הפונקציה המעריכית

מאת פרופ' ש. עמיצור
האוניברסיטה העברית, ירושלים

1. במושג הפונקציה (הממשית) אנו מבינים התאמה

$$f : x \longrightarrow y \qquad \text{(או בסימון} \quad y = f(x))$$

אשר לכל מספר ממשי x מתאים מספר ממשי יחיד y (לעיתים מוגבל x לקטע או קטעים). התאמה זו ניתנת להגדרה בצורות שונות ובדרכים רבות. למשל, בצורה מתמטית על-ידי חוק התאמה המוגדר בעזרת תבנית פשוטה כמו

$$x \longrightarrow x^2$$

או מסובכת, בעזרת תהליך גיאומטרי: זוית (מרכזית במעגל) ⟵ מיתר

$$x \longrightarrow 2\sin(\frac{x}{2})$$

או גם על ידי תהליכים פיסיקלים, למשל
הדרך שעובר גוף נופל

$$t \longrightarrow s(t)$$

או הטמפרטורה T של גוף כפונקציה של הזמן. אך גם על ידי תהליכים כלכליים, כגון ייצוא של מדינת ישראל כפונקציה של הסובסידיה בהשקעות של המדינה.
או הפונקציה $f(t)$, המתארת את סכום הכסף שיקבל אדם כעבור t שנים, מכל לירה שישקיע בבנק.
כמעט כל תחום בחיים ובמדע קשור למערכות המתארות או מתוארות בעזרת פונקציות.

לעתים, בעזרת גילוי מצבת חוקים בסיסית, ניתן לגלות את תיאור הפונקציה הפיסיקלית או הכלכלית בעזרת תבניות,

כמו בנפילה חופשית $\qquad s(t) = \frac{1}{2}gt^2$

וכן אפשר לחשב את המרחק מראש, אם לצרכים מעשיים מידיים, או לתכנון ונבוי תוצאות של פעולות. גם במקרה הכלכלי אם נוכל לחשב את ערכי הרווח $f(t)$ של השקעה, ניתן לתכנן תכניות חסכון והוצאות מראש לתקופה ארוכה.

חלק נכבד מהמתמטיקה מוקדש לדרכים שניתן לגלות את הפונקציות, או כמה מתכונותיהם, מתוך מערכת החוקים או מערכת אלוצים; ומאמר זה מוקדש לאחת הדרכים שבה נמצא טפוס חדש וחשוב של פונקציה.

הגישה המובאת כאן, יש בה נוסף לגלוי תכונות הפונקציה עצמה, גם הדגמה של אחד התהליכים הבסיסיים בקשר שבין ההפשטה המתמטית והמציאות בעולם הסובב אותנו. תהליך זה ניתן לתיאור בצורה סכמטית:

מציאות (תופעות ותהליכים) ⟵ מצוי ואידיאליזציה ⟵ מודל מתמטי (הנחות אכסיומטיות) ⟵ פיתוח מתמטי (משפטים) ⟵ מציאות (מסקנות).*

למעשה נדגים גם כיצד אינטואיציה מן המעשה מביאה לידי ניסוח של משפטים מתמטיים (שלא תמיד קל להוכיח אותם).

2. נקודת המוצא שלנו הוא תהליך של התרבות (גידול חיובי) או קמילה (גידול שלילי) המשותף להרבה תופעות ותהליכים בכלכלה, ביולוגיה, פיסיקה ועוד... והנה כמה דוגמאות:

א) אוכלוסיה (אנשים, חיידקים, צמחים).
אם בזמן מסויים, אשר נוח לסמנו $t = 0$, יהיה גודל האוכלוסיה N_0, הרי כעבור זמן t (רגעים, שנים...) יהיה גודלה $N(t)$, והרי לפנינו פונקציה

$$t \longrightarrow N(t)$$

אשר בתנאים מסויימים - כאשר מובטחת לאוכלוסיה מזון ושטח ואפשרויות התפתחות ללא הגבלה - מותר להניח שהמספר $N(t)$ יהיה פרופורציונלי למספר ההתחלתי N_0. כלומר, אם נתחיל למשל מאוכלוסיה שמספרם כפול, יש לצפות למספר כפול כעבור אותו זמן t. במלים אחרות, הפונקציה שלנו צורתה

$$N(t) = N_0 g(t)$$

וכך $g(t)$ הוא - מבחינה תיאורטית בלבד - מספר האוכלוסיה שהם צאצאים מיחידה אחת בלבד. נעיר כבר כאן שלמעשה תנאים אידיאליים כאלה אינם קיימים במציאות לאורך ימים. אפשר אולי לקיימם לתקופה קצרה - וכך שהמסקנה שלנו ש- $N(t) = N_0 g(t)$, כאשר $g(t)$ היא פונקציה שאינה תלויה בתנאים התחלתיים היתה מסקנה של אידיאליזציה של המציאות, ובגורם זה יש להתחשב אחר כך בפרוש המסקנות שנשיג בתהליך המתמטי המופשט.

ב) התפשטות מחלה (מגיפה).
סביר להניח שאם ברגע מסויים $(t = 0)$ היה מספר החולים ממגיפה N_0, יהיה מספר של חולים ברגע t, פרופורציונלי ל- N_0; כלומר גם כאן

$$N(t) = N_0 g(t)$$

ו $g(t)$ תלויה אך בזמן t ולא במספר התחלתי N_0. $g(t)$ הוא מספר האנשים שידבקו בגלל מחלתו של אדם אחד. ושוב, זהירות! ההנחה שלנו היא אידיאליזציה של מצב שקיים בשלבים הראשונים של המחלה, לפני שמתחילים לאחוז באמצעים ובבידוד החולים.

ג) <u>רדיואקטיביות.</u>
חומר רדיואקטיבי מתפרק במשך הזמן, ומכל גרם של חומר רדיואקטיבי ישארו $g(t)$ גרמים כעבור t שנים; הרי מ M_0 גרמים יהיו $M_0g(t)$ גרמים כעבור t שנים. גם כאן ישנן הנחות פיסיקליות (מהן?)
דוגמא דומה היא טיפוס של <u>ריאקציות כימיות:</u> אשר מהחומר המקורי המוכנס למערכת נשאר מכל גרם $g(t)$ גרמים, ומ- M_0 גרמים נשאר $M_0g(t) = M(t)$ גרמים. כאן יש אידיאליזציה רצינית של מצב העניינים, כי בריאקציה כימית בסביבה מוגבלת הריאקציה תלויה גם בריכוז החומרים הנוצרים.

בהזדמנות זו נציין שלכאורה נראה שבכל המקרים הללו $t > 0$, אך למעשה ניתן למצוא גם פירוש לפונקציה עבור $t < 0$, לפחות לגבי חלק הפונקציות שלפנינו. אם $N(t)$ הוא גודל האוכלוסיה כעבור זמן t מזמן $t = 0$, הרי עבור t שלילי נסמן $t = -p$ ($p > 0$), ו $N(-p)$ הוא גודל האוכלוסיה לפני זמן p. גם ברדיואקטיביות יש מובן ל t שלילי (מהו?)

ד) <u>חדירת גוף בנוזל</u> (או במוצק).
כאשר גוף הנע במהירות קבועה חודר לנוזל, ונע בתוך סביבה המתנגדת למהירותו, הרי מהירותו V, לאחר שעבר מרחק x, תלויה במהירותו ההתחלתית V_0 והדרך x שהגוף עבר. ושוב בהנחות סבירות יהיה

$$V(x) = V_0g(x)$$

כאשר $g(x)$ נותן את נפילת המהירות מכל יחידה של מהירות התחלתית. כאן מונחת הנחה שהנוזל הומוגני ואין חשיבות היכן קובעים את נקודת האפס, כל עוד שהמהירות V_0 נמדדת באותה נקודה שבה נקבע האפס ואשר ממנה נמדד x. כן מפל המהירות מ A ל B או מ C ל D הוא זהה כל עוד $AB = CD$, והמהירות של גוף ב A תהיה אותה מהירות אם יימצא ב C. יתכן שמבחינה פיסיקלית אין כל הצדקה להנחה זו או אולי אפילו לאידיאליזציה של מצב. אם נצליח לחשב את $g(x)$ ולערוך נסויים בסביבות בעלות עובי שונה ובמהירויות שונות, והמספרים שנמצא יתאימו לערכים התיאורטים שנחשב, הרי נוכל כאן לאמת במידה מלאה (או חלקית) את ההנחות שלנו.

3. ההנחה המשותפת בכל הדוגמאות הללו היא שבמצב אידיאלי (אף אם איננו קורה למעשה) קיימת פונקציה $f(t)$, כך שאם ברגע מסוים נמדד, או נספר K_0, הרי כעבור זמן t (או לפני זמן p, $t = -p$) תהיה תוצאת התהליך

$$K_0 g(t) = K(t)$$

מבחינות לא מתמטיות אנו יכולים להווכח כי ההנחה של הפרופורציונליות היא טובה לגבי הדוגמאות שהובאו. נראה שקיימת פונקציה $f(t)$ ואפילו ניתן למדוד אותה (כגון ברדיואקטיביות) ולחשב ערכיה לגבי כמויות חומר שונות ובזמנים שונים.

בדוגמאות שהובאו אנו עדים לקיומה של פונקציה $f(t)$, אבל איננו משפיעים על התהוותה. נביא דוגמא נוספת שבה אנו יכולים להתערב בתהליך ונרצה לחקות את מה שקורה בדוגמאות הקודמות. דוגמא זו תשמש לנו כמודל.

<u>השקעה בבנק.</u>

בנק המנהל עסקיו בצורה רציונלית והמעוניין ברכישת כספי לקוחות לצורך פעילות כלכלית - מעונין להחזיק בכספים אלו לאורך זמן. ולכן יהיה מוכן לתת לאדם המשקיע לירה אחת - $f(t)$ לירות כעבור זמן t; וככל שהזמן ארוך יותר תהיה $f(t)$ גדולה יותר (כלומר $f(t)$ מונוטונית עולה). אם ישקיע האדם K_0 לירות - הרווח שלו אחר זמן t יהיה:

$$K(t) = K_0 f(t)$$

ו $f(t)$ איננו תלוי ביום ההפקדה, אלא אך באורך הזמן t בין יום ההפקדה ויום ההוצאה. גם כאן ישנן הנחות שאולי אינן מתגשמות במציאות. (מצא כמה מהן!)
$f(t)$ הוא הסכום שיתקבל מכל לירה המופקדת זמן t.
נבדוק על ידי דוגמאות מה קורה אם בוחרים בפונקציה באופן הבא:
נניח שההפקדה היא בתוספת רבית קבועה $p\%$ בכל שנה (פרופורציונלית לזמן). במקרה זה הרווחים אחרי זמן t יהיו $\frac{K_0 pt}{100}$. אם נסמן $r = \frac{p}{100}$, הרי אחרי זמן t תהיה

$$K(t) = K_0 + k_0 rt = K_0(1 + rt) \text{ ל"י}$$

כלומר, קבלנו כאן פונקציה $f(t) = 1 + rt$.
אם אדם השקיע 1000 ל"י בריבית של 15% לשנה, הרי אחרי שנתיים יקבל

$$1300 = 1000 + \frac{1000 \cdot 15 \cdot 2}{100} \text{ ל"י}$$

אך אם הוא פיקח, הרי יוציא את הכסף בסוף שנה ראשונה ויכניס אותו מיד בחזרה לשנה נוספת, כי אז בסוף שנה א' יקבל: 1150 ל"י ובסוף שנה ב' יקבל, מ-1150 ל"י שיהיו מונחים שנה אחת

$$1150 + \frac{1150\times 15}{100} = 1322.5 \quad \text{ל"י}$$

וכך זכה ב 22.5 ל"י נוספות. ואם הוא מוכן לטרוח ולעשות זאת כל חודש במשך השנתיים הרווח שלו יהיה אף גדול יותר כ- 1347 ל"י. (המכסימום שיוכל להגיע בריצה כזו הוא בערך עד 1350 ל"י).

לכן ברור כי $f(t) = 1 + rt$

אינה פתרון טוב לבעית ההשקעה. אך האם בכלל קיים פתרון $f(t)$ כך שימנע מהלקוח התרוצצויות, ומהבנק טירחה של רשומים נוספים, כך שלא יהיה כדאי לו בהתחכמות שהצבענו עליה?

מן הדוגמאות שהובאו לעיל, מסתבר כי, כנראה יש פתרון רצוי.

מכל מקום: אם נצא מהנחה שקיימת פונקציה $f(t)$ במקרה הבנק, מה הם האלוצים על $f(t)$, כלומר מה התנאים שהיא צריכה לקיים, (למשל, בכדי למנוע את ההתחכמות שהזכרנו לעיל).

ראשית, נרשום את התנאי על הגדרתה.

(E1) - $f(t)$ פונקציה המוגדרת עבור כל t ממשי (וערכיה ממשיים). היא גם אינה אפס באופן זהותי.

למעשה בהנחה זו יש קצת מן האבסורד - הרי אדם לא ישקיע כספים למליון שנים, ואפילו במקרה הרדיואקטיביות הרי לכל הדעות לא היה החומר קיים בצורה זו לפני מלירדי שנים. ואף על פי כן נוח לנו להניח מצב אידיאלי שבו גורמים אחרים אינם משפיעים ואזי $f(t)$ מוגדרת לכל t.

העובדה שאיננה באופן זהותי אפס מוצדקת מאוד (מדוע?).

אך התנאי החשוב במיוחד הוא:

(E2) - לכל t , s ממשיים $f(t + s) = f(t)f(s)$

תנאי זה מונע את התחבולה שהזכרנו לעיל. אדם שהשקיע את הלירה שלו למשך $t + s$ שנים יקבל $f(t + s)$ לירות. לעומת זאת, אם יתחכם, וכעבור t שנים יוציא את כספו ויקבל $A = f(t)$ ל"י, ושוב ישקיע ל s שנים, יהיה הכסף שיעמוד לרשותו $Af(s)$ לירות שהם $f(t)f(s)$. בשני המקרים יהיה הכסף מונח $t + s$ שנים. אם הבנק מעונין שהכסף יהיה מונח זמן רב יותר, והוצאת ביניים לא תהיה כדאית, הרי עליו לשלם כעבור $t + s$ שנים לא פחות מאשר $f(t)f(s)$ ל"י. אך המינימום ההכרחי מעל סכום זה, כלומר

הסכום שהוא ישלם $f(t+s)$, יהיה בדיוק $f(t)f(s)$ וזהו התנאי (E2).
במלים אחרות הבנק יבכר לשלם לפי פונקציה המקיימת $f(t+s) = f(t)f(s)$.
ההנחה של "פרופורציונליות למצב ההתחלתי", המשותפת לכל הדוגמאות שהבאנו, היא שהביאה אותנו ל"משוואה הפונקציונלית" (E2).
נבסס זאת שנית בצורה מופשטת וכוללת לכל הדוגמאות.

יחידה אחת במצב התחלתי $t = 0$ מניבה ברגע $t + s$ את $f(t+s)$, מאידך גיסא נוכל להסתכל במצב הסופי הזה בשני שלבים - בשלב א' היחידה הניבה $f(t) = A$ ברגע t. כאן מתחיל שלב ב', שלב מחודש לתקופה נוספת של זמן s, אך במצב התחלתי של A יחידות. לכן נובע מהנחת "הפרופורציונליות למצב ההתחלתי" תהיה התפוקה של A יחידות אחר זמן s, $f(t)f(s) = Af(s)$ וזה כמובן חייב להיות $f(t+s)$; במלים אחרות התנאי (E2).

ישנו עוד תנאי שרצוי להניח:

(E3) - <u>הפונקציה מונוטונית</u> (עולה או יורדת).
כי ככל שיארך זמן ההשקעה ישלם הבנק יותר, או למשל במקרה הרדיואקטיביות, כמות החומר המקורי הולכת ויורדת.
בניגוד להנחות הקודמות, הרי הנחה זו תמלא תפקיד רק בשלבים מאוחרים של הפיתוח המתמטי.

אפשר גם להניח כי: $f(0) = 1$, כי אם השקענו K_0 לירות בזמן $t = 0$ ומיד הוצאנו את הכסף נקבל שוב K_0 לירות (נתעלם מהוצאות נהוליות). אך למרבה הפלא - הנחה זו היא מסקנה <u>מתמטית</u> מההנחות הקודמות; וכאן המסקנה המתמטית מתישבת יפה עם ההנחות הסבירות במציאות.

4. נעבור אם כן לטיפול מתמטי בקבוצות פונקציות f, שתקראנה פונקציות - E המקיימות את התנאים:

(E1) - <u>מוגדרות עבור כל t ממשי ואינן באופן זהותי 0.</u>

(E2) - <u>לכל s , t ממשיים $f(t+s) = f(t)f(s)$.</u>

ובשלב מאוחר יותר גם

(E3) - <u>פונקציה מונוטונית (עולה או יורדת).</u>

הדרישה (E2) ידועה <u>כמשוואה הפונקציונלית</u> של הפונקציות השייכות למשפחה E.

אנו נתייחס לדרישות (E1) ו (E2) (ומאוחר יותר גם ל (E3)) כמערכת אקסיומטית של הפונקציות $f(t)$ השייכות למשפחה E, וננסה עתה לבנות מערכת משפטים שכל פונקציה f המקיימת דרישות אלו תמלא.

משפט א' <u>לכל t ממשי $f(t) \neq 0$</u>

<u>הוכחה:</u> אם קיימת נקודה a שעבורה $f(a) = 0$, אזי נקבל מ (E2), עם $t = a$ ו $s = x - a$, כי לכל x

$$f(x) = f(a)f(x - a) = 0$$

כלומר $f(x) \equiv 0$, הנוגד את הדרישה (E1).

משפט ב' <u>$f(0) = 1$</u>

<u>הוכחה:</u> $f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0)$ ואם נחלק ב $f(0)$ השונה מ 0 לפי משפט א', נקבל $f(0) = 1$.

משפט ג' <u>לכל t, s ממשיים $f(-t) = \frac{1}{f(t)}$, $f(t - s) = \frac{f(t)}{f(s)}$</u>

<u>הוכחה:</u> מ (E2) נקבל $f(t) = f(s)f(t - s)$

ולכן $f(t - s) = \frac{f(t)}{f(s)}$

(מותר לחלק ב $f(s)$ כי $f(s) \neq 0$ ממשפט א').

אם נציב $t = 0$ נקבל: $f(-s) = \frac{1}{f(s)}$.

משפט ד' <u>לכל t ממשי $f(t) > 0$</u>

<u>הוכחה:</u> לפי (E2) $f(t) = f(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = f(\frac{t}{2})f(\frac{t}{2}) = [f(\frac{t}{2})]^2 > 0$

<u>מסקנה:</u> הפונקציות f מעתיקות את המספרים הממשיים לתוך המספרים החיוביים.

נעצור לרגע ונשאל האם יש מובן שימושי למערכת המשפטים שקבלנו. האם ניתן למצוא להם גם תרגום לעובדות במסגרת המקרים שהביאו אותנו להנחה שהתופעה מתוארת על-ידי פונקציה מהמשפחה E?

לכמה מהמשפטים יש אכן מובן פשוט ביותר ואחרים מגלים שבתנאים מסויימים המובן אינו סביר - כך מתגלות המגבלות באידיאליזציה של המצב, שהיתה אבן-פינה להנחה שהביאה לפונקציה ממערכת E.

משפט ב' האומר $f(0) = 1$ מבטא עובדה פשוטה וברורה כפי שראינו למעלה.

משפט ד' טוען, למשל בדוגמא של הרדיואקטיביות, שתמיד ישאר חומר רדיואקטיבי, ובמקרה של השקעה בבנק - תמיד ימצא למשקיע כסף בבנק כי $f(x) > 0$. אך עובדות אלו אינן מתקבלות על הדעת, כי אם כמות החומר הרדיואקטיבי קטנה ומכילה רק מספר

אטומים בודדים, הרי כאשר יתפרק האטום האחרון לא ישאר חומר רדיואקטיבי, כלומר $f(x) = 0$. ובמקרה הבנק - האם באמת יש למשקיע כסף בבנק בכל זמן שהוא - גם לפני שהשקיע $(t < 0)$?!

אם כן, מה המסקנה? סתירה במתמטיקה?! ודאי שלא, אלא תהליך האידיאליזציה שבו מופעל תנאי "הפרופורציונליות למספר ההתחלתי" מתקיים במקרה הרדיואקטיביות רק עבור קבוצות גדולות של אטומים, בכמות גדולה של חומר רדיואקטיבי. ובדוגמא של המשקיע בבנק - הרי לנוחיות המתמטית הורחבה טענת הפרופורציונליות גם לזמנים אחרים, לטרום השקעה. דוגמאות אלו מדגימות לפנינו את הזהירות שיש לנקוט בהסקת המסקנות הלא מתמטיות וחשיבות האידיאליזציה בבנית המודל המתמטי.

6. נשאל את השאלה ההפוכה: האם ישנן עובדות המתקבלות על הדעת במציאות המקרים שהדגמנו, המתוארים בעזרת פונקציות E - שניתן לנסח אותן כעובדות, או נכון יותר כמשפטים מתמטיים המתקיימים עבור כל פונקציות המשפחה E? ואכן יש ויש, ובדרך כלל המשפטים המתאימים הם אינם קלים להוכחה. והרי מספר דוגמאות:

<u>דוגמא א':</u> במקרה השקעה בבנק. בנק א' (הנוהג לפי פונקציה $f(t)$) נותן עבור השקעה של 1 לירה בסוף השנה הראשונה $f(1) = a$ ל"י, ובבנק ב' (הנוהג לפי פונקציה $g(t)$) גם הוא נותן את אותו הסכום, $g(1) = a$ ל"י, בסוף השנה הראשונה. היכן כדאי יותר למשקיע? - הדעת נותנת שאם התהליכים אין בהם אלוצים השונים בבנק א' מבנק ב' הרי אין כל סיבה לבכר א' על ב'; כלומר, אם כספים יושקעו בזמנים שווים בשני הבנקים, הם יתנו פירות זהים. זהו המשפט המתמטי האומר:

<u>משפט ה'</u> <u>יהיו $f(t)$, $g(t)$ שתי פונקציות השייכות ל E. אם $f(1) = g(1)$</u>
<u>אזי לכל t ממשי $f(t) = g(t)$.</u>
המשפט נכון והוכחתו המתמטית אינה קלה. חלקים ממנה יוכחו מאוחר יותר.

<u>דוגמא ב':</u> כמו כן סביר שאם בנק מסויים מוכן לשלם בסוף השנה הראשונה $b = g(1)$ ל"י, בנק שני, המתחרה בו, יתן סכום a ל"י העולה על b, ואף יוכל לעמוד באותן הדרישות שהביאו להנחות (E1) ו (E2). במלים אחרות, קיימת גם בשביל הבנק השני פונקציה $f(t)$ אשר $f(1) = a$ והשייכת למשפחה E לכאורה עבור $a > b$, כיון ש b לא הוגדר נגיע למסקנה כי:

<u>משפט ו' לכל $a > 0$ קיימת פונקציה $f(t)$ השייכת למשפחה E כך ש: $f(1) = a$.</u>

<u>דוגמא ג':</u> אם $f(t)$ מתאר את כמות החומר הרדיואקטיבי שנשאר, או כמות ההשקעה כפונקציה של הזמן t, הרי ללא כל ספק התהליך אינו תלוי באיזו יחידה אנו מודדים את הזמן, בשנים, שעות, שניות. בכל מקרה הפונקציה צריכה להיות מאותו טיפוס המתארת השקעה או התפרקות וכדומה.

כיצד מתבטא בצורה מתמטית השינוי ביחידת הזמן? אם מדדנו s בשנים, הרי אם נציג $t = 12s$, t ימדוד את הזמן בחדשים; ואם מדדנו s בדקות הרי $t = \frac{s}{60}$ תהיה המדידה בשניות. אם הפונקציה של הזמן $f(t)$ ניתנת ביחידה של t חדשים אז

הפונקציה כפונקציה של הזמן s בשנים, היא $g(s) = f(12s)$. וכן אם $f(t)$ ניתנת ביחידה של t רגעים, אז $g(s) = f(\frac{s}{60})$ היא פונקציה של הזמן s הנמדד בשניות. ובשני המקרים הפונקציה $g(s)$ היא פונקצית גידול המתארת אותה תופעה ומשום כך צריכה לקיים את אותן הדרישות, כלומר, היא מקיימת את האכסיומות $(E1)$ ו $(E2)$ של המערכת E. וזהו המשפט המתמטי האומר:

<u>משפט ז'</u> <u>אם $f(t)$ שייכת למשפחת E ו a מספר קבוע, אזי גם הפונקציה $f(at) = g(t)$ שייכת למשפחה E</u> (כפונקציה של t).

<u>הוכחה:</u> משפט זה קל להוכיח. ברור כי $g(t)$ מוגדר עבור כל t ממשי, כלומר $g(t)$ מקיים את $(E1)$.

הוכחת הדרישה $(E2)$: יהי $p = at$ $q = as$

אזי: $g(p + q) = f(at + as) = f(at)f(as) = g(p)g(q)$

קל להראות שגם $(E3)$ מתקיימת.

<u>דוגמא ד'</u> (מסובכת יותר): נטפל במקרה ההשקעה - האם הדרישות $(E1)$ ו $(E2)$ מכילות בתוכן כמסקנה את אחת הבעיות שהעלינו והיא, שהבנק מעונין שהלקוח יחזיק כספו במשך זמן רב ככל האפשר ולא יוציא אותו מוקדם יותר? ראינו לפני כן, שלא כדאי להוציא את הכסף ומיד להשקיע אותו בחזרה לפי אותה פונקציה. אולם, נסתכל במקרה שונה: בהשקעה בריבית של $p\%$. כעבור t (שנים) יתקבל מלירה אחת

$$K'(t) = 1 + \frac{p}{100}t = 1 + rt$$

לעומת זאת בהשקעה לפי פונקציה $f(t)$, השייכת למשפחה E, הסכום הוא $K''(t) = f(t)$.

המטרה המוצהרת היא - שגם אם בזמן קצר יתכן שהשקעה בריבית $p\%$ גבוהה (r גדול) כדאית היא, הרי לזמן ממושך בסופו של דבר, כדאית ההשקעה בשיטה השניה - כלומר החל מזמן T גדול למדי, לכל $t > T$ יהיה $K'(t) < K''(t)$.

לפיכך המשפט המתמטי (הנכון) המתאים הוא:

<u>משפט ח'</u> <u>יהי $r > 0$, $f(t)$ פונקציה השייכת למשפחה E, אזי קיים $T > 0$ כך שלכל $t > T$ יהיה $1 + rt < f(t)$.</u>

משפט זה ניתן להוכחה מתמטית, ידוע בעגה המתמטית: "עליה אכספוננציאלית גדולה מכל עליה לינארית".

ומה המצב עד אותו רגע שבו הם משתוים - האם יש בשיטת ההשקעה לפי $f(t)$ היתרון של כדאיות החזקת הכסף עד אותו זמן? (לאחריו - ודאי, כפי שראינו).

ואמנם, נניח $f(1) = 1 + r\cdot 1$. זאת אומרת, שבסוף השנה (או יחידות הזמן) ההשקעה בריבית רגילה $p\%$ תשווה לכסף המתקבל בשיטת f. לפני תום הזמן לא כדאי להוציא את הכסף - אם לא הושקע בריבית הרגילה. כלומר, אם $0 < t < 1$ הרי $1 + rt > f(t)$.

משפט ט' יהי $r > 0$, $f(t)$ פונקציה השייכת ל-E ויהי $f(1) = 1 + r$ אזי לכל $0 < t < 1$ $1 + rt > f(t)$.

נוכיח את המשפט, במקרה שבו $t = \frac{1}{2}$ (הוצאת כספים במחצית השנה).
ברבית הרגילה יקבל הלקוח $1 + r\cdot\frac{1}{2}$, ובהשקעה המוצעת לפי E יקבל $f(\frac{1}{2})$. ונניח שבסוף השנה הראשונה שתי ההשקעות נותנות את אותן הפירות כלומר:

$$f(1) = 1 + r$$

עתה קל לחשב את $f(\frac{1}{2})$, כי

$$f(\tfrac{1}{2})^2 = f(\tfrac{1}{2})f(\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = f(1)$$

ולכן

$$f(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{f(1)} = \sqrt{1 + r}$$

והמשפט שלנו טוען כי $\sqrt{1 + r} < 1 + \frac{r}{2}$. אכן תוצאה זו נובעת מהוצאת השורש הריבועי של אי השוויון

$$1 + r < (1 + \tfrac{r}{2})^2$$

דוגמאות נוספות יובאו בסוף.

7. עד כה טיפלנו בכמה עובדות מתמטיות שהפונקציות הללו מקיימות. עתה ננסה ללמוד כיצד לחשב את הערכים שלהם, את התיאור הגרפי ועוד תכונות הקשורות לחישובים.

כבר ראינו כיצד לחשב את $f(\frac{1}{2})$ של פונקציה מהמשפחה E לכשידוע $f(1)$. ואכן בעזרת התכונה (E2) ניתן לחשב את ערך הפונקציה בכל נקודה רציונלית.
את התוצאה ננסח במשפט הבא:

משפט י' תהי $f(t)$ שייכת למשפחה E ויהי $f(1) = a > 0$. אזי לכל n ו-m (שלמים)

(i) $f(n) = a^n$; $f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$ ו $f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{a^m}$

ובצורה כללית יותר:

(ii) לכל x ממשי, $f(\frac{m}{n}x) = \sqrt[n]{f(x)^m}$

ההוכחה פשוטה למדי:

$$f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1)f(1)\ldots f(1) = [f(1)]^n = a^n,$$

ובדרך דומה: $f(nx) = f(x + \ldots + x) = [f(x)]^n$.

ועבור $\frac{1}{n}$ נקבל: $a = f(1) = f(n\cdot\frac{1}{n}) = [f(\frac{1}{n})]^n$

ולכן

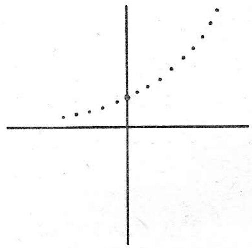
$$f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$$

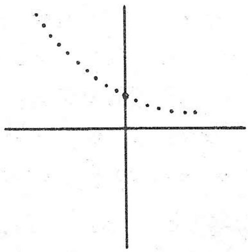
שאר חלקי המשפט נובעים בנקל מהשוויון $f(\frac{m}{n}x) = f(m\cdot\frac{1}{n}x) = f(\frac{1}{n}\cdot m\cdot x)$.

המשפט האחרון קובע שאם $f(1) = a$ נתון, הרי נקבעו כבר כל הערכים $f(\frac{n}{m})$ לכל $r = \frac{n}{m}$ רציונלי. בזה מוכח למעשה בחלקו משפט ה', שניסוחו בא מתרגום המסקנה הכלכלית. טיפול בערכים אירציונלים נשאיר לסוף.

עתה נוכל גם לתאר את נקודות הגרף, לפחות עבור ערכים שלמים וצורת הגרף תהיה

עבור $a > 1$ ועבור $0 < a < 1$





גם עבור ערכים רציונלים נקל להוכיח כי הנקודות הנוספות תמלאנה את הרווחים. זה נובע מהמשפט הבא.

<u>משפט יא'</u> <u>יהי $f(1) = a > 1$, אם $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ יהיה $f(\frac{m}{n}) < f(\frac{p}{q})$.</u>

<u>כלומר, הפונקציה עולה עבור ערכים רציונליים.</u>

<u>וכן תהיה יורדת אם $f(1) = a < 1$.</u>

(מה המצב כאשר $a = 1$?)

אם מטפלים רק במקרה $n > 0$, $q > 0$, את אי השוויון בין המספרים הרציונלים ניתן לנסח כאי שוויון בין המספרים השלמים: $qm < pn$.

אם $a > 1$, זה גורר כי $a^{qm} < a^{pn}$.

ומזה נובע כי $\sqrt[qn]{a^{qm}} < \sqrt[qn]{a^{pn}}$.

כלומר $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[q]{a^p}$.

ואזי: $f(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p} < \sqrt[n]{a^m} = f(\frac{m}{n})$ כנדרש.

עתה, בהסתמך על משפט ה' ומשפט ו', שדנו ביחידות ובקיום הפונקציה נוכל להכניס את הסימון המקובל:

<u>סימון: אם פונקציה שייכת למשפחה E, ו $f(1) = a$, אזי נסמן $f(x) = a^x$.</u>

הסימון מכיל את החזקה הידועה לנו על מספרים טבעיים כי $f(n) = a^n$, ובעזרת משפט ו' ומשפטים ב' ו-ג' מקבלים אנו:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad , \quad a^\circ = 1 \quad , \quad a^{-n} = 1/a^n \quad , \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

כיצד נחשב את a^x עבור x אירציונלי?

כאן בפעם הראשונה נכנסת לתמונה הדרישה (E3) והיא מונוטוניות הפונקציות E. נטפל רק במקרה $a > 1$: כיון ש- a^x מונוטונית לפי (E3), וראינו כי היא מונוטונית עולה עבור ערכים רציונליים - הרי היא חייבת להיות מונוטונית <u>עולה</u> לכל הערכים. אם x אירציונלי הוא ניתן לסגירה בין שני מספרים רציונלים שהמכנה שלהם הוא כל מספר טבעי n רצוי ואזי $\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}$.

מהמונוטוניות ינבע שגם $f(\frac{m}{n}) < f(x) < f(\frac{m+1}{n})$. כך $f(x)$ הוא ערך בקטע $[f(\frac{m}{n}) \, , \, f(\frac{m+1}{n})]$, אך ככל ש n יגדל יצטמצם הקטע והערך $f(x)$ יקלע לתוך המשותף של כל הקטעים הללו עבור כל $n = 1, 2, \ldots$.
מיד נראה שקיים רק מספר אחד ויחיד שיכול להקלע לקטע זה.
כי אילו היו שני ערכים, b, c, כך שלכל n ו-m אם $\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}$ יהיה $f(\frac{m}{n}) < b < f(\frac{m+1}{n})$ וגם $f(\frac{m}{n}) < c < f(\frac{m+1}{n})$
אם נניח $b \geq c$ אז $1 < \frac{b}{c} < f(\frac{m+1}{n})/f(\frac{m}{n})$
הרי האגף הימני באי השוויון הזה יהיה $f(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{a}$ לפי (E2)
ולכן $1 \leq (\frac{b}{c})^n < a$ לכל n (ובלתי תלוי ב- m). אך זה יתכן רק אם $b = c$, והוא הערך של $f(x)$.

בסיכומו של דבר הוכחנו למעשה את משפט ה' (משפט היחידות) כלומר אם $f(1) = g(1) = a$ הרי $f(x) = g(x)$ לכל x. אי לכך מוצדק לסמן פונקציה זו ב- a^x.

תכונה חשובה אחרת של הפונקציות הללו טוענת שהעליה ה"יחסית" של הפונקציה לאורך קטע נתון היא קבועה, ואינה תלויה בנקודה שבה הקטע מתחיל. כלומר בין t ל- $t + \delta$ התוספת של הפונקציה Δf פרופורציונלית לערך $f(t)$: הערך של $\frac{\Delta f}{f(t)}$ הוא מספר שאינו תלוי ב-t אלא רק ב δ.

בדוק, האם אפשר להסיק מכך גם מסקנות מעשיות?

8. בשיטה המקובלת, המבוססת על מושג החזקה a^x כפי שהוא מוכנס ביסודות האנליזה (שאף אנו השתמשנו בו בהגדרה עבור x טבעי), מוכיחים את הכלל הבסיסי $a^{x+y} = a^x a^y$. עבורנו הוא היה משולב במערכת האכסיומות.
אך קיימות כמה תכונות נוספות כגון:

<u>משפט יב</u>   i) $(a^s)^t = a^{st}$

ii) $(ab)^x = a^x b^x$

iii) לכל מספר ממשי $0 < y$ קיים x כך ש- $a^x = y$.

iv) יהי $a > 1$, ו $f(t)$ פונקצית E אז קיים r ממשי כך ש- $f(t) = a^{rt}$.

נוכיח לפי שיטתנו את (i) ו (ii). הוכחת (iii) דורשת אמצעים עמוקים יותר ו (iv) מאפיין, למעשה, את כל המשפחה E, ונובע בנקל מ (iii). ממשפט ו' אנו למדים שאם $f(t) = a^t$ שייכת למשפחה E, תהיה גם $g(t) = f(st)$, עבור s קבוע, פונקציה השייכת למשפחה E.
לכן אם נסמן $g(1) = b$, $g(t) = b^t$.
ומאידך גיסא $g(1) = b = f(s) = a^s$; $g(t) = f(st) = a^{st}$
נקבל משני היחסים כי

$$g(t) = b^t = (a^s)^t = a^{st}$$

בדרך דומה: $f(x) = a^x$ פונקציה במערכת E, $g(x) = b^x$ כנ"ל, אזי גם $f(x)g(x)$ שייכת למערכת E (הוכח!) ולכן $f(x)g(x) = [f(1)g(1)]^x$ לפי ההגדרה ומכאן נקבל את השוויון

$$a^x b^x = f(x)g(x) = [f(1)g(1)]^x = (ab)^x$$

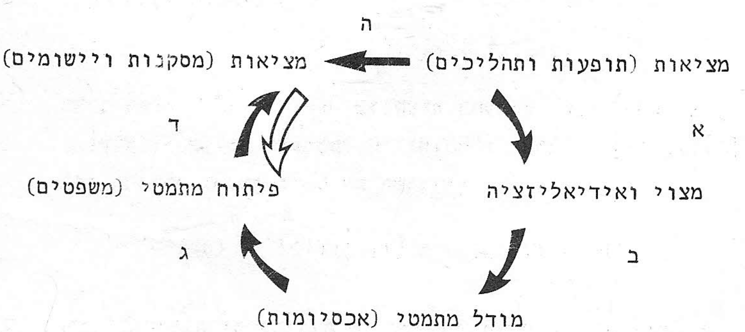
9. לסיכום, כמה מהיתרונות והחסרונות של הטיפול בחזקה בפונקציות E, כשלא נעמוד על הדברים הגלויים שנשאיר בידי הקורא.

ביססנו מערכת אכסיומטית מצומצמת ששרשיה נעוצים בתרגום לערכים קונטיטטיביים של תהליכים פיסיקליים, כלכליים וכדומה על ידי מיצוי והפשטה של התהליכים.
למעשה לא גילינו שאכן קיימות פונקציות (לא טריויאליות) במערכת E. בדוגמאות

של האוכלוסיה והרדיואקטיביות - שיש אפשרות לעקב אחריהן ולמדוד אותן, הפונקציות קיימות, אולם בתחומים מוגבלים ובתנאי אידיאליזציה. הרוצה לערער יכול לטעון, ובצדק, שלתיאור התופעה יש צורך בפונקציות אחרות כי אין במציאות המעשית והמתמטית פונקציות השייכות למערכת E. גם ההגינות המתמטית דורשת הוכחה בלתי תלויה במציאות הפיסיקלית לקיום פונקציות במערכת E (לא טריויאליות $\not\equiv 1$). בדיוק כפי שאין מנסים לתאר את הפונקציה הריבועית בעזרת התופעה של נפילה חופשית או של גוף הנע בתאוצה קבועה.

דרך אחת שניתן להתגבר עליה היא הוספת אכסיומה נוספת שתטען כי "קיימת לפחות פונקציה <u>אחת</u>, $f(t)$, במשפחה E אשר $f(t) \not\equiv 1$". (אז ניתן להוכיח את משפט הקיום, משפט ו'). בדיוק כמו שבגיאומטריה מוסיפים אנו כמה אכסיומות קיום למערכת, או כמו בבניה אכסיומטית של שדה המספרים הממשיים.
מטעמים מובנים יש הסתייגות לדרישה נוספת שמא האכסיומה הנוספת סותרת את האכסיומות הקודמות, וכל עוד יש באפשרותנו לבנות מודל שבו ניתן להוכיח את משפט ו', ללא אכסיומה נפרדת - נבכר ללכת בשיטה זו.
ואמנם קיימות דרכים שונות להשגת מטרה זו. אם בדרך הקלסית של הגדרת a^x לכל x ולכל $a > 0$, או בעזרת החשבון הדיפרנציאלי כגבול $\lim(1 + \frac{x}{n})^n$, ודרכים אחרות בעזרת הגדרת הלוגריתם כאינטגרל והחזקה כפונקציה ההפוכה, או כפתרון של משוואה דיפרנציאלית $y' = y$. כל הדרכים כשרות, אך כהתחלה די אם נתייחס לקיום כדבר אינטואיטיבי.

10. נסקור עתה בקצרה את התהליך שהודגם במאמר זה - על הקשר שבין העולם הממשי ועולם המעשה ובין המתמטיקה:
נסינו לתאר חלק מהמעגל הבא, עבור הפונקציות המעריכיות (האכספוננציאליות):



דוגמא אחרת היא הגיאומטריה, שמקורה בעולם הפיסיקלי. "מצוי" של תכונות היסוד ואידיאליזציה של המושגים מוליך למושגים חדשים ולמודל מתמטי של הגיאומטריה המופשטת בין אם זו אוקלידית, המבוססת על אכסיומות אוקליד, או מבוססת על חבורות טרנספורמציות. כך למשל הישר הגיאומטרי הוא אין סופי שקרוב לודאי שאיננו קיים במציאות הפיסיקלית.

מטרת חיי המעשה היא ללא כל ספק שלב ה' (המודגש) שבמעגל הסכמטי, אך בהתפתחות המחשבה המדעית והטכנולוגית - קבוצות שונות מדגישות ופועלות לאורך צירים שונים של המעגל. המדען התיאורטיקן (הפיסיקאי, הביולוג, הכלכלן ואחרים) פועל בעיקר בשלבים א' ו ב' והישגיו נמדדים בשלב ד'. לעומת זאת, הנסיונאי והטכנאי פועל בעיקר ביישום שלב ה' ולשם כך הוא מנצל הישגי אחרים בשלב ד' - במעבר מהשגי המודל המתמטי על היישום. לעומתם, המתמטיקאי הטהור פועל ומפתח בעיקר את שלב ג' וחוקר רק מתוך חובבנות את השלבים שלפניו ואחריו. למעשה גם המתמטיקאי השימושי הולך בדרך זו אך אחת ממטרותיו המוצהרות היא גם שלב ב' ו ד'.

11. לקורא שטרם נטש אותנו נביא הדגמה נוספת. נשתמש בתהליך של הכנסת הפונקציות המעריכיות להדגמה של אחת הדרכים בהתפתחות המתמטיקה. הדגמה בלבד, כי עד כמה שידוע למחבר, לא כך אירע הדבר בפונקציה המעריכית.

נניח שבנק מוכן לשלם רבית רגילה של $p\%$ $(r = \frac{p}{100})$. אך, כדי למנוע הוצאה והכנסה פעם אחר פעם מספר רב של פעמים, ברור שהבנק יהיה מוכן לשלם יותר מכל סכום שאפשר לקבלו על ידי הוצאות חוזרות - אך את המינימום ההכרחי, כך שלא יהיה כדאי למשקיע ללכת בדרך זו. ומה עליו לעשות:

אם במשך t (שנים) יוציא המשקיע את כספו n פעמים, תהיה כל הפקדה מונחת $\frac{t}{n}$ שנים. לכן בכל פעם יגדל הסכום פי $1 + \frac{rt}{n}$, ויקבל בדרך זו

$$s_n = (1 + \frac{rt}{n}) \ldots (1 + \frac{rt}{n}) = (1 + \frac{rt}{n})^n$$

ולכן הבנק ישלם $f(t)$, ומתחייב לכך שיתקיים: $(1 + \frac{rt}{n})^n \leq f(t)$.

נוסף לכך "מתקבל על הדעת" שככל שירבה המשקיע להוציא ולהפקיד (כלומר, n ילך ויגדל) יגדל גם הסכום העומד לרשותו. והרי לפנינו משפט מתמטי שמענין להוכיחו:

משפט: <u>הסדרה $(1 + \frac{rt}{n})^n$ היא סדרה עולה (עבור $rt > 0$) וקיימת $f(t)$, פונקציה של המשפחה, כך ש $(1 + \frac{rt}{n})^n \leq f(t)$.</u>

כאן מיד נכנסת סקרנותו של המתמטיקאי שהיה שואל: ומה הפונקציה המינימלית? ומעורר את ההשערה:

<u>קיים גבול $\lim_{n \to \infty}(1 + \frac{rt}{n})^n$ (שהוא גם החסם העליון של הסדרה) והגבול, כפונקציה של t, שייך למשפחה E.</u>

ומיד, באופן טבעי, מתעוררת השאלה השניה - מה הערך המספרי כאשר $rt = 1$ (דהיינו $t = \frac{100}{p}$)? - כי אם נמצא את הערך, ונסמנו למשל באות e, ונסמן

$$g(t) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n$$

הרי $g(1) = e$. לכן $g(rt) = e^{rt}$ והרי לנו הפונקציה הניתנת בעזרת הרבית r $(= \frac{p}{100})$ והמספר e.

עתה עומד האתגר להוכיח שלכל x ממשי (לאו דוקא חיובי) קיים $g(x) = \lim(1 + \frac{x}{n})^n$ וגבול זה הוא פונקציה השייכת למשפחה E. כל תלמיד מתחיל בחשבון אינפיניטסימלי מכיר בעיה זו.

והנה דוגמא של השערה נוספת (שאינה כה ידועה).
בבניה של פונקציה זו הנחנו שהמפקיד מוציא את כספו בהפרשי זמן שוים, אך מה יקרה אם הפרשי הזמנים $t_1, t_2, \ldots, t_n$ אינם דוקא שווים?

הרי צריך שוב לקבל

$$\left(1 + \frac{rt_1}{n}\right)\left(1 + \frac{rt_2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{rt_n}{n}\right) \longrightarrow e^{rt}$$

כאשר $\sum_{i=1}^{n} t_i = t$

ומספר החלוקות הולך וגדל, ו- t_i שואף לאפס.