

רמזים בכתרון בעיה מילולית

מאת דוד בן חיים
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

חלק א': מתן בעיה מילולית + רמזים

קמטרה: לעמוד על גישות לפתרון, שגיאות וקשיים אופייניים וכמו כן לבדוק האם רמזים עוזרים? ואם כן, אילו רמזים עוזרים?
להלן נוסח הבעיה* כפי שניתן לתלמידים:

"על מנת למספר את כל העמודים של ספר עב כרס, הזדקקה הכתבנית ל-2989 הקשות במכונת הכתיבה. כמה עמודים בספר?"
השתדל לכתוב באופן מילולי את כל דרך המחשבה וכל פרט שאתה חושב עליו או מתקשה בו.

הרמזים הוכנו בצורת תלושים. כדי לעקוב אחרי חלוקתם, הודקו לדרך התלמיד וכך יש ביקורת על מספר הרמזים שחולקו, באיזה שלב ואם הם הובילו למחשבה נכונה בדרך לפתרון.

נוסח תלושי הרמזים (לפי סדר חלוקתם במידת הצורך):

1. הקשה במכונת כתיבה - הדפסת ספרה.
2. בכמה ספרות תשתמש הכתבנית להדפסת ספר שיש בו 9 עמודים ממוספרים?
3. כמה עמודים יש מ-10 עד 99?
- כמה עמודים יש מ-100 עד 999?
- 3א. כמה עמודים יש מ-10 עד 99? כמה הקשות דרושות?
- כמה עמודים יש מ-100 עד 999? כמה הקשות דרושות?
4. הרי לך עוד בעיה קרובה לבעיתך: בכמה ספרות תשתמש הכתבנית להדפסת ספר המכיל 99 עמודים ממוספרים?
5. הרי לך עוד בעיה קרובה לבעיתך: בכמה ספרות תשתמש הכתבנית להדפסת ספר המכיל 999 עמודים ממוספרים?

*הבעיה לקוחה מתוך הספר של ג. פואיה: כיצד פותרין? עמ' 178 "אוצר המורה" (1961).

הבעיה הנ"ל ניתנה ל-4 קבוצות תלמידים בבי"ס מקיף באיזור טעון טיפוח.
 קבוצה אחת מכיתה י"ב לבגרות הומנית (ברמה מאוד בינונית ודי הטרוגנית) - 20 תלמידים.
 קבוצה שניה מכיתה י' עיונית (ברמה יחסית מתחת לבינוני) - 16 תלמידים.
 קבוצה שלישית מכיתה ט' (המסלול א' של כיתות ט' בביה"ס הנ"ל) - 20 תלמידים.
 וקבוצה רביעית מכיתה ח' (רמת התלמידים היא כמו של הקבצה ב' במתמטיקה) - 28 תלמידים.

בנוסף לנוסח המצורף לבעיה, התבקשו התלמידים בע"פ, לכתוב מילולית כל דרך מחשבה וכל נסיון לפתרון (גם אם ראו לאחר מכן שהוא לא נכון, או לא מוביל לפתרון). כמו כן הוסבר להם, שלאחר כ-10 דקות תהיה אפשרות לקבל רמזים. הודגש שהרמזים אינם נותנים את הפתרון או חלק ממנו, אלא עשויים להוביל לדרך מחשבה אחרת, או להבהיר מילה מנוסח הבעיה. בכל הקבוצות, הוקדש שיעור אחד לבעיה הנ"ל, פרט לכיתה ח' שם הוקדשו כמעט 2 שיעורים (וזה כולל את ההסבר והניתוח בסוף).

באופן כללי, יש לציין שהיתה נכונות לשתף פעולה, לנסות לפתור את הבעיה ולהתיחס לדברים. אולם היה קושי בהגשת המידע על דרך החשיבה של התלמידים וכתיבה באופן מילולי (ואולי גם זה חלק מהבעיה - להתבטא, לכתוב, לצטט...). קושי חלקי נוסף היה הקושי הפסיכולוגי בקבלת רמזים (לפי מידת הצורך). מספר רב של תלמידים נמנע מלבקש רמזים או לקבלם, כי ראה בכך פחיתות כבוד. רק לאחר שמספר תלמידים בקבוצה, שהתקשו וקיבלו רמז זה או אחר ונראה היה לאחרים שהרמזים אינם מובילים לפתרון מידי, אז גם הם אזרו אומץ וביקשו רמזים (תופעה זו היתה אחידה לכל הקבוצות).

טבלת אינפורמציה

כיתה י"ב 20 תלמידים	כיתה י' 16 תלמידים	כיתה ט' 20 תלמידים	כיתה ח' 28 תלמידים	* % פותרים נכון	** % פותרים חלקית
25%	10%	5%	10%		
1	3	4	5	רמז מס' 1	מספר הרמזים שחולקו
1	5	7	12	רמז מס' 2	
10	5	7	16	רמז מס' 3	
	6	7	16	רמז מס' 3א	
3	4	10	6	רמז מס' 4	
	2	5		רמז מס' 5	

* גם אם קיבלו ונעזרו ברמז.

** כלומר החלו בדרך הנכונה ויש טעויות טכניות או הבנה חלקית (גם אם נעזרו ברמזים שונים).

הערות מענינות, קשיים שהתגלו וציטטות מעבודות התלמידים

- * "האם ספר מתחיל ב-20"
- * "הבעיה אינה מפורטת מספיק."
- * "הדבר המבלבל היא העובדה שיש רק נתון אחד".
- * "לא חשבתי על שום דבר, לא נראית לי כל דרך לפתור את הבעיה".
- * בלבול רב בין עמוד ודף - מספר תלמידים חילקו את 2989 ל-2 כי חשבו על דפים כעמודים. תלמיד כתב: "בספר 1494 עמודים ודף פתיחה".
- * אחד התלמידים פרק את המספר 2989 וכתב:
$$4 \times 2000 + 3 \times 900 + 2 \times 80 + 1 \times 9$$
 (כנראה חשב בדרך הפוכה!)
- * אחד התלמידים הוציא ספר ודפדף בו לראות את הסדר.
- * "2989 הקשות מקשה עלי, כיוון שאני לא יודע אם לכל עמוד היא נותנת הקשה או שלכל דף ובכלל לדעתי, לא נותנים מספיק נתונים בשאלה זו כדי לפותרה. אני לא יודע מה מסמלת כל הקשה או חלק מדף או מעמוד, או כל הקשה זו ספירת אחד העמודים. אחרי קבלת הפתק (רמז מס' 1) אז אם כל הקשה זו סיפרה אז יש בספר 2989 עמוד, כי עמוד לדעתי זה צד אחד של הדף ויש 1494 דפים.
- בפתק השני שקבלתי (רמז מס' 2) קשה להבין אם מ-10 עד 99 זה עמודים או דפים שלמים. לאחר שעיינתי בספר ומיספרתי את העמוד שמתי לב שכאשר אני מגיע לסיפרת העשרות אין רק סיפרה אחת אלא 2 ספרות. בטעותי הקודמת בעמוד מס' 11 שדמינתי חשבתי שהיא תרשום רק סיפרה אחת ואחר כך הבנתי שלכל מספר שעובר את היחידות יש יותר ספרות, ומכאן:
9 הקשות מסמלות 9 עמודים
11 הקשות מסמלות 10 עמודים
13 הקשות מסמלות 11 עמודים
21 הקשות מסמלות 15 עמודים"
והוא לא הספיק יותר.
- * התיחסות לספר עב כרס, כאשר אחד התלמידים כתב:
"כל נקישה הדפסת ספרה
במספר 2989 ספרת היחידות 9 היא 9 הקשות, 8 מספר המילים בשורה.

$9 \times 8 = 72$ שורות בעמוד. אם נכפיל אחד בשני יש 29 פרקים בספר. אם נכפילם נקבל

את מספר הדפים בספר

$$\begin{array}{r} \times 72 \\ 29 \\ \hline 648 \\ 144 \\ \hline 2088 \end{array}$$

אני מחלק לשניים מפני ששני עמודים זה דף.

$$\begin{array}{r} 1544 \\ 2088 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 88 \end{array}$$

בספר יש 1544 דפים וספר בעל 29 פרקים 72 שורות בכל דף ו-1500 דפים זה ספר עב כרט".

לאחר מכן קיבל 2 רמזים אבל המשיר באותה דרך מחשבה.

* ציטטה נוספת די אופינית: "אני מתקשה בזה שאינני יודעת איזו פעולה לעשות: חילוק, כפל, או חיבור חיסור".

* כמובן, היו נסיונות רבים לכתובת משוואות ולפתור בעזרת נעלמים:

$$x + 2x + 3x = 2989$$

$$9x + 90x + 900x = 2989$$

$$9 + 99 + 900 + x = 2989$$

* להלן ציטטה מאחת העבודות והשנוי שבא בעקבות הרמזים:

"הדבר הראשון עליו אני חושבת הוא: מה יבטא ה-x שלי. מכיון שבדרך כלל ה-x הוא התשובה על השאלה. אני אקח גם קביעה זאת x עמודים בספר. פה פתאום מתעוררת לי הבעיה מה זה למספר עמודים האם זה מספר של כל עמוד שהכתבנית כתבה או משהוא אחר. עתה מובן לי שבנתונים שיש לי עכשיו אי אפשר לעשות כלום ואני בוחרת עוד משתנה y - שוב (פה מתעוררת הבעיה מה בדיוק יבטא y) לדעתי זה צריך לבטא כמה הקשות עושה הכתבנית בשניה, בדקה או משהו אחר. ופה אני חושבת אפשר כבר להתחיל לחבר משוואה. יש כבר מספיק נתונים והמשוואה שאני חושבת מתקבלת פה היא

$$x:y = 2989$$

כלומר מספר העמודים לחלק להקשות בשניה יתן לנו את מספר ההקשות שלהם נזדקקה הכתבנית. אבל למשוואה כזאת אין פתרון ופה אני לא יודעת מה לעשות. (כאן קבלה רמז מס' 2, שלא קידם אותה ולאחר מכן רמז מס' 3 א').

הפתקה גורמת לחשוב בכיוון אחר, שכדי למספר עמוד אחד הכתבנית זקוקה לשתיים, שלוש או יותר הקשות ולפעמים רק הקשה אחת. אז עד תשע הקשה אחת ופה אפשר סתם לחשב עד 9 עמודים 9 הקשות.

מ-9 עמודים עד 99, 178 הקשות"

וכן הלאה בתהליך חשיבה נכון (עם קצת שגיאות חשבוניות).

* להלן דוגמא לתרומת הרמז מס' 5

ציטטה מעבודתה של תלמידה: "בכמה מספרים בני 1, 2 או 3 ספרות ימספרו את הספר?

9 מספרים בני ספרה 1

99 - 10 = 90 מספרים בני 2 ספרות

x מספרים בני 3 ספרות.

צריכים להיות לפחות 100 עמודים והשאר בני 3 ספרות, אבל לא יודעים כמה.

תבנית אחת צריכה להיות סכום הספרות, שמהוות את המספר והתבנית השניה צריכה להיות

מספר העמודים.

$$9 + (90 \cdot 2) + (x \cdot 3) = 2989$$

$$9 + 180 + 3x = 2989$$

$$3x = 2989 - 189$$

$$x = 933 \frac{1}{3} - \text{מאיפוא השבר? אולי גם בני 4 ספרות?}$$

9 - בני סיפרה 1

90 - בני 2 ספרות

x - בני 3 ספרות

y - בני 4 ספרות

$$9 + 180 + 3x + 4y = 2989$$

לא נכון, מה התבנית השניה?

כאן פתק (רמז מס' 5) גורם לי לדעת שיש $999 - 100 = 900$ מספרים בני 3 ספרות"

ומכאן פתרה נכון.

התלמידה התבקשה לעשות בדיקה: יש לי ספר של 1024 עמודים, כמה הקשות דרושות?

והיא ידעה יפה!

* אחד התלמידים (שפתר נכון) ציין שמילת המפתח בבדיקה היא המילה למספר.

* להלן העתק הדף של תלמיד שפתר נכון וכתב את דרך החשיבה:

"הבעיה היא כיצד להשיג נתונים שיעזרו בלי משתנים, כלומר 9 עמודים יש תשע הקשות

ומכאן ועד מאה יש שתי הקשות לכל עמוד. כלומר עד עמוד 99 יש $189 = (99 - 9) \cdot 2 + 9$

ממאה ומעלה יהיו שלוש הקשות על כל עמוד. עכשיו צריך להחסיר את מספר ההקשות

מתחת ל-100 עמודים.

$$2800 \text{ הקשות} = 189 - 2989 \text{ הקשות}$$

עתה צריך להחסיר ממספר העמודים 999 למספר העמודים עד עמוד מאה. כך נוכל לדעת

את מספר העמודים שצריכים לקבל 3 הקשות.

$$900 \text{ הקשות} = 99 - 999$$

את 900 העמודים מכפילים ב-3 הקשות לכל עמוד. $900 \times 3 = 2700$

מחסירים עתה את מספר ההקשות שנותרו ממאה עמודים = 2800

$$2800 - 2700 = 100$$

עתה פונים אל האלפים שבהם 4 הקשות $2700 + 100 = 2989$

$$\frac{1}{9} \quad \frac{10}{90} \quad \frac{100}{900} \quad \frac{1000}{25} = \quad 100 : 4 = 25$$

עכשיו צריך לחבר את מספר העמודים:

מספר העמודים הוא 1024 עמודים.

סדרת השאלות ששאלתי את עצמי?

א. עד איזה עמוד יש הקשה אחת לכל עמוד?

ב. עד איזה עמוד יש שתי הקשות לכל עמוד?

ג. עד איזה עמוד יש שלוש הקשות לכל עמוד?

ד. מה כמות ההקשות עד עמוד 99?

ה. מה כמות ההקשות עד עמוד 999?

ו. כמה הקשות נותרו לאחר עמוד 999?

ז. כמה עמודים של 4 הקשות לכל עמוד יש לאחר המספר 999?

* במספר מקרים, כאשר תלמידים פתרו נכון ונשאר זמן הם קבלו שאלה הפוכה כגון:

"נתון לך ספר ובו 4357 עמודים. כמה הקשות דרושות?"

יש לציין שרק במחצית המקרים התקבלו תשובות נכונות ואילו בשאר היה חוסר הבנה ובלבול רב.

* מספר ההקשות בבעיה - 2989 הוכיח את יתרונו הן כאשר התלמידים חילקו אותו ל-2

בעקבות הבלבול בין דפים - עמודים (נשארה שארית) והן כאשר כבר הבינו שיש עמודים של ספרה אחת ועמודים של 2 ספרות וניסו לחלק את השארית ל-3 (כי שכחו שיש גם מספרים בני 4 ספרות) ואז אין התחלקות ללא שארית.

לאחר שהתלמידים סיימו לעסוק בבעיה הראשונה וקבלו הסבר מתאים בעקבות עבודתם, נשאלה השאלה האם יצליחו לפתור בעיה אנלוגית.

להלן נוסח הבעיה מס' 2, כפי שניתן לתלמידים.

בעיה מס' 2 "נרשום את כל המספרים הטבעיים לפי סדר זה על-יד זה, ללא רווחים, החל מהמספר 1.
 (1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 0 1 1 1 2 1 3 1 4 1 5 1 6 1 7 1 8 1 9 2 0 2 1...)
 מהי הספרה שתופיע במקום ה-5000?"
 השתדל לכתוב באופן מילולי את כל דרך המחשבה וכל פרט ופרט, שאתה חושב עליו, או מתקשה בו.

לבעיה מס' 2 לא הוכנו רמזים מילוליים, אבל היה מעקב אחר הגישות השונות, דרך הפתרון וקשיים שנתקלו בהם התלמידים. בעיקר היה ענין לבדוק אם התלמידים גילו אנלוגיה לשאלה הקודמת (ע"י כך שאמרו, או כתבו, או הלכו בדרך דומה).

בד"כ, בעיה מס' 2 הועברה כ-4 ימים עד שבוע אחרי הבעיה הראשונה והוקדש לכך בכל מקרה כשעור שלם. הבעיה הועברה ב-3 קבוצות (כיתה ח', י', י"ב) ולא הועברה בכיתה ט' מאחר וזה היה סמוך לסוף שנה"ל.

הערה: לאחר מעשה, חשבתי שהכותרת בעיה מס' 2 שימשה רמז לקשר לבעיה הראשונה או לאותו נושא, אך לא נראה לי שחלק מהתלמידים חשב על כך. כמו כן נראה לי שהסוגריים בנוסח המקורי ובהם כתובים המספרים הטבעיים לפי סדר ואפילו עד 21 שימשו כרמז.

טבלת אינפורמציה

כיתה י"ב	כיתה י'	כיתה ח'	
50%	40%	30 - 35%	% התלמידים שגילו אנלוגיה באופן ברור
40%	40%	50%	% התלמידים שלא גילו אנלוגיה

אצל שאר התלמידים לא ברור אם גילו או לא גילו אנלוגיה.

אנו יכולים לראות מהחלוקה הנ"ל, שגילוי האנלוגיה או הליכה בדרך האנלוגית פוחתת ככל שהכיתה יותר נמוכה. כמובן, שזה אמור לגבי המקרה המיוחד הנ"ל ואולי זו אחת הנקודות לבדיקה.

הערות וציטטות מעבודות התלמידים

* יש להדגיש, שגם אם התלמידים גילו אנלוגיה ברורה לשאלה הקודמת, הרי עדיין רק כמחציתם (של אלו שגילו אנלוגיה) פתרו נכון ואילו האחרים שגו שגיאות טכניות דומות לאלו שהיו בפתרון הבעיה הקודמת, כגון: מס' המספרים בכל תחום, שגיאות בפעולות חשבוניות, או נסיון לפתור בעיה הפוכה. חלק מהתלמידים כתב במפורש שהשתמש בידע מהפעם הקודמת.

* "כמו בבעיה הקודמת יש לנו עד למספר 9, 9 ספרות. מהמספר 10 עד למספר 99, יש לנו 90 מספרים וכל אחד כפול 2, לכן יש לנו 180 ספרות. מהמספר 100 עד למספר 999, יש לנו 900 מספרים שהם 2700 ספרות. מהמספר 1000 מתחילים 4 ספרות בכל מספר. מ-1000 עד ל-1999 יש לנו 1000 מספרים בהם 4000 ספרות, נוסף 4000 ספרות ואז נגיע ל-2999. נוסף עוד 4000 ספרות נגיע ל-3999. נוסף עוד 4000 נגיע ל-4999 ואז נוסף עוד 4 ספרות שזה המספרים 5000 ונגיע למספר הסופי:

$$" \quad 18,893 = 4 + 16,000 + 2700 + 180 + 9$$

* "אני לא מבינה את נוסח השאלה ומה בעצם שואלים. יכול להיות שזה דומה לבעיה הקודמת. עשיתי כמה נסיונות, אבל פה נתקעתי. אני לא יודעת איך להמשיך, כי אם ממשיכים באותה דרך יוצא יותר מדי:

$$1 - 9 = 9 \quad \text{מקומות}$$

$$9 - 100 = 90 \quad \text{מקומות}$$

$$100 - 999 = 900 \quad \text{מקומות}$$

ההמשך צריך להיות כמו שבבעיה הקודמת, אבל אני לא זוכרת את הבעיה הקודמת".

* קשיים ב: מה זה המקום ה...?, מה זו ספרה? ומה זה מספר?.

* "מטריד אותי מדוע ביקשו למצוא את הספרה שתופיע במקום ה-5000 ולא את מס' הספרות המופיעות מ-1 עד 5000".

* הפעם, בלטה מאוד התופעה שהרוב כבר לא ניסה ללכת בדרך של מציאת נוסחה, או שמוש בנעלמים, אבל כמובן היו אחדים שכך ניסו:

$$" \quad 5000 = 4x + 90 + 9 \quad \text{וכו'}$$

* להלן העתק הדף של תלמיד שפתר נכון:

$$" \quad 1 - 9 \quad \text{ישנן 9 ספרות.}$$

$$10 - 99 \quad \text{ישנן 180 ספרות.}$$

$$100 - 999 \quad \text{ישנן 2700 ספרות.}$$

$$\begin{array}{r} 5000 \\ - 2889 \\ \hline 2111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 527 \\ 2111 \overline{)4} \\ \underline{20} \\ 11 \\ \underline{8} \\ 31 \\ \underline{28} \\ 3 \end{array}$$

$$999 + 527 = 1526$$

מספר זה הוא לפני המספר הבא. מכיוון שמהמספר 1527 כתוב רק $\frac{3}{4}$ ממנו אז 2 היא הספרה שלישית ונמצאת במקום ה-5000. בשאלה זו היה קשר לשאלה הקודמת כאשר בתוך השאלה יש כבר נתונים.

* הופתעתי מכך שלמרות שהספרה המבוקשת היא לא בסופו של מספר (ארבע ספרתי) אלא ב $\frac{3}{4}$ ממנו, זה לא גרם קשיים למי שהגיע לשלב הזה.

* תלמידים שפתרו במהירות, (כדי לוודא שאכן הבינו היטב וכן כדי להעסיקם) קבלו שאלה נוספת כגון: מהי הספרה שתופיע במקום ה-10000 או במקום ה-20000? וברוב המקרים אכן פתרו נכון ומהר. אבל, לשאלה נוספת הפוכה בנוסח: באיזה מקום תופיע הספרה השלישית במספר 5487? במרבית המקרים היו קשיים.

א. אין להתעלם מהקושי האובייקטיבי של התלמידים בכתיבת דרך מחשבה ודרך פתרון באופן מילולי.

ב. התופעה הראשונית הבולטת, היתה קביעת משתנים וזיווגם ללא כל משמעות וזה קשור לגישה הסטרייטיפית ולהרגלים לא טובים בגישה לפתרון בעיות.

ג. לגבי הרמזים - קשה לקבוע חד משמעית בקבוצות שעבדו ולאור הנסיון המצומצם הנ"ל אם הם עוזרים או לא. היו קבוצות של תלמידים שהרמזים הובילו אותם לתשובה הסופית (לא רבים) והיו קבוצות של תלמידים שהרמזים רק שינו את גישתם אבל לא באופן מכריע (די רבים במספר). לגבי קבוצה אחרת של תלמידים הרמזים היוו שאלה מילולית נוספת ואו שנתקעו בה או שהתגברו עליה וזהו (ללא המשכיות), כאלו היו רבים.

לדעתי יש מקום לבדוק בצורה הרבה יותר יסודית וסטטיסטית, אם הרמזים יכולים לשמש כעזר או כשיטה התחלתית וכמו כן אילו רמזים צריכים להיות? (על החלק המילולי, על החלק המתמטי, או על המבנה).

התברר שרמז מס' 3 (או 3 א') הנותן את גבולות המספרים הדו ספרתיים והתלת ספרתיים - הוא רמז מפתח.

הערה: לאחר העברת חלק ב', בו השאלה האנלוגית היתה ללא רמזים, חשבתי שהרמזים נותנים לפחות לחלק מהתלמידים תעסוקה בנושא השאלה, או עבודה על חלקים מהשאלה. יש לי הרגשה שזה עשוי לעזור לתלמידים חסרי האונים, אשר ללא רמזים עלולים למסור דף ריק. כך לפחות, הם עובדים על שאלות קלות יותר ובכל זאת יהיה להם סיפוק מהפתרונות החלקיים.

ד. זה היה נסיון מעניין שנבע מהצורך לצאת מהשגרה במתן בעיות לכיתות והצביע על הצורך של התלמידים לקבל שאלות לא שגרתיות (לגבי החומר השוטף) ובפרט כאלו הדורשות מחשבה ולא סתם הצבה בנוסחה וכדומה.

ה. אשר לנתונים הסמויים בבעיות הנ"ל: כאשר תשומת לב התלמידים הוסבה לכך (לאחר הדיון על דרך הפתרון) היתה די הפתעה לגבי מספר הנתונים הסמויים שעליהם אפשר להצביע וצריך לחשוב. לשם גילוי הנתונים הסמויים דרוש נסיון קודם כגון: מפגש עם ספרים ממוספרים, סדר המספרים הטבעיים, מספרים חד-ספרתיים, דו-ספרתיים וכו'. כמוכן שהרמזים בבניה הראשונה היו מכוונים לכך.