מה אפשר לשאול?
פיתוח בעייה אחת בגיאומטריה של המישור

מאת: שמואל אביטל, המחלקה להכשרת מורים, הטכניון, חיפה
ומוריס לובר, המוסד החינוכי, קבוץ ברעם

1. הוראה סטטית ודינמית

התפיסה של המתמטיקה, כפי שהיא משתקפת ברוב ספרי הלימוד ובדרכים שבהן היא מוגשת לתלמידים בבתי ספר, היא תפיסה סטטית; לומדים יחידה מסויימת, מסיימים אותה ועוברים ליחידה אחרת. גישה זאת מתאימה אולי להשפקה הרואה במתמטיקה אך ורק מכשיר עזר לשימוש במדעים אחרים, במקצועות השונים, או בחיי יום יום. ניתוח קל יגלה לנו, שכדי למלא צרכים אלה אפשר בקלות לקצץ בתכנית המתמטיקה, בשביל רוב תלמידי בתי הספר, עד למינימום אבסורדי. רוב התלמידים לא יזדקקו לעולם לפתרון משוואות ריבועיות, או להבנת הפונקציות הטריגונומטריות וודאי לא להוכחת המשפטים הגיאומטריים. כיום, עם הפצת מחשב הכיס האלקטרוני, לא יזדקק הרוב אפילו לחישובים אריתמטיים פשוטים.
מסתבר לכן, שאנו מלמדים מתמטיקה, לא רק לשם שימושה בתחומים אחרים, אלא גם למען ערכיה היא. ערכים אלה ניתנים להקנייה בעיקר ע"י פיתוח דרכי החשיבה המונחים ביסוד מקצוע זה.

2. דוגמאות מן ההתפתחות ההיסטורית

כל המכיר את ההתפתחות ההיסטורית של המתמטיקה יודע שחלק ניכר מעושרה מקורו בדינמיות שבה: בחוסר המנוחה וחוסר הסיפוק של יוצריה במה שהושג ובחיפוש מתמיד אחר התפתחויות, הנוצרות ע"י שינוי פרט זה או אחר, במערכת שהונחה ביסוד יחידה מסויימת שפותחה.
כך למשל ההרחבה העצומה שחלה בגיאומטריה במאה הי"ח והי"ט התאפשרה הודות לשאלה: מה יקרה אם נשמור על כל מערכת האקסיומות, אלא שבמקום מקביל יחיד, דרך נקודה נתונה לישר נתון, נרשה קיום יותר ממקביל יחיד (או אף מקביל)? התפתחות מושג החזקה התאפשרה בעקבות השאלה: איזו משמעות נוכל לתת לחזקה אם נרשה שימוש גם במעריך שהוא אפס, שבר רציונלי, או מספר אירציונלי?

---

* מאמר זה הוא המשך למאמר שפרסם המחבר בעיתון למורים בטורנטו, קנדה בשם:
Practice through inquiry. <u>Orbit</u>, 1, 5 (Dec. 1970)
הגישה במאמר זה תואמת את הגישה שהונהגה במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן, לפתח מערכות של נושאים לחקירה עצמית של התלמידים.

3. מה אפשר לשאול?

נראה שחשוב לפתח גישה כזאת גם אצל תלמידי ביה"ס. השאלה של המורה: "מה נוכל לשאול?" צריכה להביא לא רק לשאלות הסטריאוטיפיות: "המורה, כיצד פותרים בעיה זאת?" או "המורה, כיצד ניגשים לפתרון?" אלא גם לשאלות: מה יקרה אם נשנה פרט זה או אחר בהנחות שהונחו, או בדרישות שנדרשו, בפיתוח יחידה מסויימת?

בעיקר חשובות כאן שאלות שהתלמיד יכול לחקור, לפחות את ראשיתן, באמצעים שברשותו. חקירה זאת תביא את התלמיד לניסוח השערות ולפעמים גם להוכחתן. אין זה הכרחי שהתלמיד יוכל לנסח השערות מקיפות העונות לכל בעיה שהוא העלה. כך גם לא חשוב שיהיה ביכולתו, לפי הידע שבידו, להוכיח את ההשערות שהוא מנסח. כמובן שטוב מאד אם הדבר הוא כן. אולם יש ערך חינוכי רב בעצם החקירה המתמטית. כל השערה הגיונית שהתלמיד מעלה היא מעשה יצירה, אף אם היא חלקית ביותר, ואף אם התלמיד לא הצליח להוכיחה. כמובן שעלינו לחתור לכך שהתלמיד יוכיח או יסתור את השערותיו ע"י שימוש במיטב המידע שבידו- אולם כפי שאמרנו: חקירה טובה דינה כדין מעשה.

4. דוגמה מגיאומטריה: נקודות ברוחק שווה משתי נקודות נתונות:

נדגים כאן את דברינו בדוגמות ממשפט אחד, מגיאומטריה של המישור, הנלמד בכיתה ח' או ט' בחטיבת הביניים. יש להניח שכל תוכנית להוראת גיאומטריה כוללת את המשפט: המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור הנמצאות ברוחק שווה משתי נקודות A, B נתונות, הוא האנך האמצעי של הקטע $\overline{AB}$. דרך אגב, גם משפט זה יכול להתקבל תחילה כהשערה שמקורה בחקירה עצמית של תלמידים החוקרים, ע"י בניית נקודה נקודה, כתשובה לשאלה: באיזו תצורה מסתדרות הנקודות במישור הנמצאות ברוחק שווה מ- A ומ-B ?

בהקשר למשפט שציטטנו נברר תחילה: כיצד נוכל לבטא בדרך שונה את העובדה שנקודות מסויימות במישור נמצאות ברוחק שווה משתי נקודות נתונות. התשובה לשאלה זאת צריכה להיות, או שהפרש הרוחקים משתי הנקודות הוא אפס, או שיחס הרוחקים משתי הנקודות. הוא 1. כאן באה השאלה: "מה נוכל לשאול הלאה"?

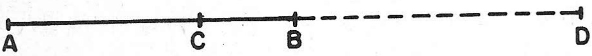
5. הפרש הרוחקים מספר חיובי:

כשאלות ראשונות הייתי מצפה ל: מה יקרה אם במקום הפרש אפס, ניקח כהפרש מספר חיובי קבוע כלשהו? שאלה זאת יוכל כל תלמיד לחקור בעצמו ע"י קביעת נקודות במישור, בעזרת סרגל ומחוגה, המקיימות את הדרישות הנ"ל. התלמיד יגלה שקבוצת הנקודות איננה חסומה ויימצאו נקודות המקיימות את הדרוש גם ברוחק רב כרצוננו משתי הנקודות A ו B.
ע"י ריבוי נקודות הנקבעות בעזרת סרגל ומחוגה יכול התלמיד לראות שהנקודות המקיימות את התנאי ערוכות לפי עקום המורכב משני ענפים. אין להניח שהתלמיד יוכל להוכיח את כל ההשערות שלו, אבל כאשר בהמשך לימודיו יגיע התלמיד ליכולת הוכחה אנליטית, הרי אז תפיסתו ולימודו יהיו קלים יותר וזכירת הדברים תהיה יותר בת קיימא. ניסויים של החוקר דניאל ברלין מראים שהדברים הנלמדים בדרך כזאת נזכרים טוב יותר לאורך ימים.

6. יחס רוחקים שונה מ-1

נקווה שתצוץ השאלה: ומה יהיה אם נדרוש יחס רוחקים קבוע אבל שונה מ- 1, בין שני הרוחקים משתי הנקודות A ו- B ? נניח שיחס זה הוא $q = \overline{PA}/\overline{PB}$.

כאן אפשר לצפות שמספר ההשערות שיעלה התלמיד יהיה רב יותר. כאשר יחקור התלמיד את הבעיה ע"י בניה נקודה נקודה, יגלה גם שישנן שתי נקודות על הישר העובר דרך שתי הנקודות A ו- B המקיימות את תנאי השאלה (ראה שרטוט). נקודה אחת, C, מחלקת את הקטע $\overline{AB}$ מבפנים ביחס הנתון, והשניה, D, מחלקת אותו מבחוץ ביחס זה. ברור גם שמופיעות נקודות משני צידי הקטע AB. תופיע לכן ההשערה שהמקום הגיאומטרי סימטרי ביחס לישר AB.



אחר כך יתברר לו כי קבוצת הנקודות היא במקרה זה חסומה כי קל לראות, באופן אינטואיטיבי, שעבור כל שני מספרים אשר כל אחד מהם שואף לאין סוף, היחס ביניהם שואף ל- 1.

בהמשך, כאשר התלמיד ילמד על תכונות חוצי הזוית הפנימית והחיצונית במשולש, יוכל להוכיח שהמעגל שקוטרו CD , הוא המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, שיחס רוחקיהן מקצות הקטע $\overline{AB}$ הוא q (מעגל כזה נקרא מעגל אפולוניוס היווני). כי אמנם הזוית בין חוצה הזוית הפנימית (הזוית בקודקוד משולש שבסיסו AB) וחוצה הזוית החיצונית של אותו קודקוד היא זוית ישרה. כלומר, לפנינו מקום גיאומטרי של נקודות שמהן רואים קטע נתון בזוית ישרה.

7. הפרש ריבועי הרוחקים

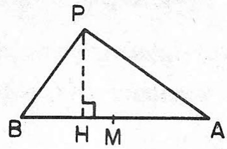
עדיין לא נוצלו כל האפשרויות לחקירה: ומה יהיה אם ....? ואם למשל נדרוש שהפרש ריבועי הרוחקים יהיה גודל קבוע? נציע לתלמידים לבנות נקודה נקודה את התצורה הגיאומטרית במישור, אשר הפרש ריבועי שני הרוחקים של כל נקודה עליה משתי נקודות נתונות A ו-B הוא גודל קבוע c .

כדי לבצע בנייה זאת יזדקק התלמיד לבניית עזר. רעיון לבנייה כזאת מתקבל מיד ממשפט פיתגורס. התלמיד יבנה תחילה קטע שמידתו $\sqrt{c}$ ואח"כ יבחר כרוחקים את הקטעים המשלימים את הקטע $\sqrt{c}$ למשולש ישר זוית, שבו הקטע שבנינו הוא אחד הניצבים.

התלמידים יופתעו כאשר יגלו כי הנקודות מסתדרות לאורך קו ישר המאונך לקטע $\overline{AB}$ (או שני קוים אם בהפרש המבוקש הרוחק שממנו מחסרים נלקח פעם מנקודה A ופעם מנקודה B).

ההוכחה האנליטית שאומנם המקום הגיאומטרי הוא קו ישר, היא פשוטה ביותר וכל תלמיד שלמד את הצעדים הראשונים בגיאומטריה אנליטית יוכל לפתרה. הוכחה שאיננה תלויה במערכת צירים מתקבלת ע"י שימוש במשפט פיתגורס.

תהיה P נקודה במקום הגיאומטרי, כלומר: $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = c$



נוריד $PH \perp AB$, H על AB. הרי

$$c = \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = (\overline{PH}^2 + \overline{AH}^2) - (\overline{PH}^2 + \overline{HB}^2) =$$
$$= \overline{AH}^2 - \overline{HB}^2 = (\overline{AH}+\overline{HB})(\overline{AH}-\overline{HB}) = \overline{AB}\ (\overline{AH}-\overline{HB})$$

נניח עתה שנקודת האמצע של הקטע AB היא M הרי אז השוויון האחרון אומר לנו כי:

$$c = \overline{AB}(\overline{AH}-\overline{HB}) = \overline{AB}\cdot[(\overline{AM}+\overline{MH}) - (\overline{BM}-\overline{MH})] = \overline{AB}\cdot 2\overline{MH}$$

כלומר $c = 2\overline{AB}\cdot\overline{MH}$ ולכן $\overline{MH} = c/2\overline{AB}$

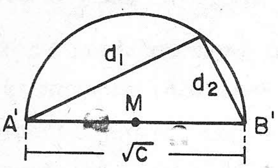
פירוש הדבר שהקטע $\overline{MH}$ קבוע ובלתי תלוי במקום הנקודה P .

הנקודה H היא עיקבה (היטל) של הנקודה P . לכן האפשרות היחידה ש- $\overline{MH}$ יהיה קבוע הוא ש- H קבועה וזה יתכן רק אם כל הנקודות P יש להן אותה עיקבה, כלומר הן נמצאות על אותו אנך לישר AB העובר דרך H .

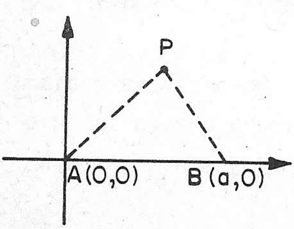
אם נתבונן בהפרש $\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2$ נקבל ישר שני, העובר דרך נקודה 'H, שהוא סימטרי ל-H ביחס ל- M .

8. סכום ריבועי הרוחקים מקצות הקטע AB קבוע

גם כאן התלמיד יכול לבנות חלק מקבוצת הנקודות נקודה נקודה. לשם כך עליו לבנות תחילה קטע 'A'B שאורכו $\sqrt{c}$. אח"כ בונים על קטע זה, כקוטר, חצי עיגול. כל נקודה על חצי המעגל מקיימת $d_1^2 + d_2^2 = (\sqrt{c})^2 = c$. בשלב האחרון קובעים נקודות P כאלה שרוחקיהן מ-A ומ- B הן d_1 ו-d_2. כמובן שיתקיים $d_1^2 + d_2^2 = c$. שוב מתקבלת קבוצת נקודות שהיא סימטרית ביחס לקטע AB.



התלמיד יכול להוכיח שקבוצת הנקודות היא מעגל. (i) בדרך אנליטית: נבחר מערכת צירים ונניח שקצות הקטע AB הן (a,0) (0,0). ניקח נקודה p(x,y) המקיימת את התנאים, כלומר: $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = c$.



כלומר: $c = [(x-0)^2 + (y-0)^2] + [(x-a)^2 + (y-0)^2] =$

$$= (x^2+y^2) + [(x-a)^2 + y^2] =$$
$$= 2x^2 + 2y^2 - 2ax + a^2$$

זו משוואת מעגל. נוכל לכתוב משוואה כזאת בצורה:

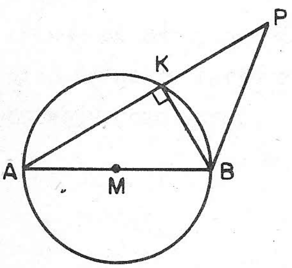
$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{c}{2} - \frac{a^2}{4}$$

כלומר, מרכז המעגל הוא בנקודה $(a/2,0)$ ורדיוסו הוא: $\sqrt{\frac{2c - a^2}{4}}$.

(ii) אפשר להגיע לתוצאה זאת בעזרת חישוב אלגברי בלי שימוש במערכת צירים. לשם כך יש להשתמש בנוסחה לחישוב אורך התיכון במשולש לפי אורך שלוש הצלעות, ואמנם הנוסחה לחישוב אורך התיכון על הצלע AB הוא:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2) - \overline{AB}^2}$$

אולם, במקרה שלנו $c = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ גודל קבוע. גם $\overline{AB}^2$ הוא גודל קבוע (ריבוע הרוחק בין הנקודות הנתונות). כלומר, אורך התיכון קבוע ואינו תלוי במקום הנקודה P. זה יתכן רק אם המקום הגיאומטרי הוא מעגל שרדיוסו כאורך התיכון הנ"ל ומרכזו באמצע הקטע $\overline{AB}$.



(iii) הוכחה אחרת מבוססת על מושג החזקה של נקודה ביחס למעגל. כמו קודם A,B נקודות נתונות. P נקודה המקיימת $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = c$ (c קבוע). נבנה מעגל בקוטר $\overline{AB}$. אנו מניחים ש- P נופלת מחוץ למעגל ו- $\overline{PA}$ חותכת מעגל זה בנקודה K.

לפיכך:

$$c = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (\overline{PK} + \overline{KA})^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KA}^2 + 2\overline{PK}\cdot\overline{KA} + (\overline{PK}^2 + \overline{KB}^2)$$

שים לב! הזוית ליד K היא ישרה. מכאן:

$$c = 2\overline{PK}^2 + 2\overline{PK}\cdot\overline{KA} + (\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2) = 2\overline{PK}(\overline{PK} + \overline{KA}) + \overline{AB}^2 =$$

$$= 2\overline{PK}\cdot\overline{PA} + \overline{AB}^2$$

המכפלה $\overline{PK}\cdot\overline{PA}$ היא חזקת הנקודה P ביחס למעגל שקוטרו $\overline{AB}$. חזקה זאת ביחס למעגל שקוטרו $\overline{AB}$ קבועה עבור כל הנקודות על מעגל, שמרכזו במרכז המעגל הנתון, ורדיוסו שווה ל- $\sqrt{R^2 + \overline{PK}\cdot\overline{PA}}$ כאשר $R = \overline{AB}/2$.

במקרה שלנו: $c = 2\overline{PK}\cdot\overline{PA} + \overline{AB}^2 \Longrightarrow \overline{PK}\cdot\overline{PA} = (c - \overline{AB}^2)/2$ ולכן רדיוס המקום הגיאומטרי הוא $\sqrt{(2c - \overline{AB}^2)/4} = \sqrt{\overline{AB}^2/4 + (c - \overline{AB}^2)/2}$ (כמקודם*).

---

* אולי אחד הקוראים ימצא הוכחה בעזרת משפטים אלמנטריים יותר, שהמקום הגיאומטרי הוא מעגל.

9. מה נשאל עוד?

יש לשער שאם המורה יעלה בכיתה את השאלה מה עוד אפשר לשאול, רוב התלמידים יציעו לדון בחזקה השלישית או הרביעית של הרוחקים. אולם זה מרחיק ביותר את המוחשיות ומקטין את כושר הדימוי של הבעיה. שאלה מעניינת ביותר היא כנראה לדון ב- 3 נקודות. כלומר, נתונות 3 נקודות במישור, ואנו מחפשים את קבוצת הנקודות (המקום הגיאומטרי) אשר שלושת הרוחקים שלהן מ- 3 הנקודות הנתונות, שווים זה לזה. התשובה פשוטה ביותר, אם כי היא עשויה להפתיע תלמידים מסויימים.

מעניינת הבעיה על המקום הגיאומטרי של נקודות אשר סכום ריבועי הרוחקים שלהן משלוש נקודות נתונות הוא גודל קבוע. בעייה זו פותחת דרך לחקירת מספר רב של מקרים ספציפיים כגון כאשר 3 הנקודות הן על (i) ישר אחד או (ii) קודקודים של משולש שווה צלעות (iii) נקודה אחת היא על האנך האמצעי של השתיים האחרות ועוד. מעניינת השוואת התוצאות של המקרה הראשון והשלישי - אולם אנו משאירים זאת לקורא.

כיוון אחר של שאלות הוא להחליף את הנקודות הנתונות בישרים נתונים. כלומר, לשאול על סכום או הפרש רוחקים משני ישרים, סכום או הפרש ריבועי רוחקים משני ישרים וכו' על כך אולי בפעם אחרת.