בפרופורציה:

$$\frac{1}{2k - a} = \frac{\frac{1}{3}(2k + a)}{p}$$

את השורש הריבועי מ p נבנה בצורה נוחה ביותר כגובה על היתר במשולש ישר-זוית, כאשר שני הקטעים של היתר הם p ו 1 (שרטוט מס' 5).



שרטוט 5

אחד התלמידים חוזר לשאלה המקורית: החקירה עד כה התיחסה למשולש שווה-צלעות. באיזו מידה היא נכונה עבור משולש כללי?

הגענו למסקנה: בניה מס' 1 נותנת פתרון בכל מקרה.
הבניה המתוארת במס' 4 מוסיפה מספר גדול של פתרונות גם עבור כל משולש כללי. אך יש הגבלות עבור בחירת הנקודה N . בדרך של הנדסה אנליטית (ארוכה מדי במסגרת הדווח הזה) חישבנו אומנם סביבות מסוימות על צלעות המשולש בהן כל הנקודות מתאימות לתנאי הבניה. במשולש כללי ABC לכל בחירה אפשרית של הנקודה N מתאים רק משולש שווה-צלעות בעל צלע k אחד. (שרטוט מס' 6) .

שרטוט 6