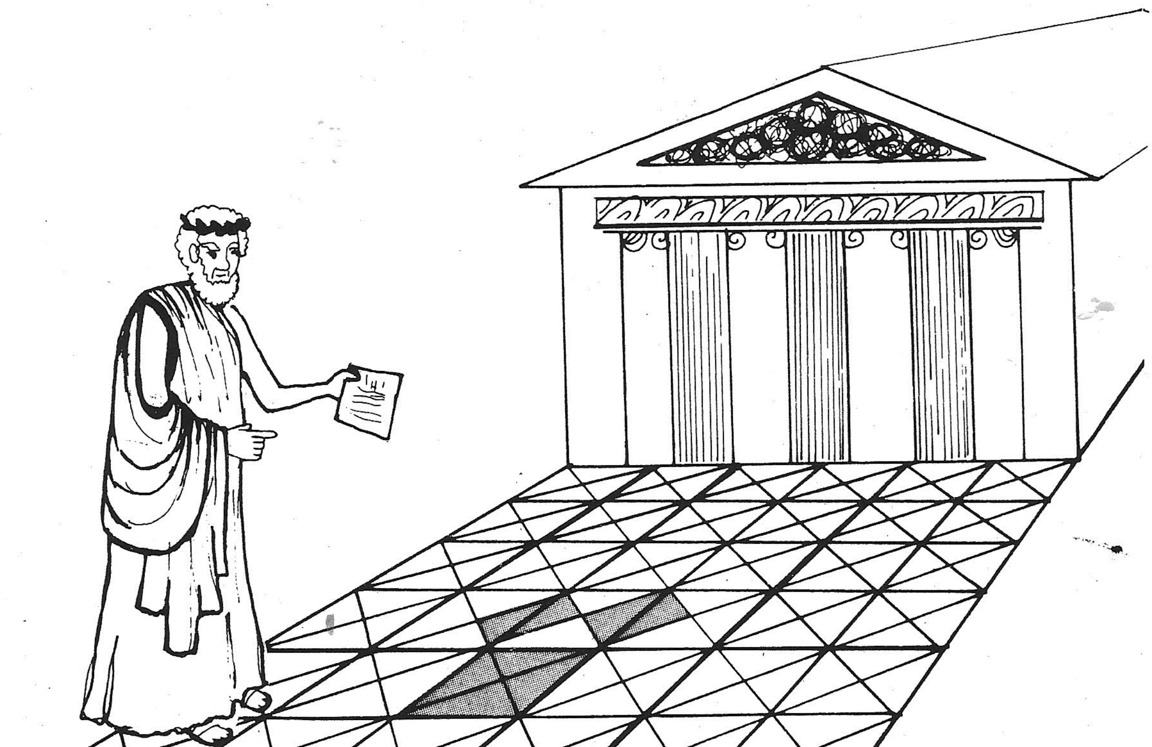
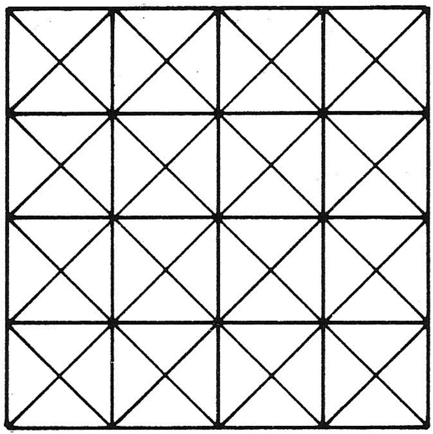
# הגזרות של פיתגורס

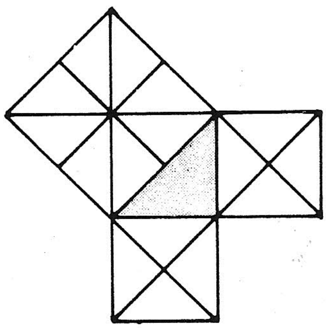
מאת גרשון רוזן



ישנם האומרים כי המתמטיקאי היווני, פיתגורס, עמד בחצר ביתו המרוצפת וגילה לפתע בין צורות הריצוף מבנה של משולש ישר זוית שווה שוקים.



מתוך ענין ספר את המרצפות סביב המשולש ומצא כי שטח שני הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.
אחת האפשרויות המתקבלות מריצוף זה היא:



הניתנת לבניה ע"י הרכבה פשוטה. בדיקת העקרון שברצוף זה אפשרית ע"י שמוש בחלקים הנתונים בלוח מס' 1, המצורף לתיק זה, ובדף השייך להרכבה זו בסוף המאמר.

ראוי לציין כאן, כי על-ידי ההרכבות ניתן להמחיש יפה את משפט פיתגורס בדרכים שונות ולקבל אף הפתעות.

הצעה נוספת הממחישה יפה את המשפט היא הרכבה מס' 2 המצורפת גם כן בתיק זה (הוכחה אלגברית לכך ניתן למצוא ב- [4]). את ההרכבה יש לבנות על הדף המתאים לה, בסוף המאמר.

לאחר תרגול זה, קל להווכח כי שטח הריבוע הגדול שווה לסכום שטחי שני הריבועים הקטנים.

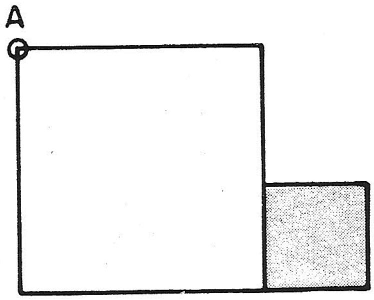
לבסוף, אפשר להדביק את שלושת הריבועים ואחד המשולשים, כדגם של משפט פיתגורס.
אגב, הוכחות שונות ומענינות למשפט פיתגורס ניתן למצוא ב-[3].

## הרכבות מרבועים

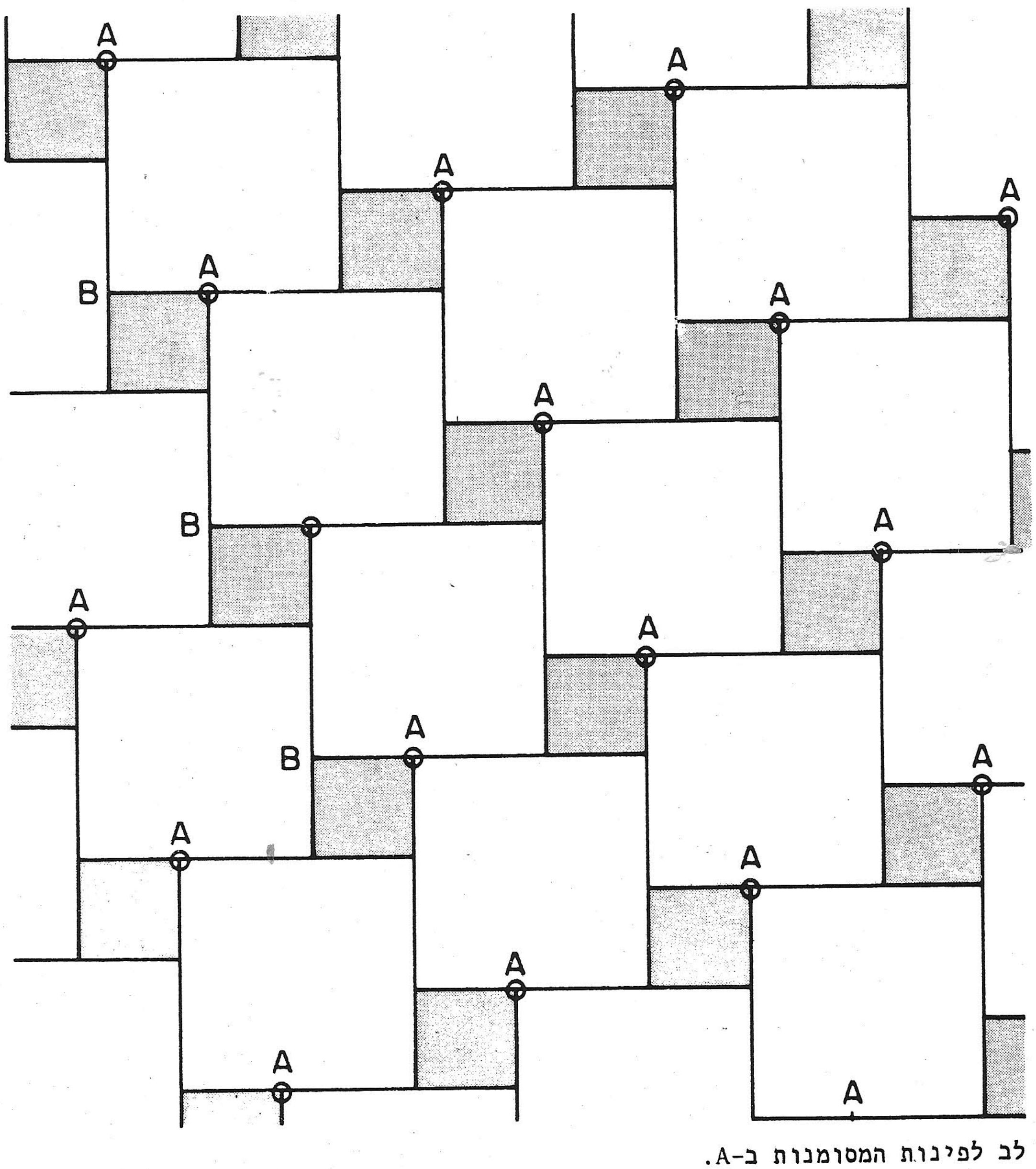
ישנן הרכבות נוספות ומעניינות יותר.

נחזור אל רעיון הריצוף ונבנה אותו משני ריבועים שונים, במבנה מחזורי.

המבנה הבסיסי בריצוף יהיה מהצורה:




והמבנה השלם של הרצפה יראה כך:

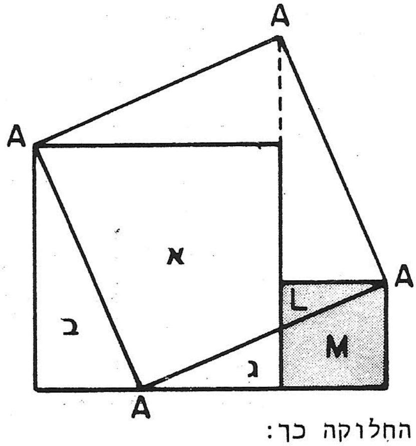



שים לב לפינות המסומנות ב-A.

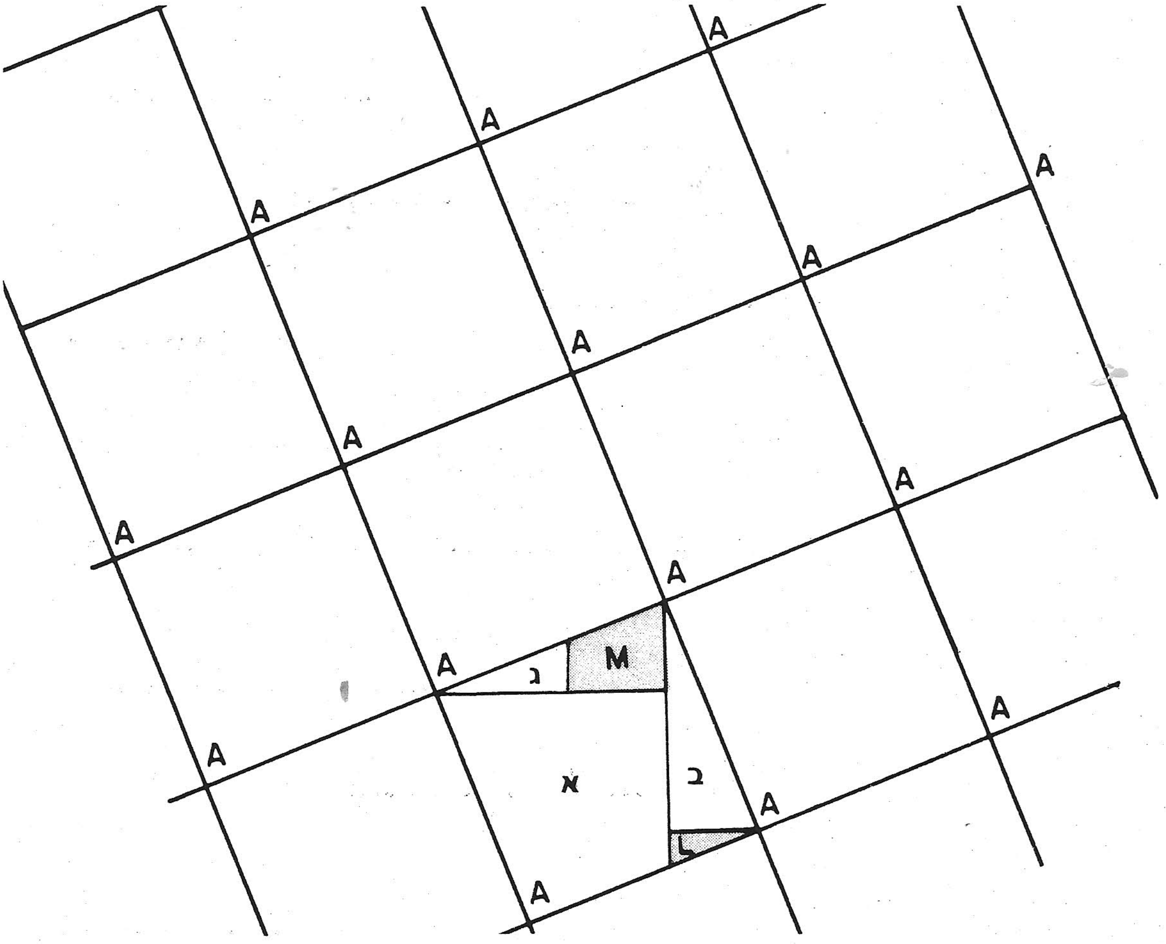
נחבר את כל פינות A (על נייר שקוף, באם נרצה להמשיך ולהשתמש בשרטוט המקורי) כדי לקבל רצף ריבועים (הוכח!), כאשר שטחו של כל ריבוע שווה לשטח שני הריבועים הבסיסיים מהם נבנתה הרצפה.

מטרתנו היא ליצור הרכבה של חלקים שיוכיחו את משפט פיתגורס, כלומר שני הריבועים המקוריים יהיו מונחים על ניצבי משולש ישר זוית ואילו הריבוע שיתקבל יהיה מונח על היתר של משולש זה.

מן השרטוט, לאחר חיבור הפינות A, נתקבלה חלוקה של שני הריבועים המקוריים בצורה הבאה:



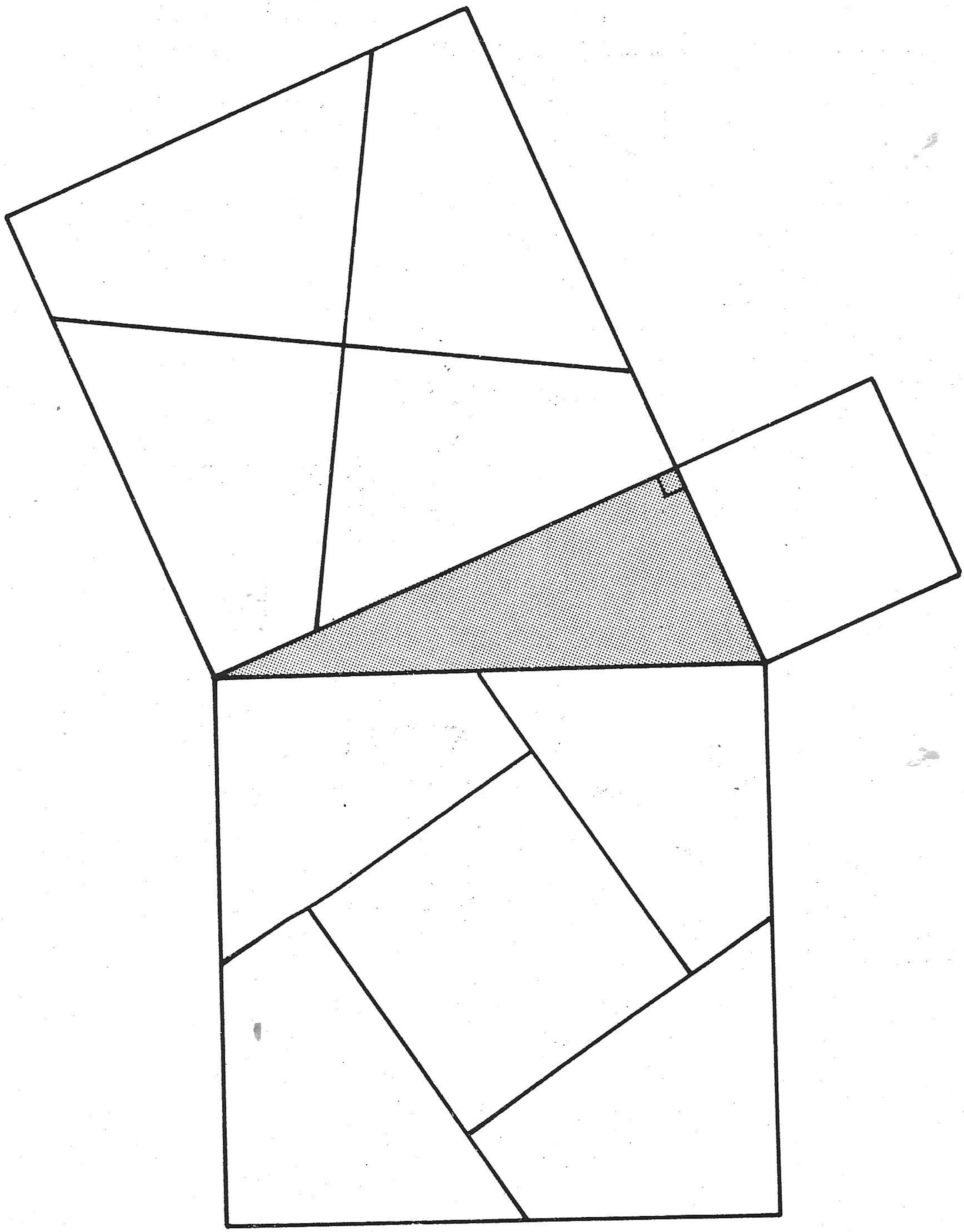

ועל פני הרצפה כולה תראה החלוקה כך:



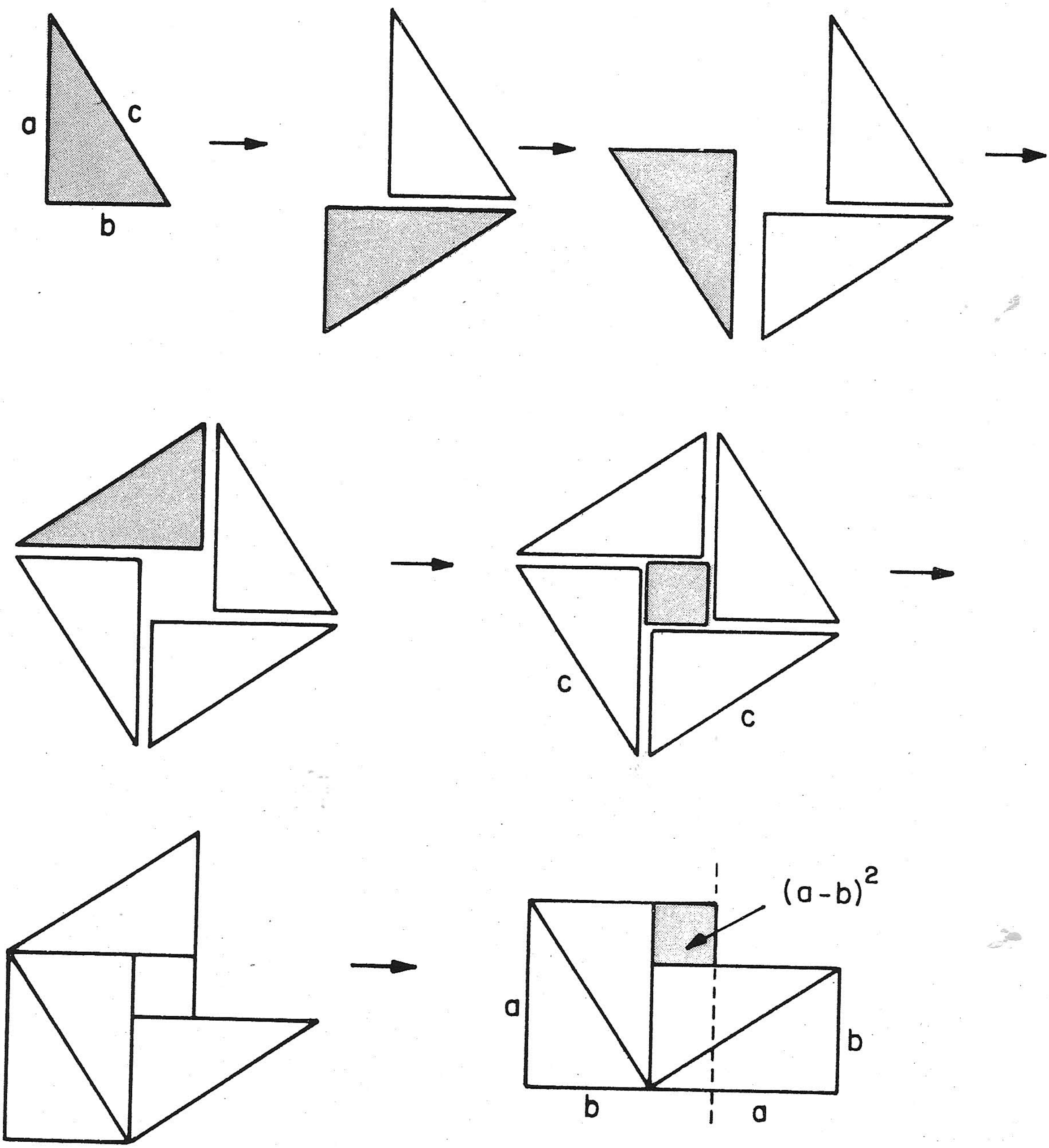
מבנה ריצוף זה מאפשר את גזירת הריבועים המקוריים לקבלת ההרכבה שבלוח מס' 3.

<u>הערה</u>: מתוך מבנה הריצוף, ברור כי בחירת נקודה אחרת במקום A תאפשר גזירה שונה של הריבועים המקוריים; וכך יוכל כל אחד לבנות לו "הוכחה" משלו למשפט פיתגורס.

לדוגמא, איזו נקודה יש לבחור, במקום A, כדי לקבל חלקים להרכבה של מבנה פריגאל? (ראה [5]).



ריצוף מענין אחר, עם הוכחה אלגברית, מביא פרופ' בונובסקי ([1]) כשטען כי יתכן שפיתגורס הוכיח את משפטו בעזרת יחידות מרצפת בצורה הבאה:




או באופן אלגברי:

$$c^2 = (a - b)^2 + 4(\tfrac{1}{2}ab)$$
$$= (a - b)^2 + 2ab$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab$$

כלומר:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

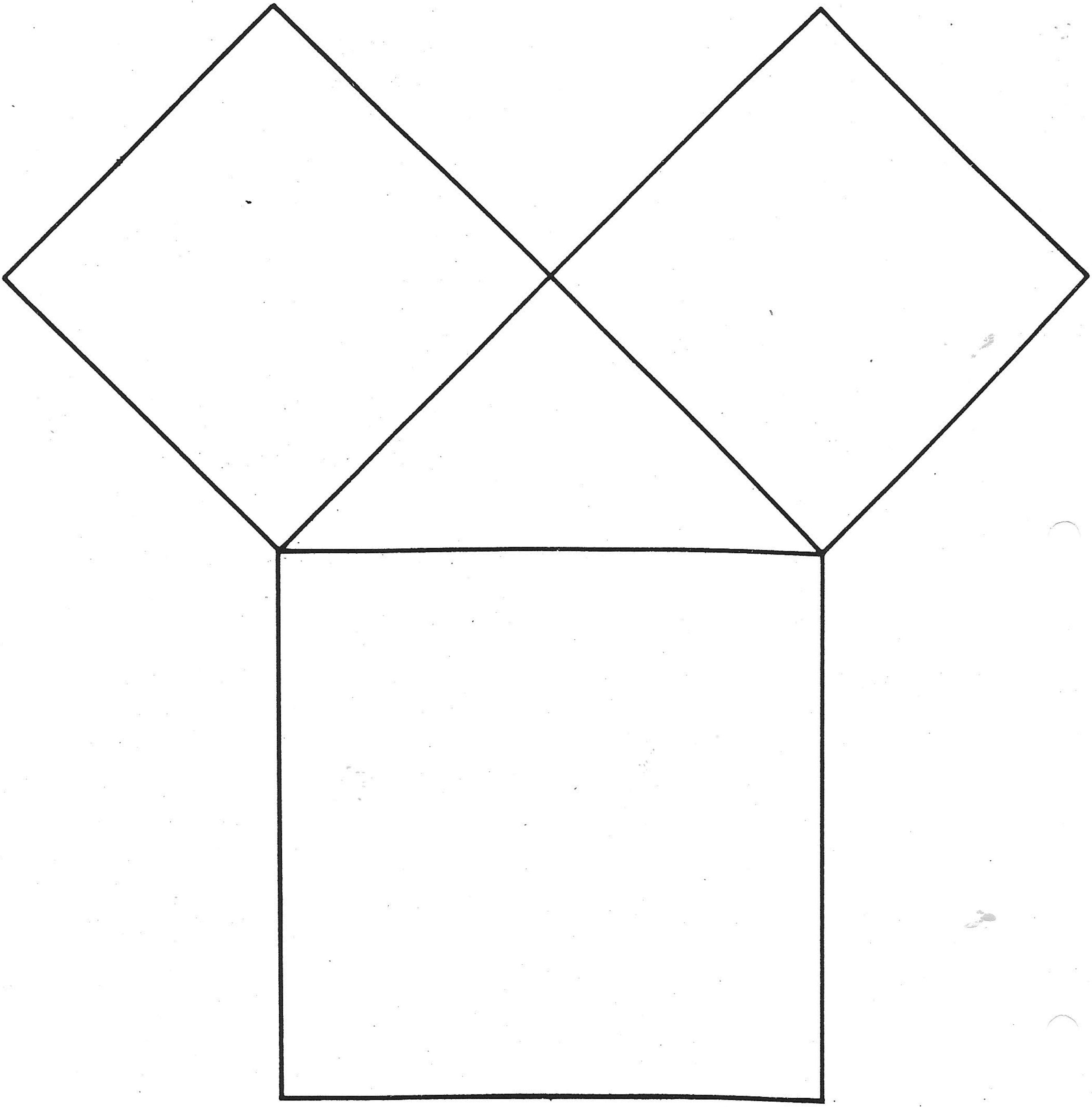
**אזהרה**

**לכאורה**, שיטת ה"הוכחה" באמצעות הרכבה היא שיטה נוחה, אלא שגם בה יש סכנה. את מידת הסיכון שבשיטה זו נראה בהרכבה הניתנת בלוח מס' 4.


**ספרות**

1. Bronowski, J., The Ascent of Man, Little - Boston, U.S.A.
2. יובנק, ו., "לו היה לפיתגורס לוח גיאומטרי" - שבבים, תיק מס' 2.
3. ליצמן, ו., "משפט פיתגורס", הוצאת מדע ואמנות, תרפ"ז, תל אביב - ירושלים.
4. "פרקי מתמטיקה" אלגברה II, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות תשל"ב.
5. "הבה נלמד מתמטיקה", ספר ג', המחלקה להוראת המדעים, רחובות, תש"ל.
6. School Mathematics Project, Book E., Cambridge University Press. 1970
7. הנקודות $\sqrt{n}$ על ציר המספרים - שבבים, תיק מס' 8.

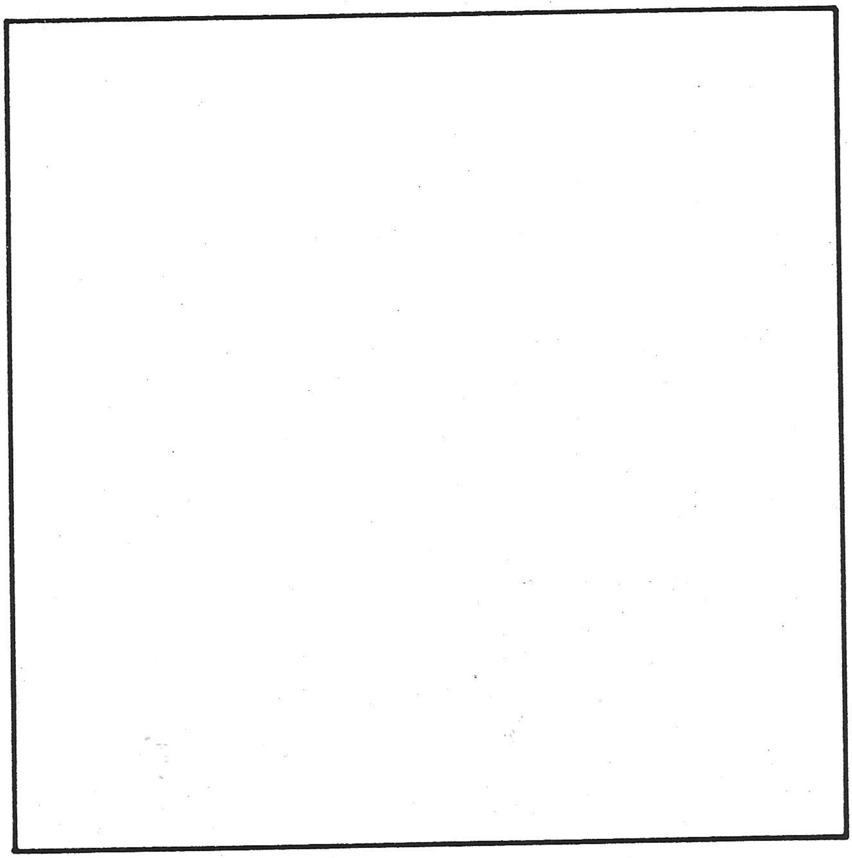
# הרכבה מס' 1



א) על הריבוע הגדול, בנה ריבוע מכל שמונת המשולשים.

ב) על אחד הרבועים הקטנים,בנה ריבוע מארבעה משולשים.

# הרכבה מס' 2

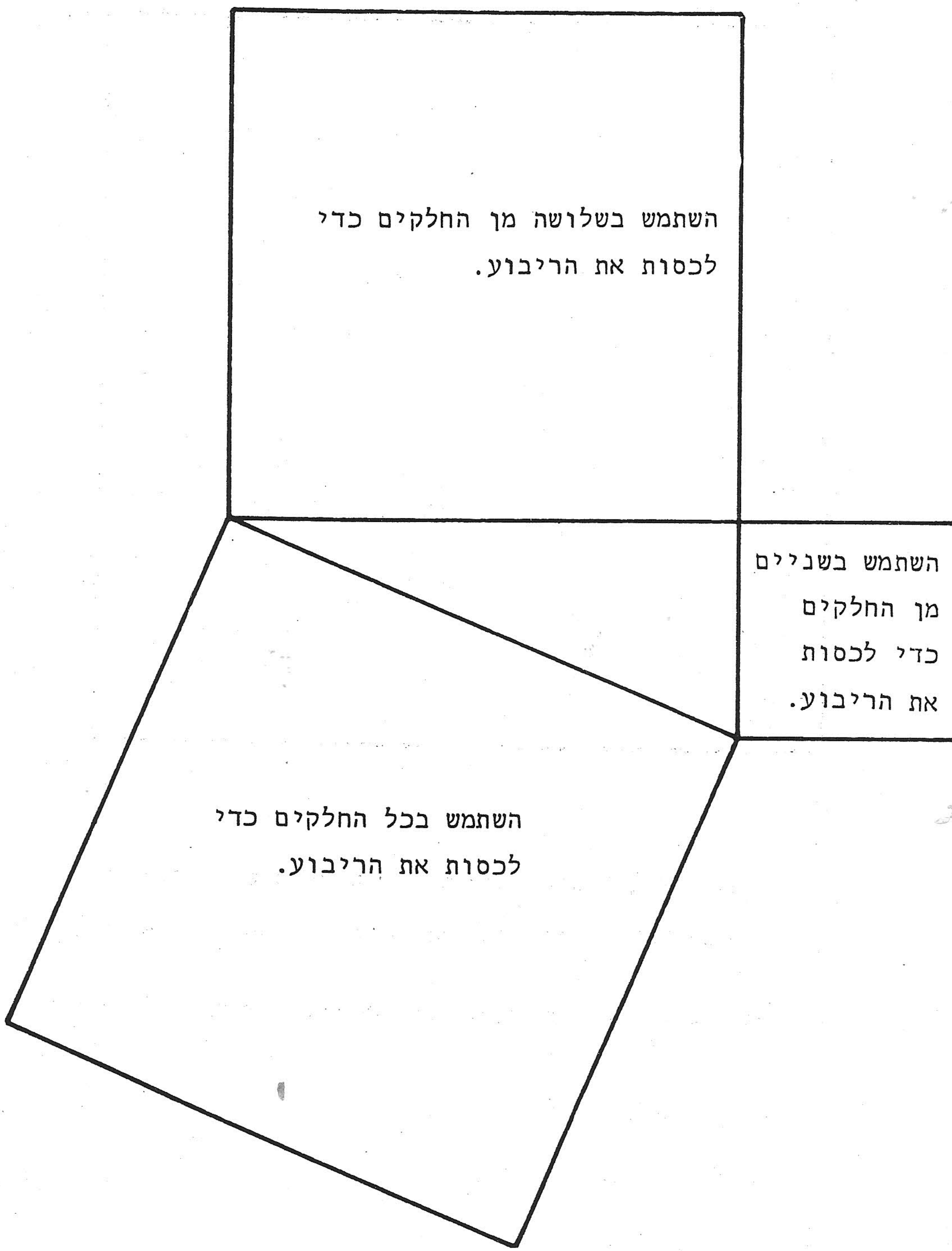


א) ארגן את ארבעת המשולשים והריבוע הגדול ביותר לצורת ריבוע.

ב) ארגן את ארבעת המשולשים, הרבוע הבינוני והרבוע הקטן לצורת ריבוע.

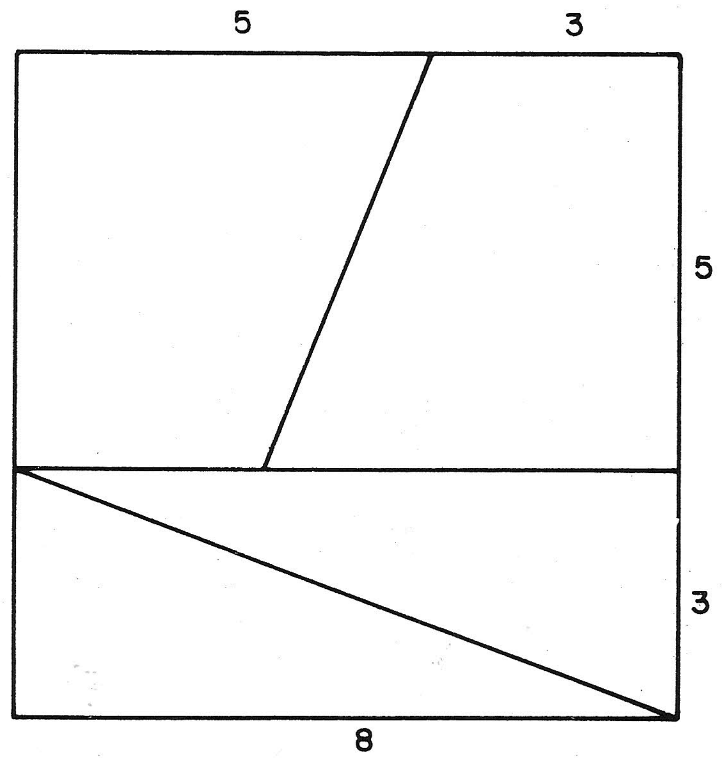
מה אפשר לומר על הקשר בין הריבוע הגדול ושני הריבועים הקטנים?

# הרכבה מס' 3


השתמש בשלושה מן החלקים כדי
לכסות את הריבוע.
השתמש בשניים
מן החלקים
כדי לכסות
את הריבוע.
השתמש בכל החלקים כדי
לכסות את הריבוע.

## הרכבה מס' 4

כאשר תשתמש בחלקים הנתונים בלוח מס' 4 תוכל לבנות רבוע ששטחו 64 סמ"ר באופן הבא:




מאותם ארבעת החלקים, שגודלם ידוע לך, בנה:

א) מלבן (או משולש) ששטחו 65 סמ"ר.

ב) צורה גאומטרית אחרת ששטחה רק 63 סמ"ר.

פרדוקס או טעות?