סיפור $\sqrt{2}$

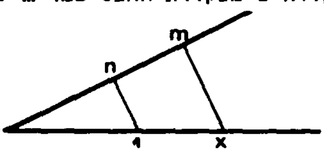
מאת: עדנה אטקין
מכון ויצמן למדע, רחובות

ראשית הדרך

הנסיון לפתור בעיות גאומטריות תוך שימוש במספרים הרציונליים בלבד הביא למשבר הראשון בהסטוריה של המתמטיקה. שתי בעיות פשוטות יחסית - קביעת אורך האלכסון של רבוע והקף מעגל הביאו לגילוי קיומם של "יצורים" מתמטיים חדשים אשר לא נמצא להם מקום בתחום המספרים הרציונליים - היינו באוסף כל המספרים הניתנים לכתיבה כמנה של שני מספרים שלמים.

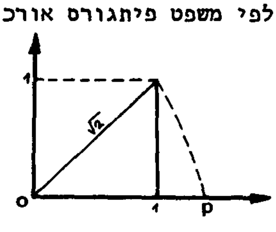
אם נבטא את התופעה בשפה המתמטית המקובלת היום הרי הקושי שהתעורר, מקורו באי השלמות של קבוצת המספרים הרציונליים במובן הבא: הפעלת ארבע פעולות החשבון על המספרים הרציונליים אמנם לא מוציאה אותנו מתחומם (לאלה המכירים את המושג, נזכיר כי המספרים הרציונליים מהווים שדה), אולם פתרון המשוואה $x^2 - 2 = 0$, דהיינו המספר $\sqrt{2}$, איננו מספר רציונלי, כפי שנוכיח בהמשך.

לאי השלמות של קבוצת הרציונליים יש גם ביטוי גאומטרי. נתאים לכל מספר רציונלי נקודה על ישר המספרים באופן שלמספר הרציונלי $\frac{m}{n}$ תותאם נקודה (x) שמרחקה מנקודת האפס יתיחס למרחק של הנקודה 1 מנקודת האפס כמו m ל-n.



בעזרת התאמה זו ובעזרת מושג החפיפה הגאומטרי נוכל למדוד אורכים של קטעים מסוימים במישור. זאת כי מדידת אורך קטע היא בעצם מציאת היחס בין שני קטעים: בין הקטע הנמדד לבין יחידת המידה. ואם רוצים למדוד יחס בין שני קטעים חייבים למצוא מידה משותפת, כלומר קטע המוכל בכל אחד מהקטעים הנתונים מספר פעמים שלם. מאחר ואוסף כל הנקודות המתאימות למספרים רציונליים הוא צפוף, נראה היה כי כל הנקודות על הישר הן רציונליות.

נבחן נקודה אחת מתוך הנקודות שעל הישר. נקצה על הישר את קטע היחידה, נבנה עליו רבוע ונעביר את האלכסון. לפי משפט פיתגורס אורכו של האלכסון הוא $\sqrt{2}$.



נקצה עתה על ציר המספרים, ימינה מנקודת האפס, קטע OP באורך האלכסון. האם הנקודה P מתאימה למספר רציונלי? בהמשך נוכיח שלא קיים מספר רציונלי המתאים לנקודה P על ישר המספרים. מכאן שמערכת המספרים הרציונליים איננה מכסה את כל ציר המספרים; קיימים "חורים" ובהם נמצאים המספרים האי-רציונליים.

הוכחות לאי הרציונליות של $\sqrt{2}$

להבדיל ממספרים רבים שאי הרציונליות שלהם עדיין לא הוכחה, הרי הוכחות לאי-רציונליות של $\sqrt{2}$ היו ידועות כבר מקדמת דנא. על פי טבעו של המספר האי-רציונלי, ההוכחות כולן בדרך השלילה.

א. ההוכחה המקובלת ביותר היום מקורה בזמן העתיק, והיא מיוחסת לפיתגורס. קל לראות שלא קיים מספר שלם שרבועו 2. כדי להוכיח בדרך השלילה את העובדה ש $\sqrt{2}$ מספר אי רציונלי, נניח שהוא מספר רציונלי ולכן ניתן להצגה בצורת שבר $\frac{a}{b}$. או, במלים אחרות המשוואה $a^2 = 2b^2$ פתירה עבור a,b שלמים, כאשר $(a,b) = 1$ (כלומר, a ו b זרים או אין להם מחלק משותף) ו $b \neq 0$. לפיכך, a^2 זוגי ולכן גם a מייצג מספר זוגי, שנוכל לכתוב בצורה $a = 2c$; אזי

$$a^2 = 4c^2 = 2b^2 \qquad \text{או} \qquad 2c^2 = b^2$$

ומכאן שגם b זוגי, בסתירה להנחה ש $(a,b) = 1$. אי לכך, לא קיים מספר שלם או שבר שרבועו 2.

ב. את ההוכחה האחרונה ניתן להציג בצורה שונה קצת, כך:
נניח שוב שלמשוואה $a^2 = 2b^2$ פתרון ל-b, a שלמים וזרים. מזה נסיק ש b מחלק של a^2 (או באופן כללי קיים מספר שלם כלשהו c, כך ש-$a^2 = bc$).
עתה תתכנה שתי אפשרויות: $b \neq 1$ או $b = 1$. אם $b \neq 1$ ואם p גורם ראשוני של b, אזי p יהיה גם גורם ראשוני של a^2, ולכן יהיה p מחלק של a. אך זו סתירה להנחה ש $(a\ ,b) = 1$ ולכן לא יתכן $b \neq 1$.
אם $b = 1$ יתקבל $a^2 = 2$, כלומר 2 הוא הרבוע של המספר השלם a - וגם זה לא יתכן.
הגענו שוב לסתירה שנבעה מההנחה ש $\sqrt{2}$ מספר רציונלי.

ההבדל בין שתי ההוכחות הללו הוא שבראשונה הגענו מהשויון $a^2 = 2b^2$ אל התחלקות a^2 במספר נתון, 2, והשתמשנו בעובדה שאם a^2 מתחלק ב 2 אזי גם a מתחלק ב 2. לעומת זאת, בדרך השניה הגענו מהשויון $a^2 = 2b^2$ אל התחלקות a^2 במספר כלשהו, b.

הוכחה זו היא כללית ובדרך דומה ניתן להוכיח את המשפט שלמשוואה $x^n = a$ אין פתרונות רציונליים, כש-a איננו חזקה n-ית שלמה של מספר רציונלי כלשהו.

<u>$\sqrt{2}$ בעת החדשה</u>

הסקרנות המתמטית המשיכה להנהיג ולגרות מוחות רבים בכל הדורות, לחקור ולמצוא דרכים נוספות להוכחת אי הרציונליות של $\sqrt{2}$. גם בימינו אנו עולות הוכחות נוספות לכך, והרי אחדות מהן:

ג. נניח שוב ש $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, כאשר a ו b מספרים שלמים וזרים, אזי קיים $a^2 = 2b^2$.

מאחר שכל מספר ניתן להצגה כמכפלת גורמים ראשוניים הרי שבמשוואה זו יש לתבנית המספר שבאגף שמאל מספר זוגי של גורמים ראשוניים, (כל גורם ראשוני של a מופיע פעמיים בa^2) ואילו לתבנית המספר שבאגף ימין מספר אי-זוגי של גורמים ראשוניים (כי b^2 שגם לו מספר זוגי של גורמים ראשוניים, נכפל ב-2), לכן הגענו לסתירה.

ד. הוכחה נוספת מבוססת על עיון בספרה האחרונה של מספר שלם.

שוב נניח ש $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ מספר רציונלי, a ו b שלמים וזרים. נרשום אם כן

$$2b^2 = a^2$$

כיוון ש b^2 (וכך גם a^2) הוא רבוע, ספרתו האחרונה יכולה להיות אחת מהספרות 0, 1, 4, 5, 6 או 9. לכן יסתיים המספר $2b^2$ באחת מן הספרות 0, 2 או 8. אך $2b^2$ (השווה ל a^2) איננו יכול להסתיים, בספרות 2 ו 8, לכן ספרתו האחרונה של $2b^2$ חייבת להיות 0. לפיכך תהיה הספרה האחרונה של b^2 0 או 5 וזו סתירה להנחה ש a ו b זרים.

ה. דרך הוכחה כללית ותמציתית היא הדרך הבאה:

נוכיח את הטענה שעבור כל n שלם וחיובי $\sqrt{n}$ הוא מספר שלם או אי רציונלי.

נניח ש $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, כאשר n, a, b שלמים חיוביים ו $(a, b) = 1$ לפיכך גם $(a^2, b) = 1$.

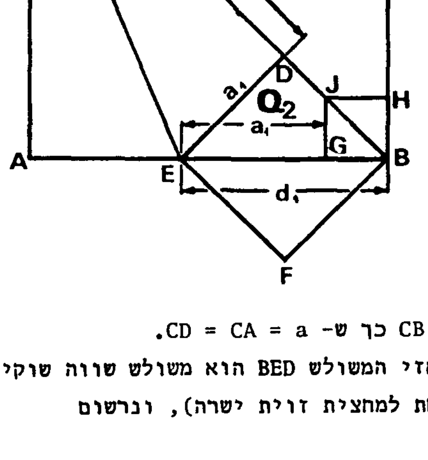
אזי $\frac{a^2}{b} = a\sqrt{n} = bn$. אך bn מספר שלם, ולכן $\frac{a^2}{b}$ מספר שלם וכיוון ש $(a, b) = 1$ חייב להתקיים $b = 1$, כלומר n (שלפי הנחתנו $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$) הוא מספר שלם.

המסקנה היא ש $\sqrt{n}$ איננו יכול להיות מספר רציונלי שאינו שלם. לכן אם איננו שלם הוא חייב להיות אי רציונלי.

הוכחה גאומטרית

גישה אלטרנטיבית להצגת $\sqrt{2}$ כמספר אי רציונלי, שהיתה ידועה בימים קדמונים, מבוססת על ההוכחה שהצלע של רבוע ואלכסונו הם חסרי מידה משותפת. נזכיר כי היחס בין שני קטעים הוא מספר רציונלי אם ורק אם יש לקטעים אלה מידה משותפת. לפיכך, זוגות קטעים חסרי מידה משותפת, היחס ביניהם הוא אי רציונלי.

נתון רבוע Q_1 שצלעו a; נניח שקיימת מידה משותפת ε לצלע a ולאלכסון d של הרבוע הנתון, כלומר



$$d = n \cdot \varepsilon \qquad (1)$$

$$a = m \cdot \varepsilon$$

כאשר n, m שלמים

עתה נקצה את הצלע CA (ראה שרטוט) על האלכסון CB כך ש- CD = CA = a.

הניצב ל-BC בנקודה D חותך את הצלע AB ב-E. אזי המשולש BED הוא משולש שווה שוקיים וישר זוית (זאת כי הזויות ב-E ו-B שוות כל אחת למחצית זוית ישרה), ונרשום $BD = ED = a_1$.

היות והמשולשים AEC ו EDC חופפים הרי גם $AE = a_1$.
נסמן את EB ב-d_1 קטע זה הוא האלכסון של הרבוע BDEF הנוצר ע"י שקוף המשולש EBD ב-EB.
מכאן, על-סמך ההנחה (1),

$$a_1 = d - a = (n - m)\cdot\varepsilon = m_1\varepsilon \qquad (2)$$

$$d_1 = a - a_1 = (2m - n)\cdot\varepsilon = n_1\varepsilon$$

מאחר ש $a_1 < a$ ו $d_1 < d$ הרי עבור השלמים m_1 ו n_1 קיים $m_1 < m$ ו $n_1 < n$.
אולם a_1 ו d_1 הם הצלע והאלכסון של רבוע קטן יותר, Q_2. לפי משוואות (2) יש לצלע ולאלכסון של Q_2 יחידת מידה משותפת, ε, אם מידות קטנות יותר m_1 ו n_1.
מרבוע Q_2 זה נוכל להגיע לרבוע נוסף, Q_3, על-ידי כך ששוב נקצה את הצלע על האלכסון, נבנה את האנך, וכו'. כך נקבל את הרבוע Q_3 שקודקודיו B, G, J, H. ברור כי התהליך יכול להמשך ככל שנרצה.

בדרך זו אנו מקבלים סדרה אינסופית של רבועים בעלי צלעות ההולכות וקטנות ברציפות $Q_1, Q_2, Q_3\ldots$.
ε תהיה מידה משותפת לכל הרבועים האלה. לעומת זאת במעבר מ- Q_i ל- Q_{i+1}, כמו במעבר מ-Q_1 ל-Q_2, יחידות המספרים m_i ו n_i הולכות וקטנות. מאחר ש m ו n וכל יחידות המספרים האחרות m_i ו n_i חייבים להיות שלמים חיוביים, הגענו לסתירה. כי מכסימום אחרי m (או n) צעדים יתאפסו m_i ו n_i בעוד שתהליך יצירת הרבועים ההולכים וקטנים יכול להמשך ללא גבול. לכן, ההנחה על מידה משותפת היתה בלתי נכונה.

דרכי חישוב וקירוב

במרוצת הזמן, אף לאחר שהוכח כי $\sqrt{2}$ איננו רציונלי, היו ודאי בין הפיתגוריאנים כאלו שלא אפסה תקוותם למצוא ערך רציונלי עבור $\sqrt{2}$ ומספרים אי רציונלים אחרים. המספר 2, למשל, ניתן להצגה בדרכים אין ספור כשבר שמכנהו רבוע שלם:

$$\frac{2}{1} = \frac{8}{4} = \frac{18}{9} = \frac{32}{16} = \frac{50}{25} = \frac{72}{36} = \frac{128}{64} = \frac{200}{100} = \ldots$$

עדיין נמצאו אשר האמינו שאם $\sqrt{2}$ רציונלי הרי כשנלך "רחוק" מספיק נמצא לבסוף שבר שגם מונהו רבוע שלם. בזה כמובן נכשלו מאמינים אלה, אלא כתוצאת לוואי קיבלו קירוב טוב ל $\sqrt{2}$

ואכן, אם נרשום $2 = \frac{288}{144}$ ונשים לב לעובדה ש $\frac{289}{144} = (\frac{17}{12})^2$
אזי יתקבל המספר $1\frac{5}{12}$ כקרוב ל $\sqrt{2}$ והוא הקרוב של תאון (Theon) אשר שונה מהערך האמיתי בפחות מאשר $\frac{1}{7}$ האחוז.
אולי ינסה הקורא את כוחו וימצא קרוב טוב יותר מתוך הסדרה הזו?

דרך הקירוב העשרוני

כדי לקבל קירוב עשרוני ל-$\sqrt{2}$, אנחנו בונים שתי סדרות מספרים אשר הולכים ומתקרבים ל $\sqrt{2}$

13

נתחיל באי השוויונות $1 < \sqrt{2} < 2$

כשנחשב את חזקתו השניה של כל אחד מהמספרים נקבל כי

$$1 < 2 < 4$$

עתה נבדוק האם הנקודה המתאימה ל- $\sqrt{2}$ קרובה יותר ל-1 או ל-2. כשנחשב את החזקה השניה נווכח ש-

$$2 < 1.5^2$$

או $\sqrt{2} < 1.5$

ומכאן: $1 < \sqrt{2} < 1.5$

נבדוק עתה האם $2 > 1.4^2$

או $\sqrt{2} > 1.4$

ונמצא כי $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

ניתן להמשיך ולמצוא קירוב טוב יותר על-ידי מציאת עוד ספרות עוקבות כך שאם נוסיף אותן כספרה שניה אחרי הנקודה העשרונית, נקבל פעם מספר שחזקתו השניה גדולה מ-2 ופעם מספר שחזקתו השניה קטנה מ-2.

בשלב שני נמצא $1.41^2 < 2 < 1.42^2$

לכן $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

בצעד הבא נמצא $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$

וכך הלאה, ובאופן כללי נמצא קירובים x_k כך ש

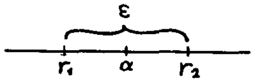
$$x_k < \sqrt{2} < x_k + 10^{-k} \quad \text{עבור} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

x_k יהיה קרוב ל-$\sqrt{2}$ עם שגיאה קטנה מ- 10^{-k}. אם, למשל, נחשב את המספר העשרוני המתאים ל-$\sqrt{2}$ עד 6 ספרות אחרי הנקודה, נקבל כי

$$1.414213 < \sqrt{2} < 1.414214$$

וכשנמשיך בקרובים העשרוניים נראה כי אורך האלכסון של רבוע היחידה הוא שבר עשרוני אינסופי ולא מחזורי, כשמו העשרוני של כל מספר אי רציונלי.

שיטת קרוב זו ל $\sqrt{2}$ מדגימה משפט כללי האומר: לכל מספר אי רציונלי α ולכל מספר ממשי $\varepsilon > 0$ קיימים שני מספרים רציונליים r_1, r_2 המקיימים $r_1 < \alpha < r_2$ ו $r_2 - r_1 < \varepsilon$.
r_1 ו r_2 יקראו "קרובים רציונליים ל-α".



<u>קרוב לאי רציונלים על-ידי רציונלים</u> (דרך הממוצע)

שיטה מענינת לקבלת סדרת רציונלים המתכנסת לרבוע של מספר כלשהו כגבול, תוארה ע"י הרון (Hero) מאלכסנדריה שחי במאה הראשונה לפנה"ס. אלגוריתם זה מבוסס על שני רעיונות עיקריים:

נניח ש-N, q, p הם שלושה מספרים חיוביים כך ש- $pq = N$, אזי או ש- p ו q שווים ואז הם שווים ל $\sqrt{N}$ או שהאחד גדול והשני קטן מ- $\sqrt{N}$. $\sqrt{N}$ מוכל בין שני מספרים p ו q כאלה. למשל $\sqrt{2}$ נמצא בין 1 ו 2.

הממוצע האריתמטי בין p ו- q הוא קרוב יותר טוב ל $\sqrt{N}$ מאשר p או q. לפיכך, קרוב טוב יותר ל- $\sqrt{2}$ הוא הממוצע בין 1 ו 2 שהוא $\frac{3}{2}$. אם כך, כדי לחשב בקרוב את $\sqrt{N}$, נמצא תחילה קרוב ראשון p_1, נחשב את $q_1 = \frac{N}{p_1}$, והממוצע האריתמטי של שניהם, $P_2 = \frac{1}{2}(p_1 + q_1)$ שיהיה הקרוב מסדר שני. כך הלאה נחשב את p_3 וכו'. נקבל שתי סדרות של מספרים רציונליים $\{p_i\}$ ו $\{q_i\}$ $i = 1, 2, 3...$ השואפות לאותו גבול, $\sqrt{N}$, אך האחת מ"למטה" והשניה מ"למעלה".

ובאשר לעניננו, הקרוב ל- $\sqrt{2}$, הרי שקרוב ראשון יהיה $\frac{3}{2}$, הקרוב השני הוא

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$$

וקרוב שלישי $$\frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{577}{408}$$

וככל שנמשיך נתקרב יותר למספר האמיתי. ואמנם, זהו קרוב טוב, כאשר

$$\frac{577}{408} = 1.414215 \ldots \quad \text{ו} \quad \sqrt{2} = 1.414213 \ldots$$

<u>דרך השבר המשולב</u>

המתמטיקאי, האסטרונום והמשורר הפרסי עומר קאיים (חי במאה ה-. שהגיע למושג השבר המשולב, כאשר עסק באלגוריתם של אוקלידס.

שיטת קירוב נוספת היא הדרך של השבר המשולב. שוב, נתחיל בקירוב

$$1 < \sqrt{2}$$

לכן $$\sqrt{2} = 1 + r \qquad (\text{ג})$$

ואחר העלאה ברבוע $$(1 + r)^2 = 2$$

או $$2r + r^2 = 1$$

כלומר $$r(2 + r) = 1$$

ולכן $$r = \frac{1}{2 + r}$$

וכשנציב עבור r את $\frac{1}{2 + r}$ בנוסחה הראשונה, (i) נקבל

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + r}$$

אם נתיחס בשלב זה ל r כאפס,

נקבל קרוב ראשון $$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

אך ניתן להמשיך ולהציב עבור r שמצאנו

היינו

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + r}}$$

אם עתה נניח ש- $r = 0$

נקבל קרוב שני, טוב יותר,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

וכשנמשיך בדרך זו, נקבל את השבר האינסופי

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

או את הסדרה המתאימה:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$$

כשנעלה ברבוע אברים מהסדרה יקל להווכח כי הרבועים מתנדנדים בין מספרים מעל 2 ובין מספרים מתחת ל- 2. וכל רבוע עוקב "קרוב" יותר ל-2 מקודמו.

במלים אחרות, כשנחלק את אברי הסדרה לשתי קבוצות באחת יהיו האברים שמספרם הסדורי הוא אי־זוגי ובשניה האברים שמספרם הסדורי זוגי, הרי נקבל את שתי הסדרות

$$1, 1\frac{2}{5}, 1\frac{12}{29}, 1\frac{70}{169}, \dots$$

$$1\frac{1}{2}, 1\frac{5}{12}, 1\frac{29}{70}, 1\frac{169}{408}, \dots$$

כאשר הראשונה עולה ברציפות ובעלת חסם עליון $\sqrt{2}$.
והשניה יורדת ברציפות ובעלת חסם תחתון $\sqrt{2}$.

לסיכום, על-פי סקירה קצרה זו ניתן לראות כי, מושג הנראה כביכול טריויאלי ומוכר לכל תלמיד בראשית דרכו, הרי הוא למעשה נושא מורכב והדיון בו נמשך מימי קדם ועד ימינו אלה. אם כך, יתכן ונכונו לנו עוד הפתעות ותמצאנה עוד דרכי הוכחה ממבט שונה על אי הרציונליות של המספר $\sqrt{2}$.

ספרות

(1) Hardy G.H. and Wright E.M., "An Introduction to the Theory of Numbers". Oxford at the Clarendon Press. 1962.

(2) Dantzig T., "Number the Language of Science". George Allen and Unwin Ltd. London. 1947.

(3) Meschkowski H., "Evolution of Mathematical Thought". Holden-Day Inc. San Francisco. 1965.

(4) Harris V.C., "Terminal digit proof that $\sqrt{2}$ is irrational". The Mathematical Gazette, February 1969 (Vol. 53, p. 65).

(5) Hopkinson J., "Further evidence that $\sqrt{2}$ is irrational". The Mathematical Gazette, December 1975 (Vol. 59, p. 275).

(6) Lewin M., "An even shorter proof that $\sqrt{2}$ is either irrational or integral". The Mathematical Gazette, December 1976 (Vol. 60, p. 295).

(7) מייזלר ד., "חשבון אינפיניטסימלי", הוצאת אקדמון, ירושלים, תשכ"ח.