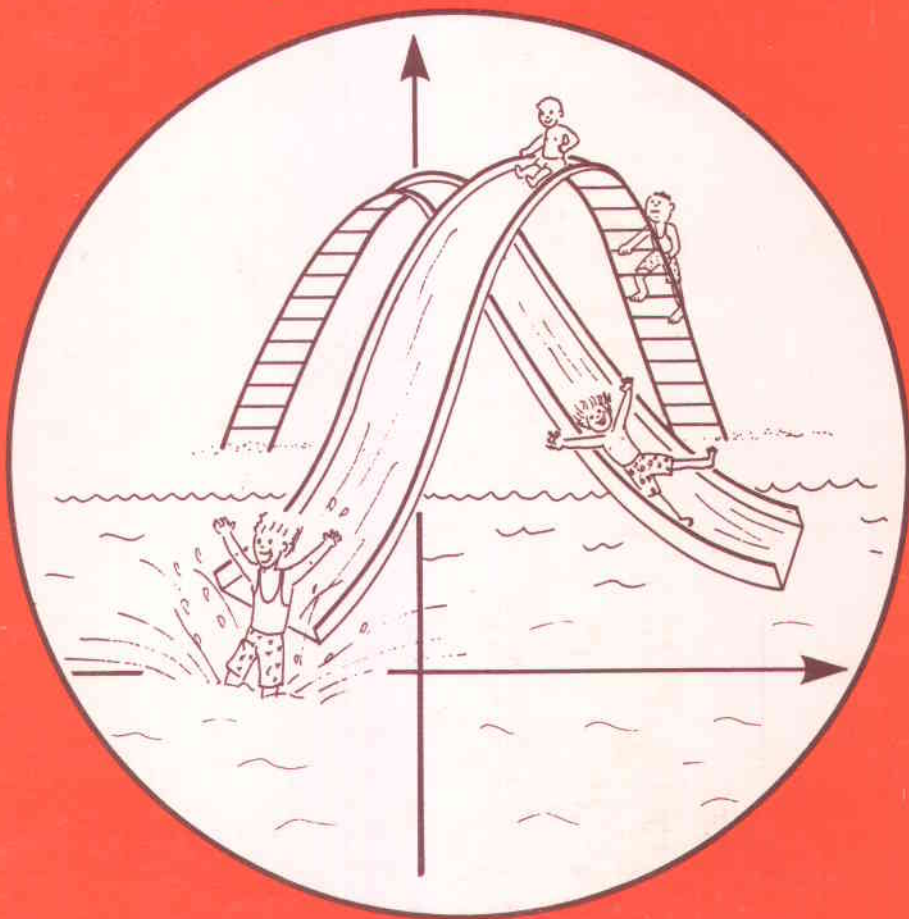


פרקי מתמטיקה

פונקציות



המחלקה להוראת המדעים מכון ויצמן למדע



פרקי מתמטיקה

פונקציות

מהדורה ניסויית



המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

יוצא לאור במסגרת

המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט

מיסודם של

משרד החינוך והתרבות, האוניברסיטה העברית בירושלים ומכון ויצמן למדע, רחובות

חובר על ידי:

צפורה רזניק

ייעוץ:

פרופ' מקסים ברוקהיימר

ד"ר מיכאל קורן

רינה הרשקוביץ

גרפיקה ושדוטטים:

רחל בוקשפן

פאולינה קרבץ

אורי למברגר

סדר:

אות באות בע"מ, אשדוד

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם.
לאחסן במאגר מידע. לשדר או לקלוט
בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי או מכני
או אחר - כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה.
שימוש מסחרי מכל סוג שהוא בחומר הכלול בספר זה
אסור בהחלט אלא ברשות מפורשת בכתב מהמוציא לאור.

**מהדורה זו חוברה על סמך מהדורות קודמות
מאת: רוחמה אבן וברוך שוורץ**



**כל הזכויות שמורות
מכון ויצמן למדע**

**נדפס בישראל תשמ"ח-1987
מהדורה מתוקנת - דפוס קל בע"מ, תש"ן-1990**

מהדורה חוזרת, תש"נה - 1994, דפוס אייל בע"מ

תוכן

פרק א:	דרכים שונות להצגת פונקציה	7-82
	מהי פונקציה?	7
	הצגת פונקציה בדרך אלגברית	27
	הצגת פונקציה בדרך גרפית	51
	חלוקת התחום בהצגת פונקציה	75
פרק ב:	תכונות של פונקציה	83-126
	מה קורה בתחום חלקי?	83
	זוגות של פונקציות	103
פרק ג:	הפונקציה הקווית	127-194
	קצב השינוי של פונקציה קווית	127
	חוק ההתאמה של פונקציה קווית	143
	פונקציה קווית בחיי יום יום	163
	משפחות של פונקציות	171
	אל התבנית על-ידי חישוב הפרמטרים	186
פרק ד:	הפונקציה הריבועית	195-270
	תכונות נוספות של פונקציה	195
	שלב I: כמה מקורות לכל תמונה?	211
	שלב II: צורת הגרף	221
	שלב III: מינימום או מקסימום?	233
	שלב IV: נקודות אפס של פונקציה ריבועית	243
	בעיות	251
	שלב V: הפרמטרים של הפונקציה הריבועית	258

271-320	תבניות פסוק ריבועיות	פרק ה:
271	משוואות ריבועיות	
282	תבניות פסוק מורכבות	
287	אי־שוויון ריבועי	
292	משוואות פרמטריות	
296	זוגות של פונקציות	
302	מן הפתרונות אל המשוואה הריבועית	
309	תבניות פסוק לקבוצות של נקודות	
316	תבניות נוספות לקבוצות של נקודות	

לתלמיד

הספר שלפניך עוסק במושג הפונקציה שהוא אחד המושגים היסודיים במתמטיקה ובמדעים. החומר הכלול בו הוא בסיס להמשך הלימודים בנושא הפונקציה בחטיבה העליונה, והוא כתוב כך שאפשר ללמוד אותו בעבודה עצמית (עם הדרכה).

בכל פרק, מספר סעיפים מחולקים לסעיפי משנה. אחרי כל סעיף יש תרגילים המחולקים לאותם סעיפי משנה, ומאפשרים תרגול ויישום החומר שנלמד (כולל תשובות לחלק מהתרגילים). מספר התרגילים בכל סעיף הוא רב כדי לאפשר בחירה מתאימה.

לעיתים, שפע המושגים החדשים עלול לגרום להרגשה של חוסר שליטה מספקת.

חשוב להמשיך ולהתקדם! בהמשך הלימוד יש הזדמנויות נוספות לתרגל את החומר הקודם ו"לעכל" אותו.

הדפים "להנאתך" ו"חקור וגלה" מאפשרים חזרה והעמקה בסעיפים מסוימים בחומר. ניתן להעזר בהם לא רק במשך לימוד הסעיף אלא גם לאחר מכן.

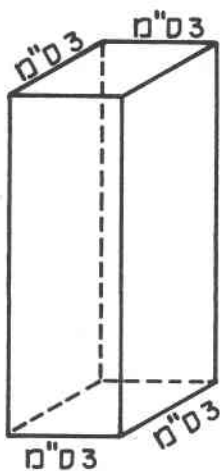
אנו מקווים שתהנה מלימודיך בספר זה.

פרק א: דרכים שונות להצגת פונקציה.

מהי פונקציה?

התאמות וסימונן.

1. נניח כי בידך חוט מתכת גמיש באורך 60 ס"מ, והטילו עליך להרכיב מכל החוט שלד של תיבה שבסיסה ריבוע (ראה ציור).



נניח כי החלטת כי אורך צלע הריבוע של בסיס התיבה יהיה 3 ס"מ.

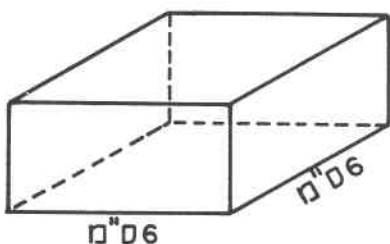
א) מה יהיה הגובה המתאים לאורך זה?

ב) מה יהיה הנפח המתאים?

לכחת איך
אחשבים נפח של תיבה?
הנפח הוא שטח הבסיס
בגובה.



2. דניאל הרכיב שלד של תיבה שבסיסה ריבוע מחוט מתכת באורך 60 ס"מ, כך שאורך צלע בסיסה 6 ס"מ.

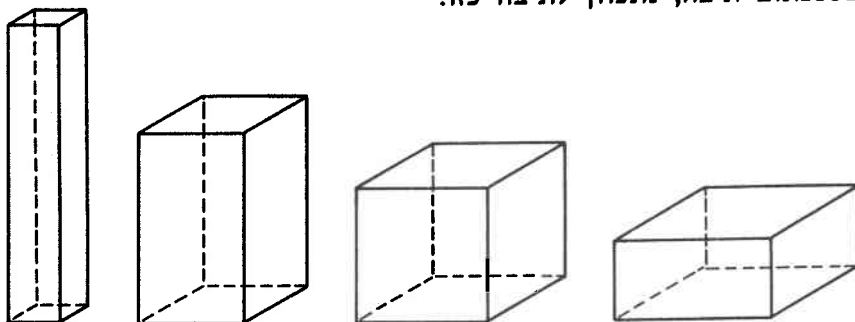


א) מהו אורכה, רוחבה וגובהה של התיבה?

ב) מה נפחה?

בתרגילים הבאים נדון בתיבות שבסיסן ריבוע, אשר השלד שלהן הוכן מחוט מתכת באורך 60 ס"מ.

כשנכתוב תיבה, נתכוון לתיבה כזו.

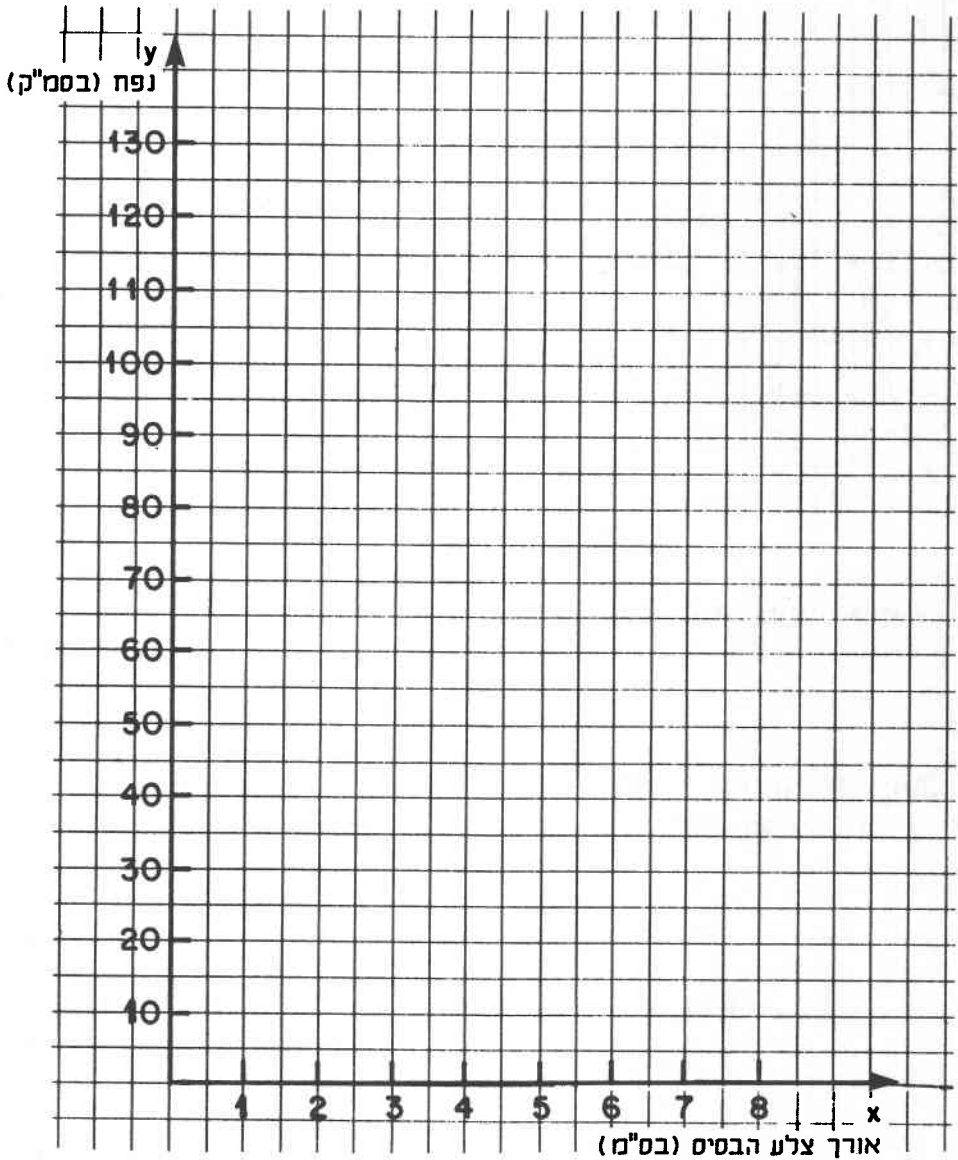


3. התאם אם אפשר, גובה ונפח לכל אורך.

x אורך צלע הריבוע (בס"מ)	גובה התיבה (בס"מ)	y - נפח התיבה (בסמ"ק)	
1			(א)
2			(ב)
3			(ג)
4			(ד)
5			(ה)
6			(ו)
7			(ז)
8			(ח)

- מהו הערך הגדול ביותר ש- x יכול לקבל?

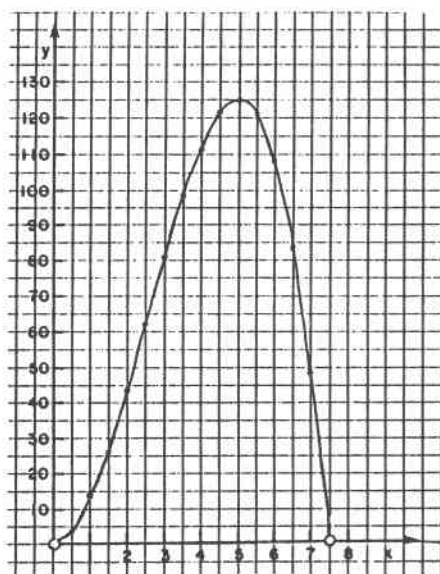
4. לפניך מערכת צירים



(א) שרטט גרף המתאר את נפח התיבה בהתאם לאורך צלע בסיסה (העזר בטבלה משאלה 3).

(ב) האם יש טעם לחבר את הנקודות בקו?

(ג) חשב נפח של תיבה שאורך צלע בסיסה 2.5 ס"מ.
- האם הנקודה המתאימה נמצאת על הגרף?



5. לפניך הגרף שנתבקשת לשרטט
בשאלה 4.

שים לב! הנקודה הגבוהה ביותר על
הגרף מתקבלת עבור $x=5$.

(א) סמן נקודה כלשהי על הגרף ורשום מה היא מתארת?

(ב) סמן על הגרף שתי נקודות, המתארות שתי תיבות שונות, שיש
להן נפח שווה - 100 סמ"ק.

- מה תוכל לומר על צורת התיבות?

(ג) התוכל לסמן על הגרף שתי נקודות, המתארות שתי תיבות שונות,
אשר צלע הבסיס של האחת שווה באורכה לצלע הבסיס של
השנייה?

6. סמן נכון או לא נכון (העזר בטבלה ובגרף).

(א) נפח התיבה תלוי באורך שחתכו עבור צלע בסיסה.

(ב) התיבה שנפחה הוא הגדול ביותר היא קוביה.

(ג) ככל שמגדילים את צלע הבסיס, גדל גם הנפח.

(ד) נפח של תיבה שאורך צלע בסיסה 6 ס"מ, שווה לנפח של תיבה
שאורך צלע בסיסה 4 ס"מ.

(ה) אפשר לבנות שתי תיבות שונות, אשר נפח כל אחת מהן
80 סמ"ק.

(ו) אם אורך צלע הבסיס 3.5 ס"מ, נפח התיבה המתקבלת הוא בין
81 סמ"ק ל-112 סמ"ק.

מושגים בהתאמות

בתרגילים הקודמים ערכנו התאמה בין אורך צלע הבסיס של תיבה (שהורכבה מחוט שאורכו 60 ס"מ) לבין נפח התיבה. בחיי יום יום, במתמטיקה ובכל שטחי המדע עורכים התאמות רבות.

דוגמאות:

- התאמה בין גיל התינוק למשקלו.
 - התאמה בין מספר סיבובי הגלגלים לדרך שנסעה מכונית.
 - התאמה בין כמות הירק שהגיעה לשוק לבין מחירו.
 - התאמה בין גובהו של מקום לבין כמות המשקעים שבו.
- מטפלים בהתאמות אלו בכלים מתמטיים. מטרתנו בספר זה לפתח חלק מן הכלים המתמטיים הנדרשים לטיפול בהתאמות.

הגדרה:

התאמה בין שתי קבוצות A ו- B , מקיימת את הדרישה:

לכל איבר של A מתאימים איבר (אחד לפחות) ב- B .

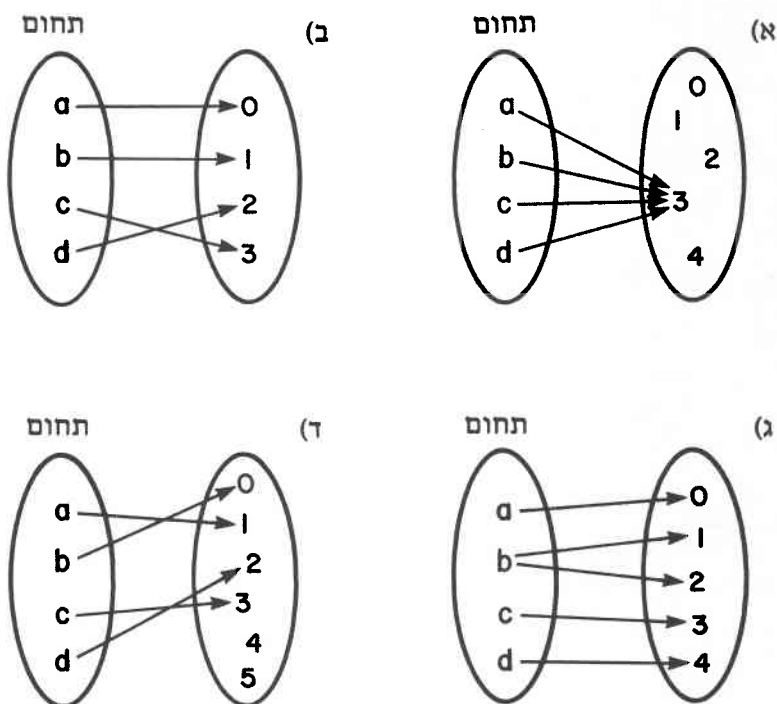
**הקבוצה A נקראת תחום ההתאמה.
איבר מן התחום A נקרא מקור. איבר שמתאים לו ב- B נקרא תמונה.**

אוסף כל התמונות נקרא קבוצת התמונות.

9. (א) נסח את הדרישה לגבי התאמה באמצעות המושגים החדשים (תחום, מקור, תמונה, קבוצת תמונות).
- (ב) האם יתכן לפי דרישות ההתאמה כי למקור אחד תהיינה שתי תמונות שונות?
- (ג) האם יתכן לפי דרישות ההתאמה כי לתמונה אחת יהיו שני מקורות שונים?

לעיתים, כאשר התחום הוא קבוצה סופית, נוח לתאר התאמות בעזרת דיאגרמות.

10. מהי התמונה של a בכל אחת מן ההתאמות הבאות?



- מהי קבוצת התמונות של כל אחת מן ההתאמות?



11. א) בהתאמה שסימנו ב־ f בין אורך צלע הבסיס לנפח התיבה
- התחום הוא: $\{x \mid ______ < x < ______\}$.

- קבוצת התמונות היא: $\{y \mid ______ < y \leq ______\}$.

- בהתאמה זו $f: 3 \rightarrow 81$
כלומר למקור $______$ מתאימה התמונה $______$.

ב) כמה תמונות מתאימות לכל מקור בהתאמה f ?

ג) כמה מקורות יש לכל תמונה בהתאמה זו?

12. p היא התאמה המתאימה לכל מספר המייצג אורך של ריבוע את
היקף הריבוע.
א) השלם:

$$P(3) = 12$$

$$p(______) = 40 \quad p(2.5) = ______ \quad p(8) = ______$$

$$p(______) = 12.4 \quad p(______) = 9 \quad p(______) = 8$$

ב) המקור הוא 20. מצא תמונה מתאימה.

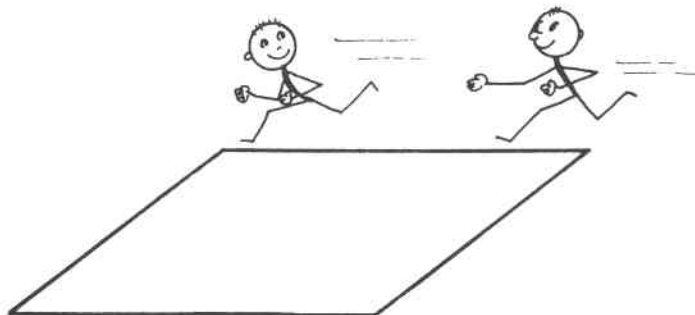
ג) התמונה היא 20. מצא מקור מתאים.

ד) מהו תחום ההתאמה p ?

ה) מהי קבוצת התמונות?

ו) כמה תמונות יש לכל מקור בהתאמה p ?

ז) כמה מקורות יש לכל תמונה בהתאמה זו?



13. נתונה התאמה m המתאימה לכל מספר טבעי את מכפלתו בעוקב לו.

$$m(7) = 56$$

(א) השלם:

$$m(99) = \underline{\hspace{2cm}} \quad m(10) = \underline{\hspace{2cm}} \quad m(5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$m(\underline{\hspace{2cm}}) = 90 \quad m(\underline{\hspace{2cm}}) = 30 \quad m(\underline{\hspace{2cm}}) = 20$$

(ב) המקור הוא 6 מצא תמונה מתאימה.

(ג) התמונה היא 6 מצא מקור מתאים.

(ד) מהו תחום ההתאמה?

(ה) התוכל לרשום את קבוצת התמונות?

פעמים רבות קשה למצוא את קבוצת התמונות של התאמה, ומספיק לדעת קבוצה המכילה את קבוצת התמונות. לכן:

הגדרה:

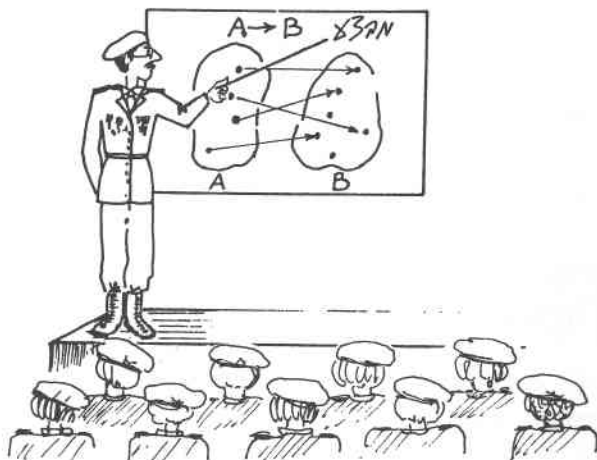
בהתאמה מקבוצה A לקבוצה B , היא התחום

ו- B מכילה את קבוצת התמונות (איננו דורשים

שכל איבר של B יהיה תמונה).

הקבוצה B נקראת טווח ההתאמה.

שים לב! גם קבוצת התמונות עצמה יכולה לשמש כטווח.



כל התאמה במתמטיקה מקיימת את התכונה:

I. לכל איבר בתחום מתאים איבר בטווח.

ההתאמות שבהן עסקנו (f ו- m) מקיימות תכונה נוספת:

II. לכל מקור מתאימה תמונה יחידה.

התאמה מקבוצה A לקבוצה B המקיימת בנוסף לתכונה I גם את תכונה II נקראת פונקציה.

14. (א) איזו התאמה בשאלה 10 (עמ' 13) אינה מתארת פונקציה? מדוע?

(ב) הפוך את כווני החיצים בדיאגרמות. קבוצת התחום תהיה עתה קבוצת הטווח, ולהיפך.

- אילו מן הדיאגרמות החדשות מתארות התאמה במתמטיקה?

- אילו מההתאמות אלו מתארות פונקציה?

פונקציה היא שלשה הכוללת שתי קבוצות (תחום וטווח) וכלל התאמה, והיא מקיימת שתי תכונות:

**- לכל מקור יש תמונה בטווח.
(תכונה זו קיימת בכל התאמה, גם אם אינה פונקציה.)**

**- התמונה של כל מקור היא יחידה.
(תכונה זו קיימת רק בהתאמות שהן פונקציות.)**

בהמשך הלימודים נעסוק בעיקר בהתאמות שהן פונקציות.

נעסוק בפונקציה כ"ייצור מתמטי" מצד אחד, וכמכשיר להבנת תופעות ותהליכים, מצד שני. בפרק זה נפתח, איפוא, שפת מושגים הקשורה לפונקציות ונתאמן בה, כדי שנוכל להשתמש בה בצורה מתאימה בהמשך.

תרגילים

התאמות וסימונן

1. לפניך טבלה המתארת התאמה המתאימה לאורך צלע הבסיס הריבועי של תיבה (שהורכבה מחוט שאורכו 60 ס"מ), את גובה התיבה. (ראה תרגיל 3 עמ' 8). נסמן התאמה זו ב- g .

x - אורך צלע הבסיס (בס"מ)	1	2	3	4	5	6	7
גובה התיבה (בס"מ)	13	11	9	7	5	3	1

(א) השלם:

דוגמא: $g(1) = 13$. כלומר, g של 1 שווה ל-13.
 ופרשו, לצלע בסיס באורך של 1 ס"מ מתאים גובה באורך 13 ס"מ.

$$g : 7 \rightarrow \underline{\quad} \qquad g : 4 \rightarrow \underline{\quad} \qquad g(2) = \underline{\quad}$$

$$g : \underline{\quad} \rightarrow 3 \qquad g(\underline{\quad}) = 1 \qquad g(\underline{\quad}) = 9$$

(ב) אורך צלע הבסיס של תיבה הוא 5 ס"מ. מהו הגובה המתאים לאורך זה? רשום מידע זה בכתוב מתמטי.

(ג) סמן את הטענות הנכונות.

- גובה התיבה תלוי באורך בסיסה.
- ככל שאורך צלע הבסיס גדל, גדל גם גובה התיבה.
- בין כל התיבות שאפשר להרכיב ישנה גם קוביה.
- כאשר אורך צלע הבסיס גדל פי שניים, הגובה קטן פי שניים.
- כאשר אורך צלע הבסיס גדל בס"מ אחד, קטן הגובה ב-2 ס"מ.

2. קבוצת ילדים יצאה לטיול רגלי. הם הלכו 12 ק"מ במשך 3 שעות, נחו שעה וחזרו לביתם (מרחק 12 ק"מ), במשך 6 שעות. נניח כי בקטעי הדרך השונים היתה מהירותם קבועה.

s היא התאמה המתאימה לכל שעה שעברה את מספר הקילומטרים שהלכו הילדים עד אז.

השלם:

$$s(\underline{\quad}) = 14 \qquad s(4) = \underline{\quad} \qquad s : 1 \rightarrow \underline{\quad}$$

$$s : \underline{\quad} \rightarrow 24 \qquad s(6) = \underline{\quad} \qquad s : 2 \rightarrow \underline{\quad}$$

$$s : \underline{\quad} \rightarrow 18 \qquad s(5.5) = \underline{\quad} \qquad s(3.5) = \underline{\quad}$$

$$s : \{ x \mid \underline{\quad} \} \rightarrow 12 \qquad s(\underline{\quad}) = 6 \qquad s(2.5) = \underline{\quad}$$



3. f היא התאמה המתאימה לכל מספר על ציר המספרים את מרחקו מן האפס.

(א) השלם (אם אפשר):

$$f(0) = \underline{\quad} \qquad f(-4) = \underline{\quad} \qquad f(5) = \underline{\quad}$$

$$f : \underline{\quad} \rightarrow -7 \qquad f : \underline{\quad} \rightarrow 0 \qquad f : \underline{\quad} \rightarrow 2.5$$

(ב) נכון או לא נכון?

- המרחק מן האפס תלוי במספר.

- ככל שהמספר גדול יותר, גדל מרחקו מן האפס.

- המרחק מן האפס מיוצג על ידי מספר חיובי.

4. מחוט מתכת שאורכו 20 ס"מ הרכיבו מלבן.
 h היא התאמה המתאימה לאורך צלע המלבן את שטחו.

(א) אורך צלע המלבן הוא 7 ס"מ, מהו שטחו?
 רשום מידע זה בכתוב מתמטי. $h(\text{---}) = \text{---}$

(ב) השלם:

$$h(2.5) = \text{---} \quad h(4) = \text{---} \quad h(2) = \text{---}$$

$$h(9.5) = \text{---} \quad h(6) = \text{---}$$

(ג) הכן טבלה ושרטט גרף המתאר את שטח המלבן בהתאם לאורך צלעו.
 (ד) השלם לפי הגרף:

$$h : \begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} 21 \quad h : \begin{array}{c} \text{---} \searrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} 9 \quad h(\text{---}) = 25$$

- השטח הגדול ביותר מתקבל כאשר אורך הצלע --- ס"מ.

- השטח הגדול ביותר הוא --- סמ"ר.

- כאשר אורך הצלע גדל מ --- עד --- השטח גדל.

- כאשר אורך הצלע גדל מ --- עד --- השטח קטן.

5. g היא התאמה המתאימה לכל מספר טבעי גדול מ-1 את גורמיו הראשוניים.

$$\text{דוגמא: } g(27) = 3$$

שים לב! 1 אינו ראשוני.

השלם:

$$g(8) = \text{---} \quad g(7) = \text{---}$$

$$g : 20 \begin{array}{c} \nearrow \text{---} \\ \searrow \text{---} \end{array} \quad g : 15 \begin{array}{c} \nearrow \text{---} \\ \searrow \text{---} \end{array}$$

$$g : \{ \text{---} , \text{---} , \text{---} , \dots \} \rightarrow 2$$

6. רשום דוגמא להתאמה בכל אחד מן השטחים הבאים: גיאוגרפיה, כלכלה, חקלאות, פיסיקה, הסטוריה, ביולוגיה.

מושגים בהתאמות

7. לפניך טבלה המתאימה לשעות הלילה ולשעות הבוקר המוקדמות ביום חורף את הטמפרטורה.

השעה - התחום	1	2	3	4	5	6
הטמפרטורה ב-°C	5.5	5	4.5	3	4	4.5

נסמן ב- t את ההתאמה בין השעה לטמפרטורה באותה שעה.
דוגמא: $t(1) = 5.5$ פרשו, לשעה 1 מתאימה הטמפרטורה 5.5°C .
(א) השלם:

$$t(3) = \underline{\quad} \quad t(5) = \underline{\quad} \quad t(2) = \underline{\quad}$$

$$t : \underline{\quad} \rightarrow 4.5 \quad t(\underline{\quad}) = 4 \quad t(\underline{\quad}) = 5.5$$

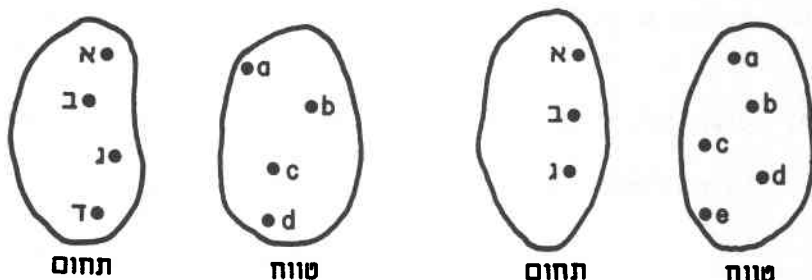
- (ב) מהי התמונה של 2 של 3 של 5 ?
(ג) מהו מקור של 4.5 של 4 ?
(ד) כמה תמונות יש לכל מקור בהתאמה t ?
(ה) כמה מקורות יש לכל תמונה בהתאמה t ?
(ו) האם הטמפרטורה תלויה בשעה ?
(ז) התוכל למצוא בעזרת ההתאמה מהי התמונה של 4.5 של 7 ? נמק.

8. לפניך תיאור מילולי של התאמות. הצג אותן בעזרת טבלה או דיאגרמה.

- (א) התאמה המתאימה למספרים 1, -2, 10 את ריבועיהם.
(ב) התאמה המתאימה לימים: יום כיפור, ט"ו בשבט, פורים את התאריך העברי בו הם חלים.
(ג) התאמה המתאימה למצולעים: משולש, מלבן, ריבוע וטרפז את מספר האלכסונים שלהם.

9. צייר חיצוי התאמה מהתחום אל הטווח כך שהדיאגרמה תתאר:

(א) התאמה שהיא פונקציה. (ב) התאמה שאיננה פונקציה



10. ציין, אילו מבין ההתאמות הבאות הן פונקציות (בהנחה שנבחרו תחום וטווח מתאימים).

(א) התאמה המתאימה לכל אזרח מדינת ישראל את שנת לידתו.

(ב) התאמה המתאימה לכל חתולה שיש לה גורים, את גוריה.

(ג) התאמה המתאימה לכל גור חתולים את אמו.



(ד) התאמה המתאימה לכל מספר שלילי את 1-.

(ה) התאמה המתאימה לכל מספר שלם את הנגדי לו.

(ו) התאמה המתאימה לכל מספר שלם את שני המספרים השלמים הסמוכים לו (הקודם והעוקב).

(ז) התאמה המתאימה לכל נקודה במערכת צירים את הזוג הסדור המתאים לה.

(ח) התאמה המתאימה לכל מספר על ציר המספרים את מרחקו מן האפס.

(ט) התאמה המתאימה לכל מספר טבעי הגדול מ-9 את מכפלת ספרותיו.

(י) התאמה המתאימה לכל מספר טבעי את ספרותיו.

22

$$\begin{array}{ll} f(A') = A & f(A) = A' \\ f(B') = B & f(B) = B' \\ & f(C) = C \end{array}$$

(א) מהן התמונות של הנקודות הבאות?

(ב) תמונה של נקודה שווה לה. מה תוכל לומר על שיעורי הנקודה?

(א) מהו תחום הפונקציה f .

(ג) מצא מקור ל-10.

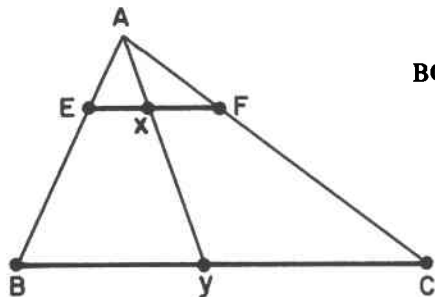
(ה) נקודה $B(a, 0)$ נמצאת על ציר ה- x . מהי תמונתה?

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

15. הפונקציה m , מתאימה לכל מצולע את מספר אלכסוניו.

(א) מהי התמונה של מרובע? מחומש?

(ב) מהו מקור של 0?



16. נתון משולש ABC . EF מקביל ל- BC

ההתאמה h מתאימה לכל נקודה x

הנמצאת על הקטע EF את נקודת

החיתוך של AX עם הקטע BC

לדוגמא: $h : x \rightarrow y$

(א) השלם: $h(E) = \underline{\hspace{1cm}}$ $h(\underline{\hspace{1cm}}) = C$

(ב) האם h היא פונקציה? נמק.

(ג) כמה מקורות לכל תמונה בהתאמה h ?

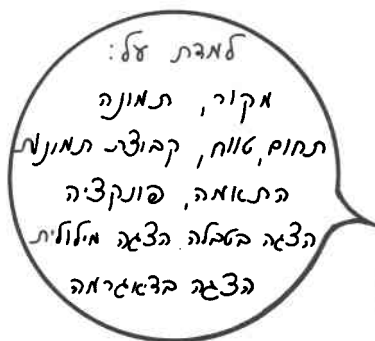
17. לפניך משפט שהוצפן בשיטת א-ת-ב-ש (במקום א' נרשם ת' במקום ב' נרשם ש' וכו').

צהפוט "ת-א-ש-ב" צפת שזחי ופטדהמצ ציאתמיצ כלכ תפא יתפאמפא צת"ש תפא תסגא.

(א) פענח את המשפט.

(ב) רשום תחום וקבוצת תמונות.

(ג) אם נשרטט דיאגרמת חיצים של הפונקציה ונהפוך את כיווני החיצים מה נקבל?



מבחר תשובות

1. (א) $g : 7 \rightarrow 1 \quad g : 4 \rightarrow 7 \quad g(2) = 11$

$g : 6 \rightarrow 3 \quad g(7) = 1 \quad g(3) = 9$

(ב) $g(5) = 5$

(ג) כן, לא, כן, לא, כן.

$s(5) = 14$

2. (א) $s : 1 \rightarrow 4 \quad s(4) = 12$

$s : 10 \rightarrow 24$

$s(6) = 16 \quad s : 2 \rightarrow 8$

$s : 7 \rightarrow 18$

$s(5.5) = 15 \quad s(3.5) = 12$

$s : \{x \mid 3 \leq x \leq 4\} \rightarrow 12$

$s(1.5) = 6 \quad s(2.5) = 10$

4. (א) $h(7) = 21$

(ב) $h(2.5) = 18.75 \quad h(4) = 24 \quad h(2) = 16$

$h(9.5) = 4.75 \quad h(6) = 24$

5. $g : \{2, 4, 8, 16, \dots\} \rightarrow 2$

7. (א) $t(3) = 4.5 \quad t(5) = 4 \quad t(2) = 5$

$t : \frac{3}{6} \rightarrow 4.5 \quad t(5) = 4 \quad t(1) = 5.5$

(ב) 4, 4.5, 5

(ג) 5, 6, 3, 1

(ד) אחד.

(ה) לתמונה אחת שני מקורות ולשאר התמונות מקור אחד.

(ו) כן (ז) לא, אבל בערך כן.

10. א) כן ב) לא ג) כן ד) כן ה) כן ו) לא ז) כן ח) כן ט) כן י) לא

11. א) (ב) 2, 6, 12, 20, 30, 42

ג) {המספרים הטבעיים פרט ל-1}

ד) {המספרים הטבעיים המתחלקים ב-3}

ה) {1, 2, 3}

12. א) (5, -3), (-1, 4), (0, -3), (3, 0), (-a, b)

ד) סימטרית לגבי ציר ה-y.

13. א) (5, 0), (0, -2), (4, 4), (4, 3), (3, -2), (b, a)

ב) שווים.

14. א) קבוצת כל הנקודות במישור.

ב) 5

ג) לדוגמא: (0, 10)

ד) על מעגל שמרכזו בראשית הצירים ומחוגו 10 יחידות.

ה) $|a|$

ו) $1 \leq d \leq \sqrt{2}$

16. ב) כן. ג) אחד.

17. א) הצופן "א-ת-ב-ש" הוא בעצם פונקציה המתאימה לכל אות מאותיות הא"ב אות אחרת.

ג) אותה פונקציה.

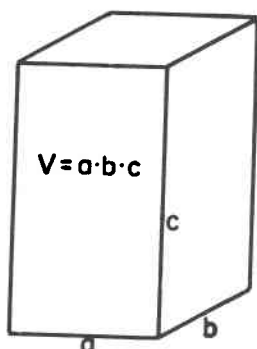
הצגת פונקציה בדרך אלגברית

הצגה בעזרת תבנית מספר

עד כה ראינו הצגות שונות של פונקציה: הצגה מילולית, הצגה בטבלה, בגרף ובדיאגרמה.

כאשר התחום והטווח הם קבוצות של מספרים וכלל ההתאמה ניתן לביטוי באמצעות תבנית מספר, נוכל להציג את הפונקציה בכתוב אלגברי. נחזור אל הדוגמא מראשית הפרק.

1. מחוט מתכת באורך 60 ס"מ הרכיבו שלד של תיבה שבסיסה ריבוע. x מייצג את אורך צלע הריבוע.



(א) הצג את גובה התיבה באמצעות תבנית מספר.

(ב) פשט את התבנית.

(ג) הצג את נפח התיבה באמצעות תבנית מספר

g היא פונקציה המתאימה לאורך צלע הריבוע כאשר הוא מספר שלם, את גובה התיבה.

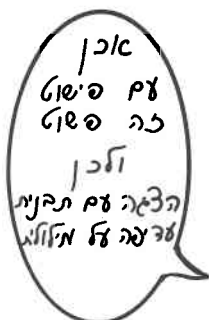
התחום של g : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
טווח של g : $\{\text{המספרים הממשיים}\}$

כלל ההתאמה: $g : x \rightarrow 15 - 2x$
או: $g(x) = 15 - 2x$

נחשב את גובה התיבה עבור $x = 3$
 $g(3) = 15 - 2 \cdot 3 = 9$

צורת הרישום $g(x)$ (קרי: g של x) מדגישה את העובדה שגובה התיבה $g(x)$ תלוי באורך צלע הבסיס - x ומשתנה בהתאם לו.
בקיצור תכתב g באופן אלגברי כך:

$\{\text{המספרים הממשיים}\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\} : g$
 $g(x) = 15 - 2x$



הערה: בהמשך הספר נטפל בעיקר בפונקציות אשר התחום והטווח שלהן הם קבוצות של מספרים. לשם נוחיות נחליט כי הטווח בכל מקרה שלא נאמר אחרת יהיה $R = \{\text{המספרים הממשיים}\}$ שים לב! R הוא סימן מוסכם לקבוצת המספרים הממשיים.

2. f היא פונקציה המתאימה לאורך x של בסיס התיבה (מהשאלה הקודמת), את נפחה.

(א) השלם את כלל ההתאמה: $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

(ב) השלם: $f(2) = \underline{\hspace{1cm}}$. מה מייצגת התמונה שמצאת?

3. רשום את הפונקציות הבאות בכתב אלגברי, בהנחה שהטווח הוא R . מצא לגבי כל פונקציה את התמונה של 3. דוגמא: הפונקציה המתאימה לכל מספר שלם את המספר הנגדי לו.

$$h : \{\text{המספרים השלמים}\} \rightarrow R$$

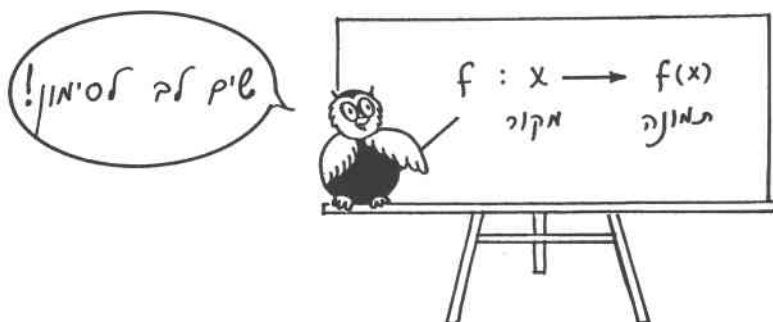
$$h : x \rightarrow -x$$

$$h : 3 \rightarrow -3$$

(א) הפונקציה המתאימה לכל מספר טבעי את המספר ההופכי לחזקתו השלישית.

(ב) הפונקציה המתאימה לכל מספר ממשי את ההפרש בין המספר הנגדי לו והמספר 3.

(ג) הפונקציה המתאימה לכל מספר רציונלי את המספר -5



4. נתונה התאמה הרשומה בכתוב אלגברי:

$$g : \{\text{המספרים השלמים}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

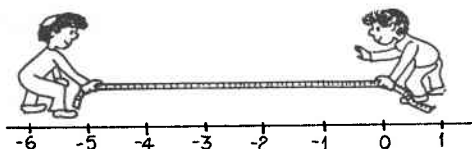
$$g(x) = |x|$$

(א) נסח במלים את כלל ההתאמה.

(ב) כמה תמונות לכל מקור?

(ג) כמה מקורות לכל תמונה?

(ד) האם ההתאמה היא פונקציה?



5. נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = -x^2$$



דוגמא: התמונה של -3 מתקבלת באופן הבא $f(-3) = -(-3)^2 = -9$

(א) מצא את: $f(-1)$, $f(-2)$, $f(2)$, $f(3)$

(ב) מצא, אם אפשר, את האיברים בתחום אשר תמונותיהם לפי f הן:

-16, 0, -9, 25, -1.69, -23.57

(ג) חשב: $f(2) - f(3)$, $f(2) \cdot f(2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $-f(a)$, $f(2a)$.

6. נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 12 - 3x$$

(א) מצא את התמונות של המקורות הבאים:

2, -1, 5, 2.5

(ב) מצא את המקורות של התמונות הבאות:

12, 3, -3, 0

(ג) מצא את כל המקורות שתמונתם חיובית.

7. x מייצג אורך צלע של ריבוע.

רשום פונקציה המתאימה ל- x את שטח הריבוע.

שים לב! התחום צריך להתאים לתוכן הבעיה.

ראינו כי כאשר פונקציה מתארת בעיה, התחום מוגבל לעיתים, בגלל תוכן הבעיה.

גם כאשר הפונקציה אינה מתארת בעיה, תחום הפונקציה מוגבל לפעמים מגבלה הקשורה למתמטיקה (דוגמא בתרגיל הבא).

8. (א) נתונה הפונקציה שכלל ההתאמה שלה $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

האם יתכן כי תחומה הוא R ? נמק.

- מהו התחום הגדול ביותר האפשרי?

(ב) נתונה פונקציה שכלל ההתאמה שלה $g: x \rightarrow \sqrt{x}$

האם יתכן כי תחומה הוא R ? נמק.

- מהו התחום הגדול ביותר האפשרי?

9. לכל אחד מכללי ההתאמה הבאים, מצא את התחום הגדול ביותר האפשרי.

(א) $x \rightarrow \frac{x}{x^2 + 3}$ (ג) $x \rightarrow \sqrt{x - 6}$

(ב) $x \rightarrow \frac{x}{x^2 - 16}$ (ד) $x \rightarrow \frac{x - 2}{\sqrt{x + 7}}$



הערה: בהמשך הספר כאשר נציג פונקציה ולא נציין את התחום שלה, הכוונה שתחומה הוא הגדול ביותר האפשרי. הטווח, לשם נוחיות, הוא $\mathbb{R}$.

- בהצגה אלגברית של פונקציה יש תחום, טווח וכלל התאמה באמצעות תבנית מספר.

- כדי למצוא תמונה למקור ידוע, הפעולה הנדרשת היא הצבה של המקור בתבנית המספר.

- כדי למצוא מקור לתמונה ידועה, הפעולה הנדרשת היא פתרון של תבנית פסוק.



ניחוש ושיקוף
עדיפים לעיתים
על פתרונות
שיטתיים



מחשבון ופונקציה

לצורך פתירת התרגילים הבאים עליך להצטייד במחשבון מדעי הפועל בהתאם לחוקי פעולות החשבון, אשר יש בו גם סוגריים.

10. נתונה הפונקציה

$$f : \{x \mid x \neq 6.03\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{25}{6.03 - x}$$

(א) חשב $f(5.71)$

(ב) לחישוב של (א) מתאימה סדרת הלחיצות הבאה על מחשבון.

25	÷	(	6.03	-	5.71	)	=
----	---	---	------	---	------	---	---

בצע את סדרת הלחיצות משמאל לימין. וודא כי קיבלת אותה תוצאה כמו ב־א).

אנו מתארים "סדרת לחיצות" על מחשבון על ידי סדרה של משבצות המכילה מספרים וסימנים.

כל משבצת שאינה מכילה מספר מייצגת לחיצה על אחד המקשים של המחשבון. כל מספר נכתב בשלמותו במשבצת אחת (למרות שיש ללחוץ, בדרך כלל, יותר מלחיצה אחת כדי להביעו). הלחיצות על מקשי המחשבון נעשות לפי סדר המשבצות משמאל לימין.

לעיתים נשאר בסדרת לחיצות משבצות ריקות, משבצות אלה תייצגנה משתנה.

לדוגמא: חישוב התמונות של הפונקציה בתרגיל 10 יכול להעשות לפי סדרת הלחיצות הבאה:

25	÷	(	6.03	-	x	)	=
----	---	---	------	---	-----	---	---

כאשר במשבצת הריקה יירשם בכל פעם אחד המקורות.

לחיצה על המקש $\boxed{+/-}$ נותנת את המספר הנגדי למספר המופיע על המצג.

11. נתונה סדרת הלחיצות

1.5	$+/-$	+	$\overset{x}{\square}$	=
-----	-------	---	------------------------	---

המייצרת תמונות של פונקציה g .

(א) חשב $g(-2)$, $g(0)$, $g(5.5)$, $g(7)$.

(ב) רשום את חוק ההתאמה של הפונקציה g .

לחיצה על המקש $\boxed{1/x}$ נותנת את המספר ההופכי למספר המופיע על המצג.

12. הפונקציה h מתאימה לכל מספר ממשי שונה מאפס את ההופכי לו.

(א) רשום סדרת לחיצות המייצרת תמונות של הפונקציה h .

(ב) חשב את המספרים ההופכיים למספרים הבאים:

3.2 , 0.35 , -40 .

(ג) הצב 0 במקום x ובצע את סדרת הלחיצות. הסבר.

13. לפניך סדרת לחיצות המייצרת תמונות של הפונקציה f

$\overset{x}{\square}$	x^y	3	=
------------------------	-------	---	---

(א) השלם את הטבלה הבאה בעזרת סדרת הלחיצות.

x	1	2	3	4	10
$f(x)$					

(ב) רשום פונקציה מתאימה לסדרת הלחיצות.

(ג) חשב $f(3.5)$, $f(-2.5)$.

המתלבט את (-2.5) לא חילב?
את המספר השלילי בחילוי האלף!
ואז, את סימן המוצאה
לפי שיקול דעתך קב.



14. מצא תמונה של $x = -1.5$ עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות:

$$f(x) = x^7, f(x) = x^4, f(x) = x^3, f(x) = x^6$$

15. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x^4 - 2x^2$. בדוק בעזרת המחשבון. $f(0.5) = -0.125$

באם ח'כית ער שהמחשבון
חישב את תוצאת החקירה
הוא מאוד איטי בעצולה זו.
אם ביצעת פעולה לסיק
לפני שתוצאת החקירה הופיעה
על המצג, תקבל תוצאה
סופית שגויה.

חישב חיבוע של מספר
יכול להעלות בדיוק אחדות.
בכר מהי הדיוק היעילה
למדי המחשבון שלך.

זכור כי המחשבון
מבצע תרגילים
לפי סדר פעולות המחשבון.
בתרגיל 15 אין צורך
לערוך עם
במצג התרגיל

כידוע, למיכה על המקשים
+, -, x, /, %, יצ
מייצרת תמונות של הפונקציות
הממאיות (נגז', היפכי, שורש וחזקה)
הפונקציה מופיעת על המסך
המופץ על המצג באלו של.



הצגה בעזרת תבנית מספר

1. כתוב בכתובי אלגברי. (מצא תחום וכלל התאמה. הטווח בכל מקרה הוא R).

(א) הפונקציה f מתאימה לכל מספר טבעי את המנה שלו והמספר העוקב לו.

(ב) הפונקציה g מתאימה לכל מספר רציונלי את המספר 1.

(ג) הפונקציה h מתאימה לכל מספר ממשי את ההפרש בין חזקתו השניה למכפלתו ב-5.

(ד) הפונקציה m מתאימה לכל מספר בין 0 ו-1 (לא כולל) את הסכום שלו עם ההופכי לו.

(ה) הפונקציה t מתאימה לכל מספר רציונלי את מרחקו מ-0.

2. נתונה ההתאמה h הבאה:

$h : \{\text{המספרים הרציונליים}\} \rightarrow \{\text{המספרים השלמים פרט ל-0}\}$



כלל ההתאמה:
 $h : x \begin{cases} \nearrow -x \\ \searrow \frac{1}{x} \end{cases}$

(א) נסח במלים את כלל ההתאמה.

(ב) האם ההתאמה היא פונקציה.

3. האם לפניך הצגה של פונקציה? נמק.

$$f : R \rightarrow R$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

4. נתונה ההתאמה: $g : \{\text{שלמים}\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g : x \rightarrow x^2$

(א) נסח במלים את כלל ההתאמה.

(ב) כמה תמונות לכל מקור?

(ג) כמה מקורות לכל תמונה?

(ד) האם ההתאמה היא פונקציה?

(ה) הגדר התאמה חדשה כך שתתאים לכל תמונה את המקורות שלה.
 תחום ההתאמה החדשה היא קבוצת התמונות של g והטווח שלה $\mathbb{R}$.
 האם ההתאמה החדשה היא פונקציה? נמק.

5. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1-x}$
 $f : \{x \mid x \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$

לאיזה מבין המקורות הבאים יש התמונה הגדולה ביותר?

$2, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -1, -\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, -10, 4$

6. נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 - 4$

(א) חשב $f(0), f(\frac{1}{2}), f(-1), f(-2), f(-6)$

(ב) מצא את כל המקורות שתמונתם חיובית.

(ג) חשב $f(3a), f(a+2), f(-a), f(a^3), f(4a-1)$.

(ד) מצא מקורות לתמונות הבאות: $0, 1$.

7. נתונה הפונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g(x) = 2x^2 - x$

חשב $g(2a), g(a-1), g(-a), g(a^3), g(\frac{a}{2})$

8. כלל ההתאמה של הפונקציה h הוא $h(x) = x^4 - 1$

תחום הפונקציה: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

והטווח שלה שווה לקבוצת התמונות.

תאר את הפונקציה בעזרת דיאגרמה.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = 5x - x^2$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

סמן את הטענות הנכונות.

$$f(0) = 0 \quad (N)$$

$$f(-5) = 0 \quad (1)$$

$$f(3) = f(2) \quad (2)$$

(ד) כאשר $f(x) > 0$, $x > 0$

$$f(5) > f(6) \quad (\eta)$$

(ו) כאשר $f(x) < 0$, $x < 0$

(ז) 100 אינו שייך לקבוצת התמונות.

(ח) לכל x שלם, $f(x)$ זוגי.

★ גסה את כוחך

10. נתונות הפונקציות שתחומן R

$$f(x) = x(x - 3)(x + 2)$$

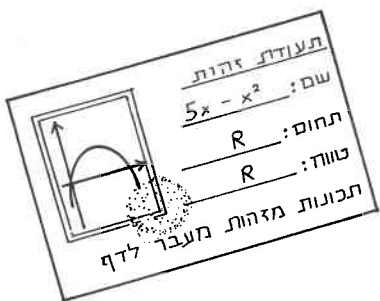
$$g(x) = |x| - x$$

מצא לגבי כל פונקציה:

(א) מהם המקורות אשר תמונתם אפס?

(ב) לאיזו קבוצה מן התחום מתאימות תמונות חיוביות ולא־זו, תמונות שליליות.

★ ★



11. נתונה הפונקציה $g(x) = |x - 3| - 4$ שתחומה R .

(א) חשב $g(-1)$, $g(6)$.

(ב) נתון כי $g(x) = 0$ מהו x ?

שים לב! יש יותר מאפשרות אחת.

(ג) מצא שני מקורות נוספים שיש לשניהם אותה תמונה.

★ נסה את כוחך

(ד) מצא את התמונה הקטנה ביותר. מהו מקורה?

★ ★

12. מבררכת השקאה הוציאו מים בקצב של 20 מ"ק בשעה. לפני תחילת

ההשקאה היו בבריכה 1000 מ"ק מים.

א מייצג את הזמן (בשעות) שחלף מאז שהתחילו להוציא מים מן הבריכה.

(א) רשום כלל התאמה לפונקציה k המתאימה ל- x את כמות המים בבריכה.

(ב) השלם:

$k(\underline{\quad}) = 900$ $k(\underline{\quad}) = 600$ $k(25) = \underline{\quad}$ $k(40) = \underline{\quad}$

(ג) סמן נכון או לא נכון.

- $k(30) = 400$ פרושו: התמונה של 30 לפי k היא 400.

$k(30) = 400$ - משמעותו: לאחר 30 שעות יצאו מן הבריכה 400 מ"ק מים.

- כמות המים בבריכה משתנה בהתאם לזמן ההשקאה.

- כמות המים בבריכה גדלה ככל שגדל זמן ההשקאה.

- לאחר 50 שעות. הבריכה התרוקנה.

- ככל שעבר יותר זמן, יצאו פחות מים מן הבריכה.

(ד) רשום לפונקציה תחום מתאים לתוכן הבעיה.

(א) רשום פונקציה g המתאימה למחיר הקודם (בש"ח) של בגד, את מחירו לאחר ההנחה.

(ג) אשה רוצה לקנות חצאית שמחירה המקורי 60 ש"ח. האם יספיקו לה 35 ש"ח?

(ה) אדם קנה חולצה במכירת החיסול וקיבל עודף מ-50 ש"ח. מה תוכל לומר על המחיר המקורי של החולצה?

1) רשום פונקציה המתאימה למחיר של מוצר לאחר ההנחה את המחיר המקורי?



15. שכירת מכשיר ליום אחד עולה 7 ש"ח. עבור כל יום נוסף משלמים 5.5 ש"ח.

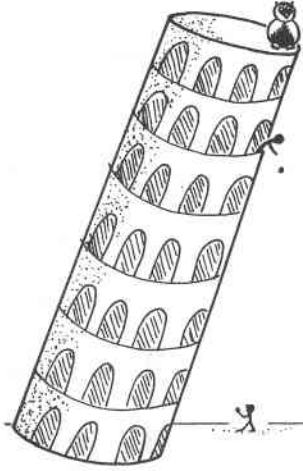
- (א) כמה ישלם אדם ששכר את המכשיר ל-4 ימים, ל-10 ימים?
 (ב) מצא פונקציה f המתאימה למספר ימי ההשכרה (x) את התשלום בשקלים. אל תשכח לרשום תחום וטווח.
 (ג) חשב $f(4)$. ובדוק אם קבלת אותה תוצאה כמו ב-א'.

16. יצרו מלבן מ-12 ריבועים שלמים שאורך צלע כל אחד מהם יחידה אחת.
 f היא פונקציה המתאימה לאורך (x) אחת מצלעות המלבן את היקפו.
 (א) חשב $f(x)$ כאשר $x = 3$, $x = 12$.
 (ב) מהו תחום הפונקציה?
 (ג) רשום את כלל ההתאמה באמצעות תבנית מספר.
 (ד) מצא שני מקורות שיש להם אותה תמונה. הסבר!

17. אבן נופלת מגג של בית שגובהו 125 מ'.
 $f(x) = 5x^2$ מתארת התאמה בין מספר השניות שחלפו מאז התחילה האבן ליפול, לבין המרחק (במ') שעברה.



!515



- (א) איזה מרחק עברה האבן לאחר 3 שניות?
 (ב) כמה זמן לקח לאבן לעבור 101.25 מ'?
 (ג) רשום לפונקציה תחום מתאים לתוכן הבעיה.
 (ד) חשב $f(2) - f(3)$ והסבר את משמעות התוצאה.
 (ה) ילד אומר: אחרי 6 שניות, האבן עברה 180 מ'
 כי $180 = 5 \cdot 6^2$. מה תאמר לו?

18. לכל אחד מהכללים הבאים, מצא את התחום הגדול ביותר מן

$$x \rightarrow \sqrt{x+5} \quad (r) \quad x \rightarrow \frac{x}{x^2-16} \quad (r) \quad x \rightarrow \frac{1}{x} \quad (r)$$

$$x \rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x-4}} \quad (\text{ה}) \quad x \rightarrow \frac{x-2}{x(x+4)} \quad (\text{ה}) \quad x \rightarrow \frac{2}{x+5} \quad (\text{ב})$$

$$x \rightarrow \sqrt{x^2 - 9} \quad (v) \quad x \rightarrow \sqrt{x - 6} \quad (1) \quad x \rightarrow \frac{x + 3}{x - 5} \quad (2)$$

★ נסה את כוחך

$$x \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2 + 5x}} \quad (x) \qquad x \rightarrow \sqrt{x(x-3)} \quad (y)$$

★ ★

19. נתון כלל התאמה $x \rightarrow 3x - 6$ ונתונות פונקציות f ו- g המקיימות אותו.

(א) התחום של f הוא $\{x \mid x > 4\}$, מהי קבוצת התמונות?

(ב) קבוצת התמונות של g היא $\{g(x) \mid g(x) < -12\}$, מהו התחום הגדול ביותר האפשרי?

20. נתונות פונקציות g ו- h אשר כלל ההתאמה של כל אחת מהן הוא:

$$x \rightarrow 4 - 2x$$

(א) התחום של g הוא $\{x \mid x > 7\}$, מהי קבוצת התמונות?

(ב) קבוצת התמונות של h היא $\{h(x) \mid h(x) > 6\}$, מהו התחום הגדול ביותר האפשרי?



מחשבון ופונקציה

21. שטחו של מלבן הוא מ"ר אחד.

(א) x מייצג את אורך אחת מצלעות המלבן (במ').
מצא פונקציה המתאימה ל- x את היקף המלבן.

(ב) רשום סדרת לחיצות המייצרת תמונות של הפונקציה. (המשתנה מיוצג על-ידי משבצת ריקה). השתדל להשתמש במקש $\boxed{1/x}$ ולחסוך בלחיצות.

(ג) חשב את היקפו של מלבן שאורך אחת מצלעותיו 2.5 מ', 0.4 מ', 1.5 מ'.

22. אילו מסדרות הלחיצות הבאות מייצרות תמונות של הפונקציה הבאה:

$$f: \{x \mid x \neq 2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{8}{x - 2}$$

(א)

8	÷		-	2	=
---	---	--	---	---	---

(ב)

	-	2	=	÷	8	=	1/x
--	---	---	---	---	---	---	-----

(ג)

8	÷	(		-	2	)	=
---	---	---	--	---	---	---	---

(ד)

	-	2	1/x	=	*	8	=
--	---	---	-----	---	---	---	---

(ה)

	-	2	=	1/x	*	8	=
--	---	---	---	-----	---	---	---

(ו)

8	÷		-	8	÷	2	=
---	---	--	---	---	---	---	---

23. רשום סדרת לחיצות יעילה לחישוב תמונות של כל אחת מהפונקציות הבאות שתחומן $\{x \mid x > 0\}$. לגבי $x = 3.2$ תן אומדן של תמונתו לפי כל פונקציה, ואחרי-כך חשב אותה על פי סדרת הלחיצות שרשמת.

דוגמא:

הפונקציה	סדרת הלחיצות	התמונה לפי אומדן	התמונה לפי חישוב
$f(x) = 6x - 5.1$	6 * x - 5.1 =	13	14.1

(א) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ (ד) $f(x) = 4 - x^4$

(ב) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ (ה) $f(x) = \sqrt{x+6}$

(ג) $f(x) = x^3 - 0.3x$ (ו) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$

24. רשום פונקציות מתאימות לסדרות הלחיצות הבאות. רשום את התחום הגדול ביותר האפשרי.

(א)

3

+/-

+

2

*

x

=

1/x

(ב)

3

1/x

+

2

*

x

=

(ג)

2

*

x

$\sqrt{\quad}$

+

3

=

(ד)

2

*

x

+

3

=

$\sqrt{\quad}$

(ה)

2

*

(

x

+

3

)

$\sqrt{\quad}$

=

אם תקיש במחשבון
על הסוגי הימני
תקבל את פתרון
התיבול לבואק הסוגיים



25. נתונה משפחה של משולשים ישרי זווית, בה אורך אחד הניצבים של כל משולש הוא 12 ס"מ.

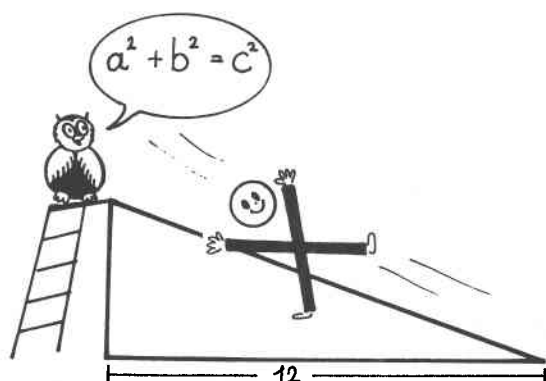
(א) הפונקציה g מתאימה לאורך היתר (x) של כל משולש מן המשפחה את אורך הניצב השני. רשום את חוק ההתאמה בעזרת תבנית מספר.

(ב) חשב $g(15)$.

(ג) מצא סדרת לחיצות עבור $g(x)$.

(ד) בצע את סדרת הלחיצות עבור $x = 10, x = 25$. מה קיבלת? הסבר.

(ה) מהו התחום הגדול ביותר האפשרי לפונקציה g ?



26. g פונקציה המתאימה לאורך צלע הריבוע (בס"מ) את אורך אלכסונו.

(א) רשום חוק התאמה לפונקציה g

(ב) אורך צלע הריבוע הוא מספר שלם ואורך האלכסון גדול מ-150 ס"מ. מה תוכל לומר על אורך צלע הריבוע?

27. נתונה פונקציה f שכלל ההתאמה שלה $f(x) = 2.25 - 4.5x$

קבוצת התמונות של הפונקציה היא:

$$\{-3, -2.5, 0, 1.4, 2.5\}$$

מצא את תחום הפונקציה.



28. פונקציות במעגל

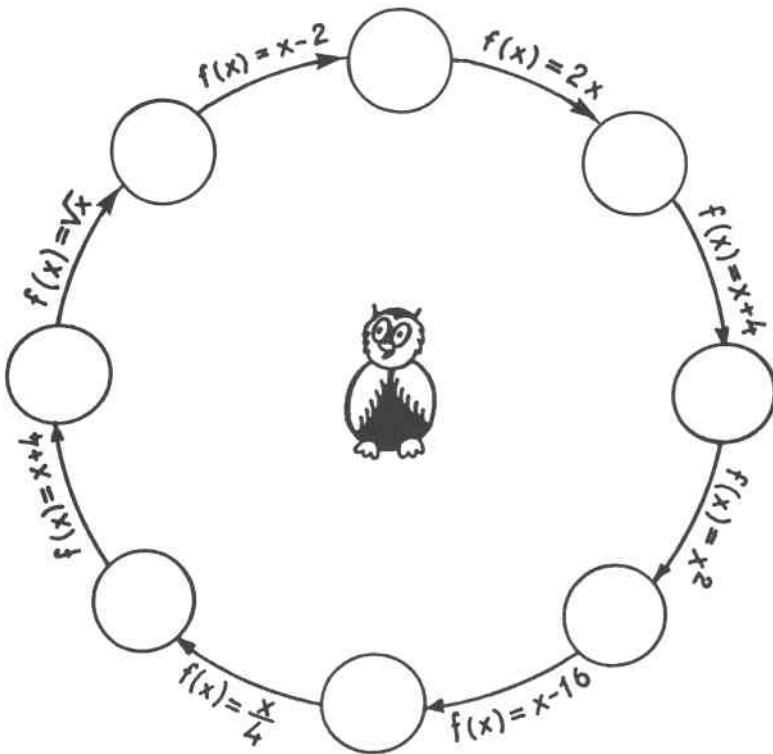
לפניך מעגל של פונקציות. כל תמונה לפי אחת הפונקציות היא מקור של הפונקציה הבאה אחריה במעגל.

(א) בחר מספר חיובי ורשום אותו באחד העיגולים.
מצא תמונתו לפי הפונקציה המתאימה ורשום אותה בעיגול הבא.
חזור על התהליך של מציאת תמונות, עד שתסיים את המעגל.
- האם קיבלת חזרה את המספר שבחרת?

(ב) חזור על (א) עם מספר אחר בעיגול אחר.

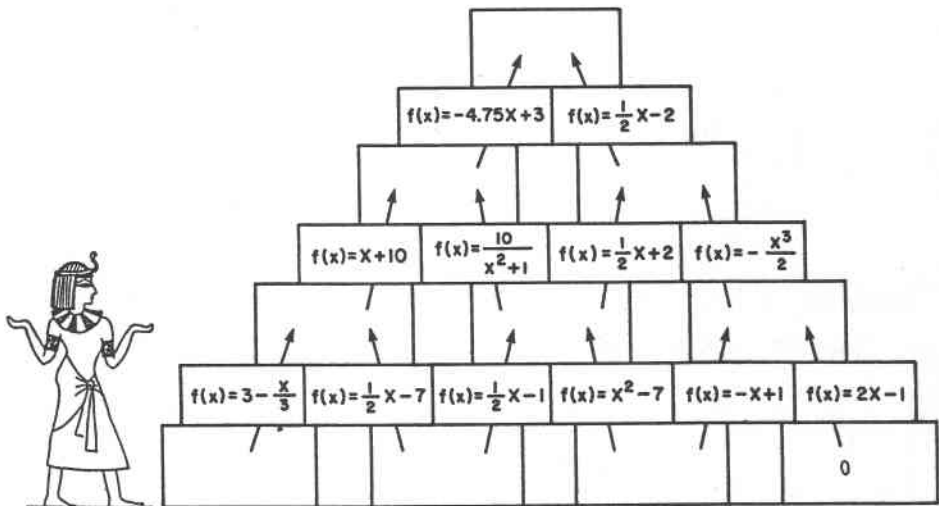
(ג) חזור על (א) עם a במקום מספר.

(ד) הפוך את כוון החיצים. האם גם הפעם תקבל חזרה את המספר שבחרת?



29. בנה את הפירמידה

מלא את המשבצות המתאימות במספרים המתאימים. החץ מוביל ממקור לתמונתו, לפי הפונקציה דרכה הוא עובר. (התחום והטווח הם קבוצת המספרים הממשיים).



30. פונקציות בזוגות

לכל פונקציה מן הטור הימני מצא פונקציה בטור השמאלי שיש לה אותה קבוצת תמונות.

☐ י	$h(x) = x - 1 $	$g(x) = x$	☐ א
☐ ה	$l(x) = 1 - x^3$	$f(x) = 1 - x $	☐ ע
☐ ו	$p(x) = 1 + x $	$k(x) = x^2$	☐ פ
☐ ל	$q(x) = -x^2 + 1$	$j(x) = (x - 1)^2 + 1$	☐ כ



חקור וגלה

31. פונקציות וכללים

I. לפניך הפונקציה $f(x) = 5x$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(א) חשב $f(9)$, $f(2) + f(7)$, $f(7)$, $f(2)$

(ב) חשב $f(4)$, $f(-2) + f(6)$, $f(6)$, $f(-2)$

(ג) חשב $f(a + b)$, $f(a) + f(b)$, $f(b)$, $f(a)$

(ד) נסח כלל במילים.

II. אילו מן הפונקציות הבאות המוגדרות ב $\{x \mid x > 0\}$ מקיימות את הכלל $f(a + b) = f(a) + f(b)$ לכל a ולכל b בתחום?

(א) $f(x) = -x$ (ד) $f(x) = 6$

(ב) $f(x) = x^2$ (ה) $f(x) = \frac{1}{x}$

(ג) $f(x) = 2x + 1$ (ו) $f(x) = \frac{1}{2}x$

III. הפונקציה h מקיימת את הכלל $h(a + b) = h(a) + h(b)$.
לכל a ולכל b בתחומה, וידוע כי 0 נמצא בתחומה.
הוכח כי h מקיימת $h(0) = 0$

הדרכה: הבע את $h(a + 0)$ בדרכים נוספות.

IV. הפונקציה $g(x) = x^3$ המוגדרת ב- $\mathbb{R}$ מקיימת את הכלל $g(ab) = g(a) \cdot g(b)$ לכל a ולכל b בתחום. הוכח.

V. אילו מן הפונקציות ב-II מקיימות את הכלל $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$ לכל a ולכל b בתחום?

מבחן תשובות

1. (א) $f : \{\text{הטבעים}\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ג) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ה) $t : \{\text{הרציונלים}\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$t : x \rightarrow |x| \quad h(x) = x^2 - 5x \quad f(x) = \frac{x}{x+1}$$

6. (א) $f(0) = -4$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3\frac{3}{4}$ $f(-6) = 32$

(ב) $x < -2$ או $x > 2$

(ג) $16a^2 - 8a - 3$, $a^6 - 4$, $a^2 - 4$, $a^2 + 4a$, $9a^2 - 4$

(ד)

$$\begin{array}{cc} \sqrt{5} \searrow & 2 \searrow \\ & 1 \\ -\sqrt{5} \nearrow & -2 \nearrow \end{array}$$

7. $\frac{a^2 - a}{2}$, $2a^6 - a^3$, $2a^2 + a$, $2a^2 - 5a + 3$, $8a^2 - 2a$

9. (א) נכון (ב) לא (ג) נכון (ד) לא (ה) נכון (ו) נכון (ז) נכון (ח) נכון.

g	f	10.
$\{x x \geq 0\}$	-2, 3, 0	(א)
$x < 0$	-2 < x < 0 או x > 3	(ב) חיוביות:
אין.	0 < x < 3 או x < -2	שליליות:

11. (א) $g(-1) = 0$ $g(6) = -1$ (ב) 7, -1 (ד) -4 ומקורה 3.

12. (א) $k(x) = 1000 - 20x$ (ג) כן, לא, כן, לא, כן, לא

(ד) $\{x | 0 \leq x \leq 50\}$

$$g(a) > g(b) \quad (\text{ד}) \quad \text{א.ל} \quad (\text{ג}) \quad g(60) = 36 \quad (\text{ב}) \quad g(x) = \frac{3}{5}x \quad (\text{א}) \quad .13$$

$$f : x \rightarrow \frac{5}{3}x \quad (\text{ו}) \quad \text{ה} \quad \text{קטן מ } 83.34 \text{ ש"ח}$$

$$f(x) = \sqrt{6x} \quad (\text{ו}) \quad f(x) = 3 + \frac{x}{2} \quad (\text{ה}) \quad f : x \rightarrow 6 \quad (\text{ד}) \quad .14$$

$$.26, 14 \quad (\text{א}) \quad .16$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = (x + \frac{12}{x}) \cdot 2 \quad (\text{ג})$$

$$\text{ד} \quad \text{לדוגמא } 2 \text{ ו-} 6$$

$$25 \quad (\text{ד}) \quad 0 \leq x \leq 5 \quad (\text{ג}) \quad 4 \frac{1}{2} \text{ ש"נ} \quad (\text{ב}) \quad .17$$

$$\{x | x \geq -5\} \quad (\text{ז}) \quad \{x | x \neq \pm 4\} \quad (\text{ד}) \quad \{x | x \neq 0\} \quad (\text{א}) \quad .18$$

$$\{x | x \leq 0 \text{ או } x \geq 3\} \quad (\text{י}) \quad \{x | x \leq -3 \text{ או } x \geq 3\} \quad (\text{ט})$$

$$f(x) = 2(x + \frac{1}{x}) \quad (\text{א}) \quad .21$$

$$(\text{ג}) \quad 5.8 \text{ מ' , } 5.8 \text{ מ' , } 4.3 \text{ מ'}$$

$$.22 \quad \text{ב, ג, ה,}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 3 \quad (\text{ג}) \quad f(x) = \frac{1}{3} + 2x \quad (\text{ב}) \quad f(x) = \frac{1}{-3 + 2x} \quad (\text{א}) \quad .24$$

$$f(x) = 2\sqrt{x+3} \quad (\text{ה}) \quad f(x) = \sqrt{2x+3} \quad (\text{ד})$$

$$\{x | x \geq 12\} \quad (\text{ה}) \quad g(15) = 9 \quad (\text{ב}) \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 144} \quad (\text{א}) \quad .25$$

$$g(x) = \sqrt{2}x \quad (\text{א}) \quad .26$$

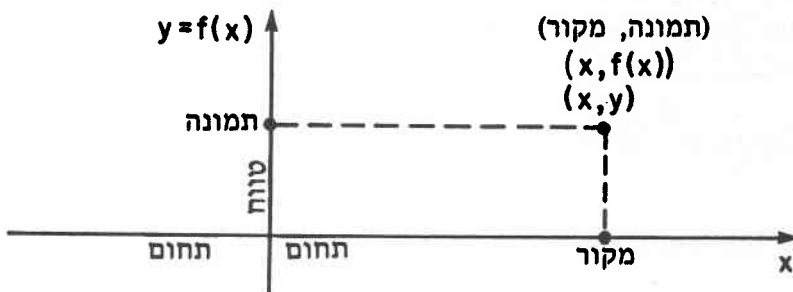
הצגת פונקציה בדרך גרפית

גרף של פונקציה

ראינו כבר כי אפשר להציג התאמה בדרכים שונות. אחת ההצגות השימושיות ביותר של ההתאמות, אשר התחום והטווח שלהן הם קבוצות מספרים, היא ההצגה הגרפית.

הצגה גרפית נעשית במערכת צירים. איברי התחום מסודרים על ציר המספרים האופקי - ציר x , ואיברי הטווח על ציר המספרים האנכי - ציר y . את ההתאמה בין מקור לתמונתו מתארים על ידי נקודה במערכת הצירים.

השיעור הראשון של נקודה מציין מספר מן התחום, והשיעור השני מציין את תמונתו לפי ההתאמה.

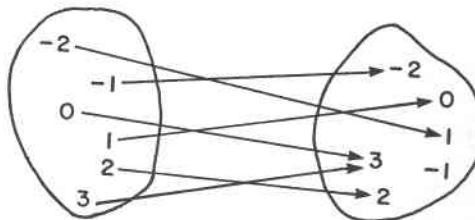


הגדרה:

אוסף כל הנקודות במערכת צירים המתארות התאמה

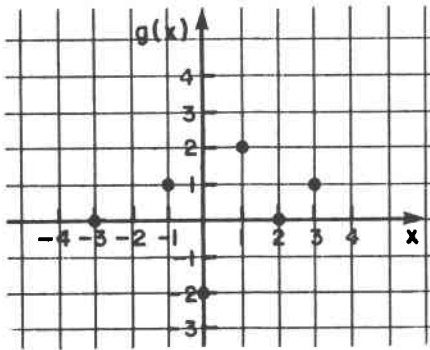
נקרא גרף ההתאמה.

1. לפניך דיאגרמת חיצים המתארת את הפונקציה f . שרטט מערכת צירים והצג בה את גרף הפונקציה.



2. לפניך הצגה גרפית של ההתאמה g .

סמן נכון / לא נכון לגבי הפסוקים הבאים:



(א) התמונה של 2 היא 1.

(ב) התמונה של 1 היא 2.

(ג) ל־0 יש שתי תמונות.

(ד) ההתאמה g היא פונקציה.

(ה) ל־1 יש שני מקורות.

(ו) המקור של 2 הוא 0.

(ז) המקור של -2 הוא 0.

הנה התאמה
קופץ את תחומה
מיאלי אל יבוי סבלה
יחזיקו אפתיית השאלה.



3. תלמיד החל לקרוא ספר אנגלית שיש בו 40 עמודים. נניח כי בכל יום קרא 5 עמודים.

(א) רשום פונקציה f המתאימה למספר הימים שעברו (x) , מאז החל בקריאה, את מספר הדפים שנותרו לו לקריאה.

(ב) תאר את הפונקציה בגרף.

(ג) "ככל שעברו יותר ימים, כך נשארו לו פחות עמודים לקריאה" הסבר בעזרת התבנית ובעזרת הגרף.

4. מיחם, המכיל 40 ליטר מים, מתרוקן על ידי ברז פתוח בקצב של 5 ליטרים לדקה. g היא פונקציה המתאימה לכל דקה (x) את כמות המים (בליטרים) שנותרה במיכל.

(א) חשב $g(3)$, $g(8)$.

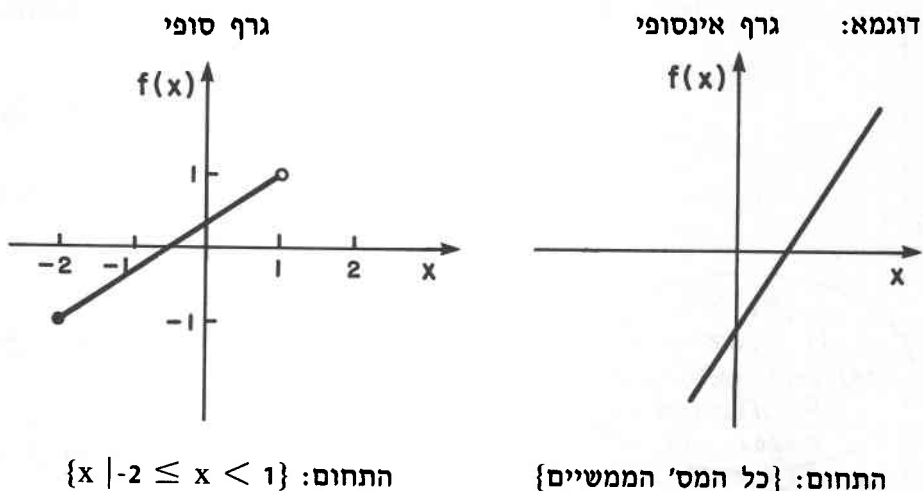
(ב) מצא את כלל ההתאמה של g

(ג) תאר את הפונקציה g בגרף.

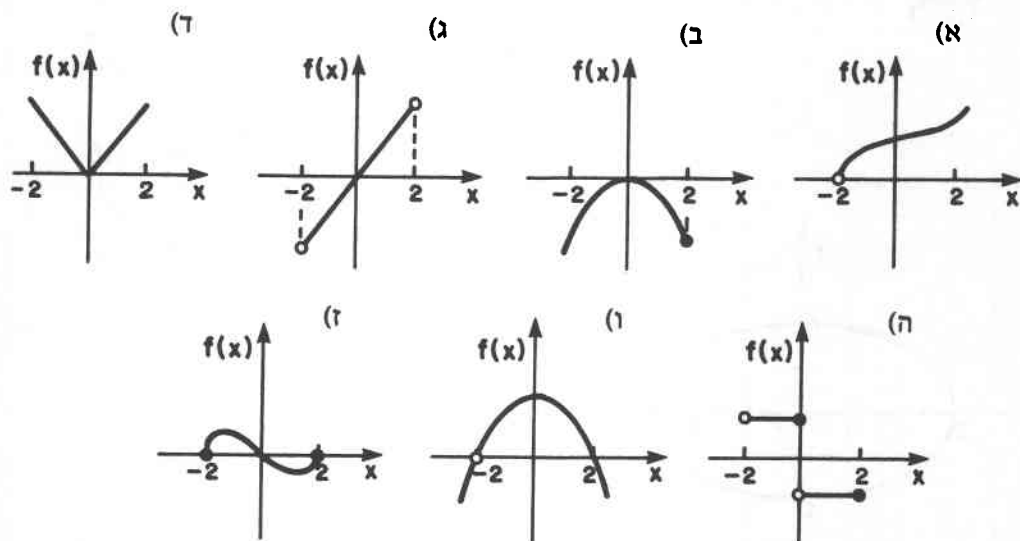
(ד) מה ההבדל בין הגרף של g לגרף של f משאלה 3? נמק!



גרפים הממשיכים ללא סוף אי אפשר, כמובן, לשרטט בשלמות. לכן נשרטט רק חלק אופייני של גרפים כאלה. כדי שנוכל להבחין בין גרף סופי לבין גרף אינסופי נסיים גרף סופי בעיגול. נמלא את העיגול אם נקודת הקצה שייכת לגרף, ונשאיר אותו ריק אם נקודת הקצה אינה שייכת לגרף.



5. התאם תחום לכל גרף מן הרשימה שלמטה.



$\{x \mid x \neq -2\}$, $\{x \mid -2 < x \leq 2\}$, $\{x \mid x > -2\}$, $\mathbb{R}$
 $\{x \mid -2 < x < 2\}$, $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $\{x \mid x \leq 2\}$

בשם הערך השלם של מספר מכנים את המספר השלם
הגדול ביותר, שאינו גדול מן המספר הנתון.
מסמנים את הערך השלם של מספר על ידי סוגריים
מרובעים משני צידי המספר.

$$\text{דוגמאות: } 2 = [2.1] \quad 3 = [3.7] \quad -8 = [-7.2] \quad 5 = [5]$$

6. חשב את הערכים השלמים הבאים:

(א) $[3\frac{1}{2}]$ (ג) $[\frac{1}{2}]$ (ה) $[-1.2]$
(ב) $[1.253]$ (ד) $[0]$ (ו) $[-6]$



7. נתונה ההתאמה הבאה: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f: x \rightarrow [x]$$

(א) האם התאמה זו היא פונקציה?

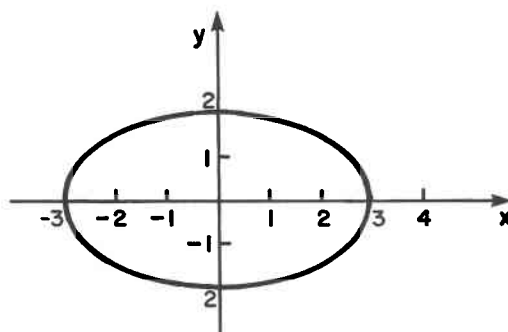
(ב) מצא תמונות של π , $\sqrt{2}$, -9.7 , $\frac{1}{2}$

(ג) מצא מקור שתמונתו 3. כמה מקורות כאלה יש?

(ד) שרטט את גרף ההתאמה f .

8. הגרף שלפניך הוא גרף של התאמה m

(א) השלם:



$m: 0 \rightarrow$

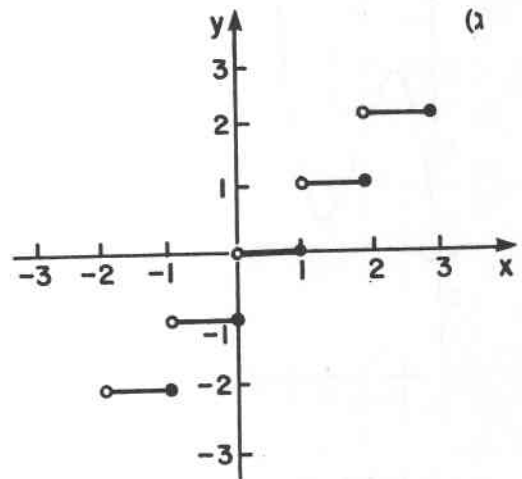
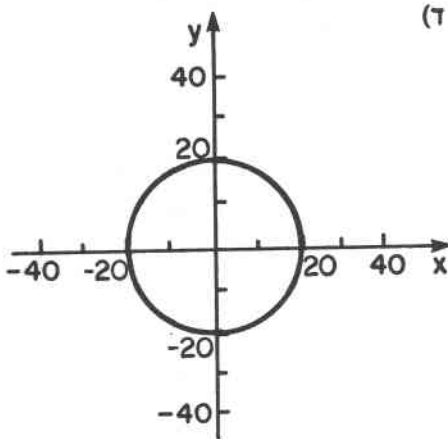
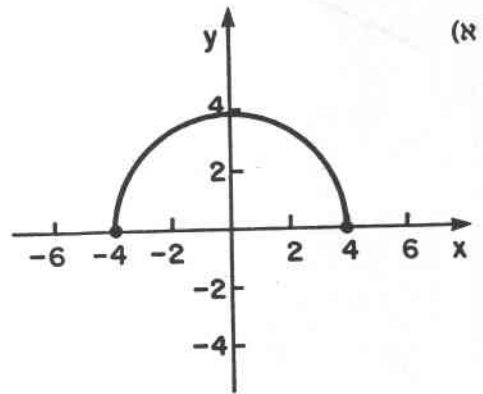
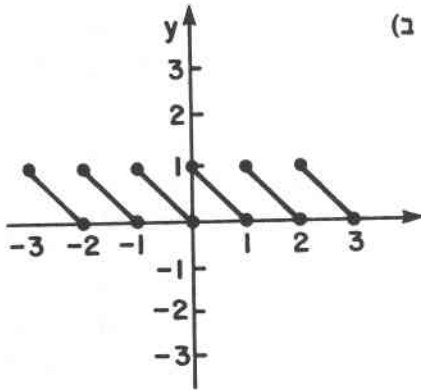
$m: 3 \rightarrow$

(ב) כמה תמונות יש ל-1 לפי התאמה m ?

(ג) האם התאמה m היא פונקציה? נמק!

9. לפניך גרפים של התאמות.

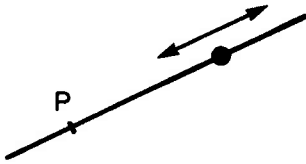
אילו מהגרפים הבאים הם גרפים של פונקציה?



10. השלם:

התאמה h היא פונקציה, אם ורק אם כל ישר מקביל לציר _____ חותך את הגרף של h בנקודה אחת לכל היותר.

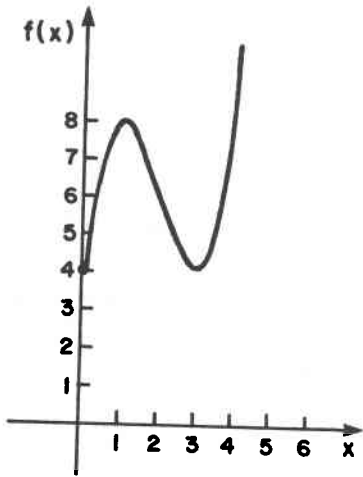
יתרונות ההצגה הגרפית



11. חלקיק נע לאורך ישר.
על הישר נמצאת נקודה P והחלקיק מתרחק ממנה ומתקרב אליה הלך ושוב תוך כדי תנועתו.
הפונקציה f מתאימה לזמן (בשניות) x שחלף מאז החל החלקיק בתנועתו, את מרחקו (בס"מ) מן הנקודה P .

לפניך גרף הפונקציה f .

שים לב! הגרף ממשיך כלפי מעלה עד אינסוף.
סמן נכון, לא נכון או אי אפשר לדעת.



(א) החלקיק החל במסעו במרחק 4 ס"מ מן הנקודה P .

(ב) החלקיק הלך והתרחק מ- P כל הזמן.

(ג) במשך מסעו היה החלקיק בנקודה P .

(ד) אחרי 1.5 שניות היה החלקיק במרחק 7.375 ס"מ מן הנקודה P .

(ה) אחרי 3 שניות החלקיק הלך והתרחק מ- P .

(ו) במשך השניה השניה ובמשך השניה השלישית התקרב החלקיק ל- P .

(ז) במשך תנועתו עצר החלקיק למספר שניות.

(ח) אחרי 10 שניות היה החלקיק במרחק 5 מ' מן הנקודה P .

(ט) החלקיק שינה את כיוון תנועתו פעמיים.

12. כלל ההתאמה של הפונקציה f משאלה 11 הוא

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$$

- (א) מצא על ידי הצבה, שלוש נקודות על הגרף ובדוק.
 (ב) על אילו מן הסעיפים א'–ט' של שאלה 11 תוכל לענות בעזרת התבנית בלבד ובלי עזרת הגרף?
 (ג) נסה למצוא מקור של 6. התוכל למצוא אותו מן ההצגה האלגברית בעזרת פתרון תבנית פסוק? נמק.
 - התוכל למצוא אותו בערך מן הגרף?
 (ד) האם יש לדעתך פונקציות בעלות הצגה גרפית שאין להן הצגה אלגברית בעזרת תבנית מספר?



13. לפניך בקבוק המתמלא במים הזורמים בקצב אחיד.

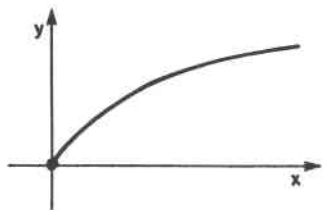
- (א) השלם בעזרת המלים: מהר, לאט.
 תחילה עלה גובה פני המים _____ ,
 ואחר כך _____ .

- (ב) שרטט "סקיצה" של גרף הפונקציה f המתאימה למספר השניות שחלפו את גובה פני המים בבקבוק.
 הנח כי בתחילה היה הבקבוק ריק.

הצגה גרפית של פונקציה נותנת לנו תמונה כללית ברורה על הפונקציה. גרף הפונקציה מאפשר לראות כיצד משתנה ערך הפונקציה (התמונה) בהתאם להשתנות המקור.

כאשר הפונקציה מתארת תהליך, אפשר ללמוד מן הגרף על אופן התרחשותו. כאשר קשה למצוא מקור לתמונה ידועה, כי אין יודעים לפתור את המשוואה המתאימה, נוכל למצוא את המקורות, בערך, מן הגרף.

14. בשרטוט סקיצה של גרף ההתאמה:



$$f: x \rightarrow \sqrt{x}$$

- נכון או לא נכון?

(א) $f(4) = 2$

(ב) תחום ההתאמה הוא קבוצת המספרים החיוביים.

(ג) $\sqrt{9} = \pm 3$

(ד) ההתאמה f היא פונקציה.

(ה) אם a חיובי אז $\sqrt{a}$ חיובי.

(ו) $f(-9) = -3$

(ז) $\sqrt{x} \geq 0$

(ח) אם a שלילי אז אין מספר ממשי שהוא $\sqrt{a}$.

(ט) לכל מקור של f יש שתי תמונות שהן מספרים נגדיים.

(י) קבוצת התמונות של f היא $\{y \mid y \geq 0\}$

(יא) לכל תמונה של f יש מקור יחיד.

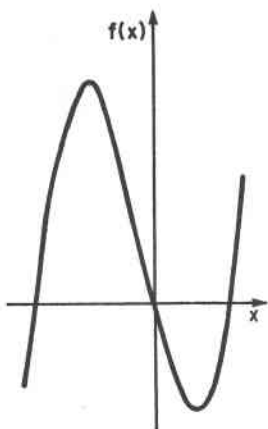
- שרטט בעזרת הגרף של f סקיצה של גרף הפונקציה

$$g(x) = -\sqrt{x}$$

15. כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 + x^2 - 6x = 0$

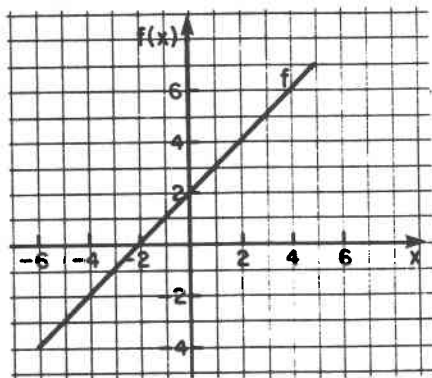
הדרכה: העזר בסקיצה של גרף הפונקציה

$$f(x) = x^3 + x^2 - 6x$$



תרגילים

גרף של פונקציה



1. בשרטוט גרף של פונקציה f .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(א) מצא בעזרת הגרף:

$$f(-5), f(-2), f(3), f(0)$$

(ב) מהו המקור של -4 ? 0 ? 6 ?

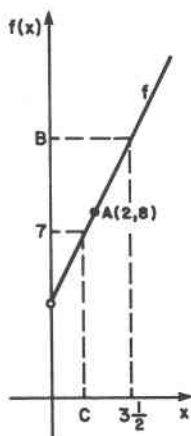
(ג) עבור אילו מקורות מתקיים $f(x) < 0$?

(ד) מהם ערכי $f(x)$ עבורם $x < 0$?

(ה) השלם את הערכים החסרים בטבלה של הפונקציה f

x	2	0	-2		
$f(x)$				5	1

(ו) מצא את כלל ההתאמה של f .



2. אחת מצלעותיו של מלבן היא בת 2 ס"מ.

הפונקציה f מתאימה לאורך הצלע השניה של המלבן את היקפו.

לפניך גרף הפונקציה.

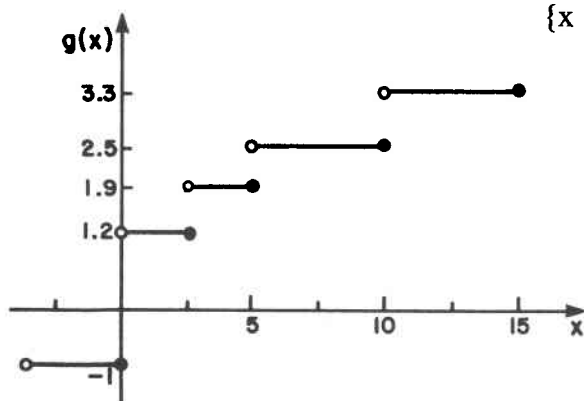
(א) הצג את הפונקציה באמצעות תבנית מספר.

(ב) מה מציינת הנקודה A שעל הגרף, לגבי המלבן?

(ג) רשום מספרים במקום הנקודות B ו- C .

3. לפניך גרף הפונקציה g .

שתחומה $\{x \mid -4 < x \leq 15\}$



(א) מהן התמונות של:

-1 ? 7.5 ? 8 ? 25 ?

(ב) מהם המקורות של:

1.2 ? 2.5 ? 3.1 ?

4. המספר המוטבע על ביצה נקבע לפי משקלה.



מספר	משקל (בגרמים)
1	70 - 75 (לא כולל 75)
2	65 - 70 (לא כולל 70)
3	60 - 65 (לא כולל 65)
4	55 - 60 (לא כולל 60)
5	50 - 55 (לא כולל 55)

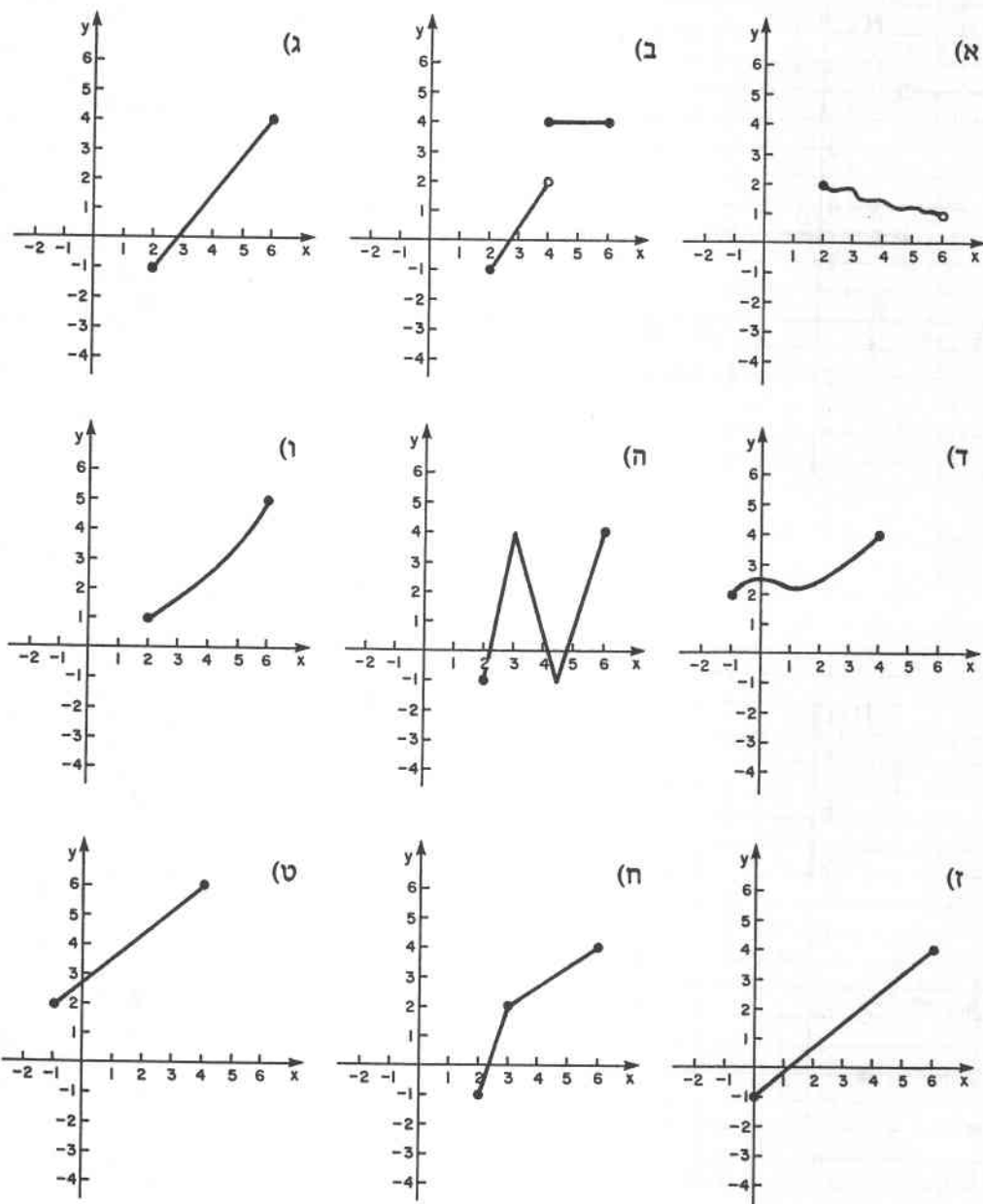
(א) תאר בגרף את הפונקציה f המתאימה למשקל (בגרמים) של ביצה את מספרה.

(ב) מהו $f(70)$? $f(55)$? $f(57)$?

(ג) ידוע כי משקל הביצה קטן מ-62 גרם מה ידוע לך על מספרה ?

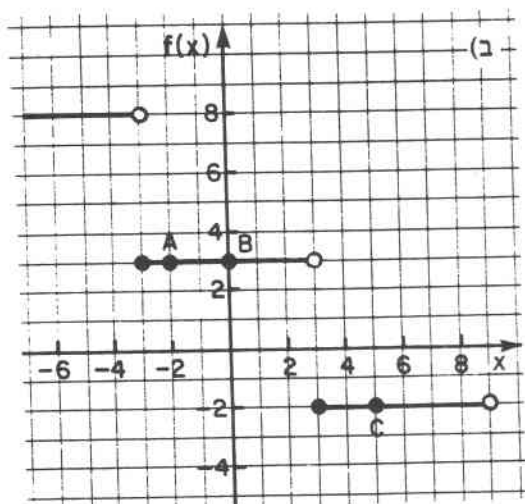
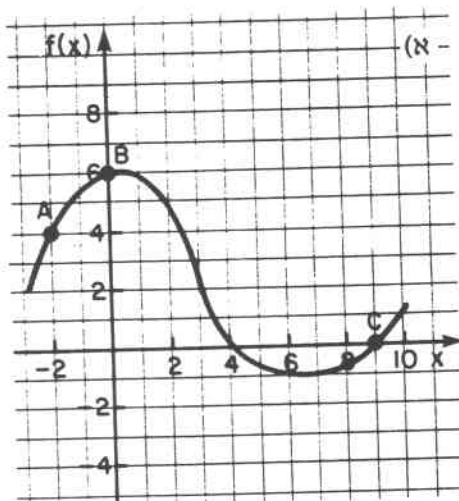
(ד) אילו מן הנקודות הבאות נמצאות על גרף הפונקציה ?
 $(60, 4)$, $(1, 74)$, $(3.5, 60.5)$.

5. התחום של f הוא: $\{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$
 והטווח שלה הוא $\{f(x) \mid -1 \leq f(x) \leq 4\}$
 אילו מן הגרפים הבאים יכולים להיות הגרף של f ?

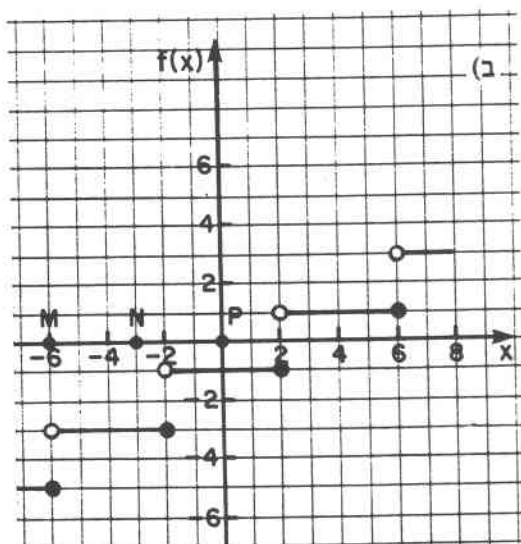
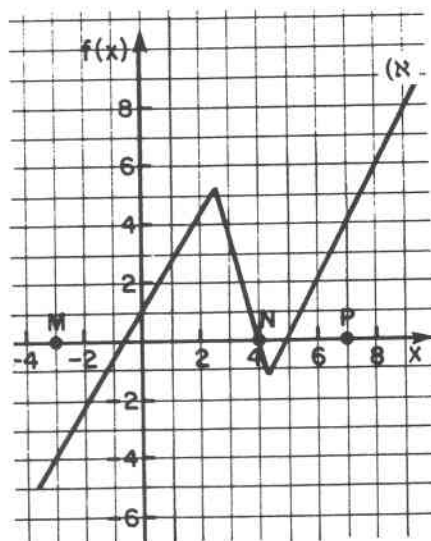


6. התחום של g הוא: $\{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$
 וקבוצת התמונות שלה היא $\{g(x) \mid -1 \leq g(x) \leq 4\}$
 אילו מן הגרפים שלעיל יכולים להיות הגרף של g ?

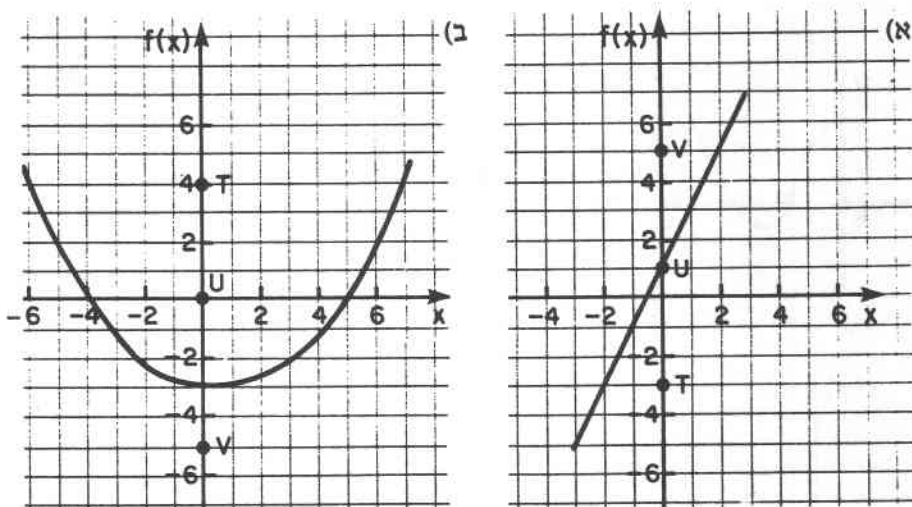
7. A, B ו-C מסמנות נקודות על גרף הפונקציה.
מהו המקור ומהי התמונה שכל אחת מן הנקודות מתארת.



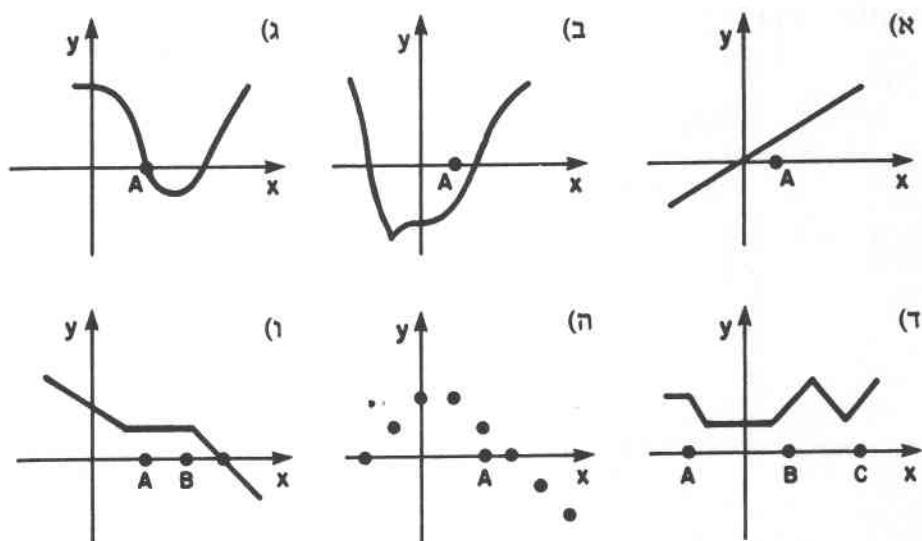
8. M, N ו-P מסמנות כל אחת מקור של הפונקציה.
מהי התמונה המתאימה לכל מקור?



9. U, T ו- V מסמנות איברים מן הטווח של הפונקציה.
מצא מקורות מתאימים.

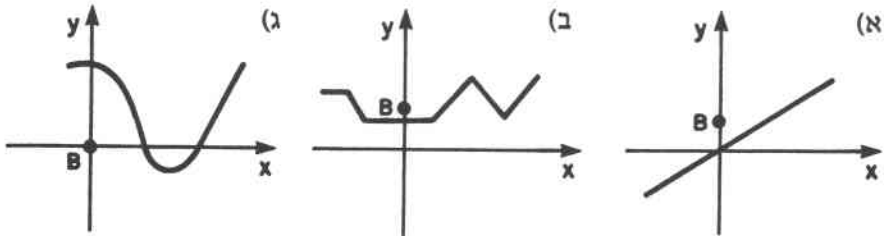


10. לפניך מספר גרפים של פונקציות.
בכל אחד מסומנים איבר (A) או מספר איברים $(A, B, \dots)$ מהתחום.
סמן את התמונות שלהם בטווח ב- $A', B', \dots$

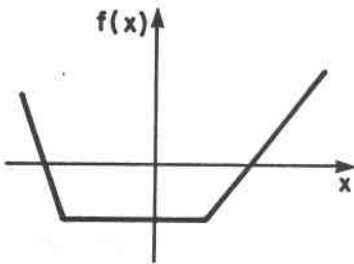


11. לפניך מספר גרפים של פונקציות.

בכל אחד נתונה נקודה B המתארת תמונה. סמן את האיברים בתחום שהם מקורות של B.



12. בשרטוט גרף של פונקציה f.

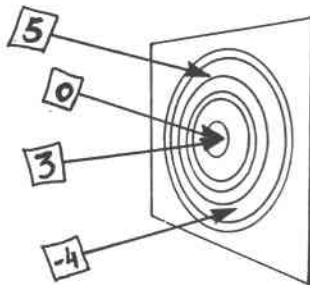


(א) סמן ב-C נקודה במערכת הצירים המתארת זוג מספרים שהוא מקור ותמונה של הפונקציה.

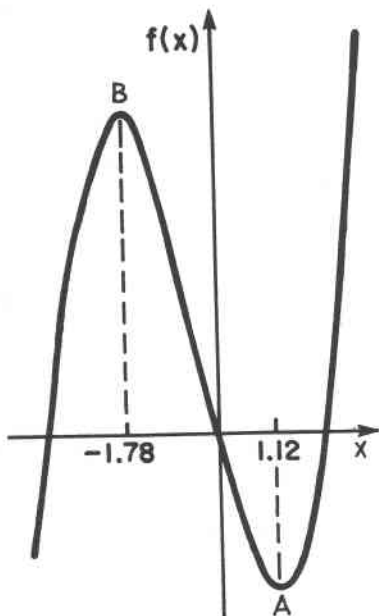
(ב) סמן ב-D נקודה שאיננה מתארת זוג מספרים שהוא מקור ותמונה של הפונקציה.

(ג) סמן במערכת הצירים אחד המקורות של הפונקציה.

(ד) סמן את התמונה המתאימה למקור שסימנת קודם.



13. לפניך גרף הפונקציה



$$f(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B

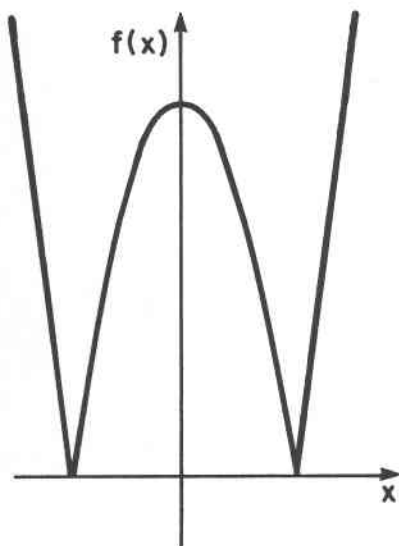
(ב) השלם את שיעורי הנקודות

(ג) כמה מקורות יש ל-1? מצא אותם, בערך, מהגרף.

בדוק אומדן על ידי הצבה בתבנית.

★ נסה את כוחך

14. לפניך גרף הפונקציה



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x^2 - 10|$$

(א) חשב את המקורות של 0.

סמן נקודות מתאימות על הגרף.

(ב) חשב תמונה של 0, וסמן

נקודה מתאימה על הגרף.

(ג) בדוק על פי הגרף

כמה מקורות יש ל-6?

(ד) מצא את המקורות של 6 בדרך אלגברית.

15. נתונה הפונקציה $f : x \rightarrow |x|$

$$f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$$

(א) שרטט את גרף הפונקציה f .

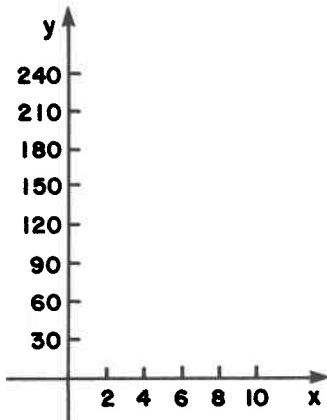
(ב) הוסף לתחום את כל האברים שאפשר להוסיף מבלי לשנות את הטווח.

(ג) שרטט את גרף הפונקציה החדשה שקיבלת

(ד) שרטט באותה במערכת צירים את גרף הפונקציה:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : x \rightarrow |x|$$

16. הפונקציה f מתאימה להיקפו (בס"מ) של משולש את סכום זוויותיו.



(א) רשום תחום מתאים.

(ב) מצא $f(4)$, $f(2.5)$, $f(7.25)$.

(ג) שרטט את גרף הפונקציה.

(ד) מהי קבוצת התמונות?

(ה) מהם המקורות של 90? 180?

17. נתונה הפונקציה: $g(x) = -7$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(א) השלם:

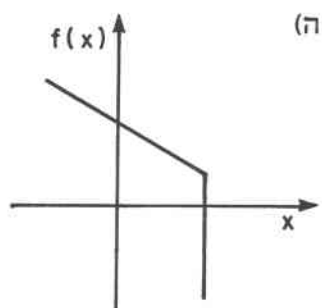
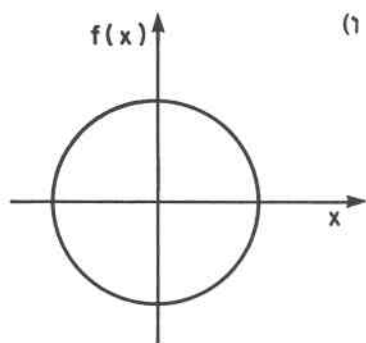
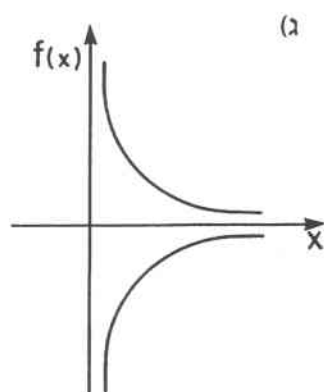
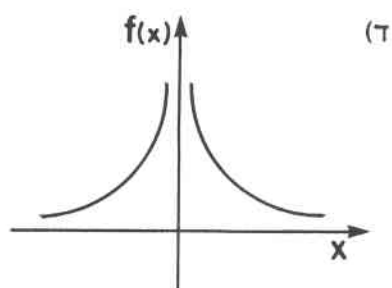
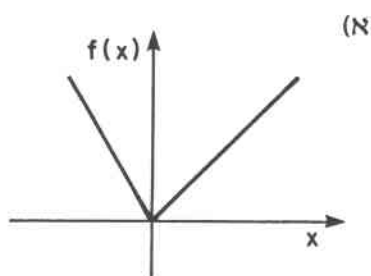
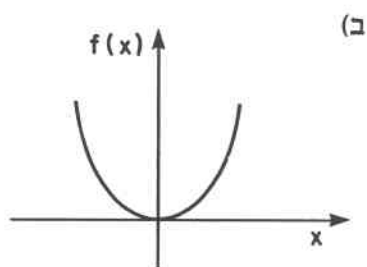
$$g(3.5) = g(0) = g(-7) = g(4) =$$

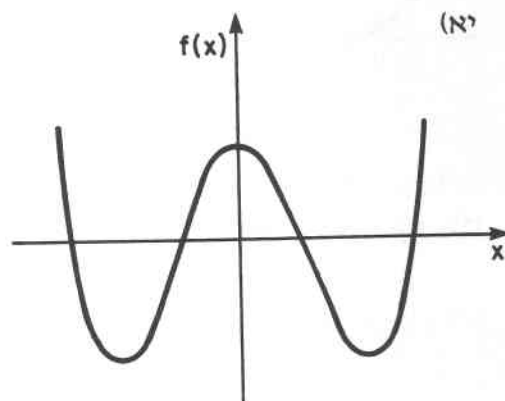
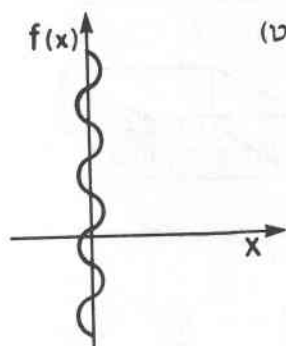
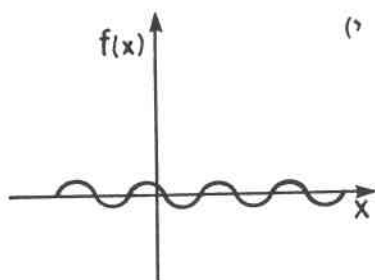
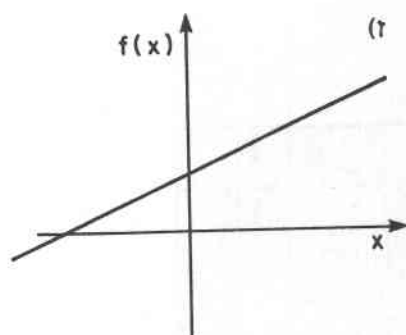
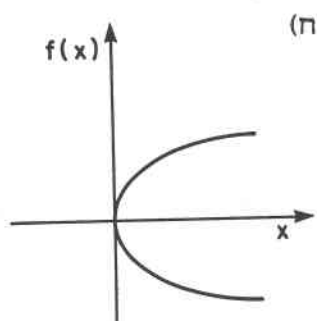
(ב) כמה ערכי a מקיימים $g(a) = -7$?

(ג) האם קיים a ממשי כך ש $g(a) = 3$?

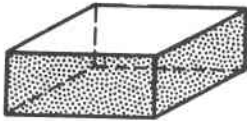
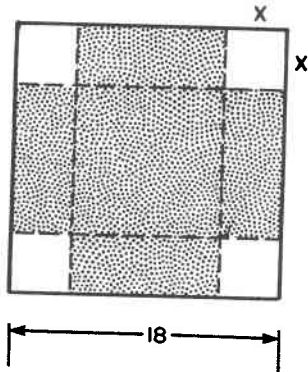
(ד) שרטט את גרף הפונקציה g .

21. אילו מן הגרפים הבאים הם גרפים של פונקציה?





יתרונות ההצגה הגרפית



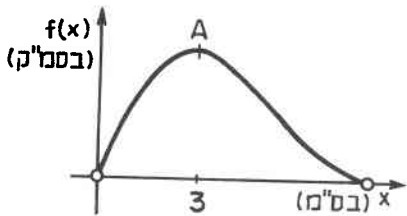
22. מדף נייר בצורת ריבוע שאורך צלעו 18 ס"מ גזרו ריבועים שווים בפינות.

את שארית הדף קיפלו לתיבה ריבועית פתוחה. f היא פונקציה המתאימה לאורך (x) בס"מ של הריבוע שגזרו, את נפח התיבה (בסמ"ק).

הדרכה: נפח של תיבה מחשבים על ידי מכפלת שטח הבסיס בגובה (x) .

(א) הבע את אורך בסיס התיבה באמצעות x .

(ב) כתוב כלל התאמה לפונקציה f .



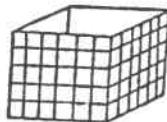
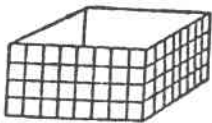
העזר בגרף הפונקציה f וענה:

(ג) מהו תחום הפונקציה? הסבר.

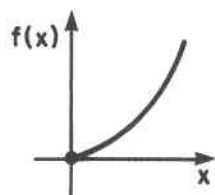
(ד) הנקודה A שעל גרף הפונקציה מייצגת תיבה שנפחה הוא הגדול ביותר.

מה אורכה, רוחבה וגובהה של תיבה זו.

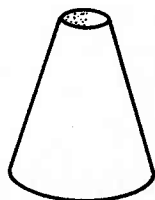
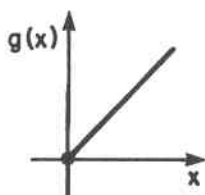
(ה) ילד אומר: "ככל שגוזרים ריבועים יותר גדולים בפינות, מתקבלת תיבה שנפחה קטן יותר". מה תאמר לו?



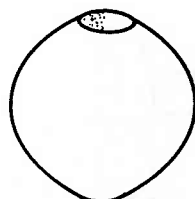
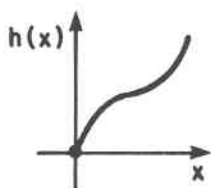
23. לפניך שרטוט של כלים שונים המתמלאים מים בקצב אחיד. ולפניך גרפים המתארים את גובה המים בכלי כפונקציה של הזמן. התאם גרף לכלי.



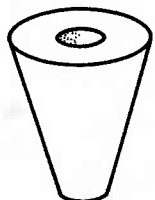
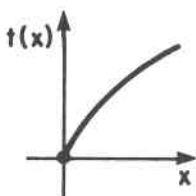
(א)



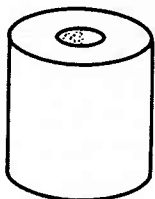
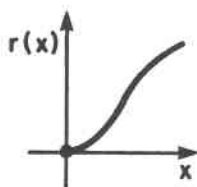
(ב)



(ג)



(ד)



(ה)

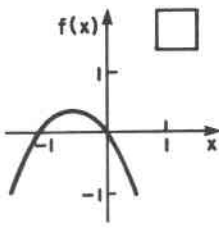
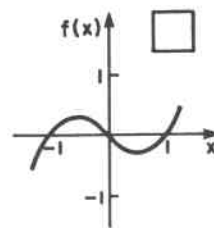
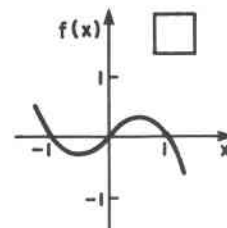
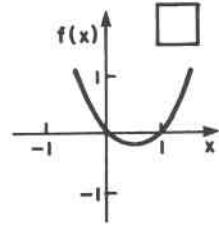
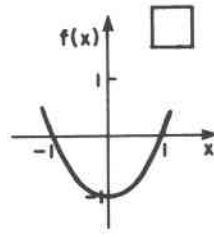
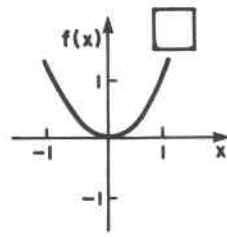
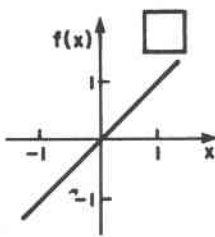
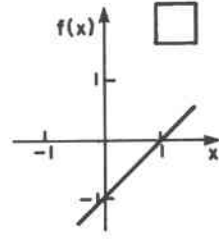
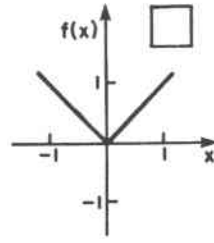
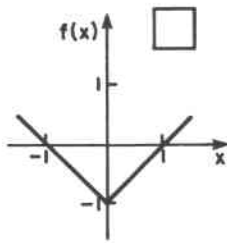
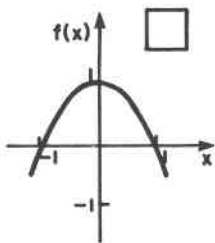


להנאתך

24. נתונות הפונקציות הבאות וגרפים שלהן $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ז	$f(x) = x^2 - x$	מ	$f(x) = x$	י	$f(x) = x $
ג	$f(x) = -x - x^2$	מ	$f(x) = x - 1$	י	$f(x) = x^2 - 1$
ע	$f(x) = x^2$	מ	$f(x) = 1 - x^2$	י	$f(x) = x^3 - x$
ע	$f(x) = x - x^3$	ש	$f(x) = x - 1$		

התאם גרף לפונקציה, ורשום ליד כל גרף את האות המתאימה.
מה קיבלת?



מבחר תשובות

הערה: חלק מן התשובות עוגלו ל-2 ספרות אחרי הנקודה.

1. (א) 2, 5, 0, -3 (ב) 4, -2, -6, (ג) $x < -2$

(ד) $f(x) < 2$ (ו) $f(x) = x + 2$

2. $f: \{x | x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ (ב) ריבוע (ג) 11, $\frac{1}{2}$

$f(x) = 2(x + 2)$

3. (א) -1, 2.5, 2.5, 1.9 (ב) $\{x | 0 < x \leq 2.5\}$ $\{x | 5 < x \leq 10\}$, אין

5. (א) ג, (ה), (ח),

6. (א) ג, (ה), (ח)

9.

V	U	T	
2	0	-2	(א)
אין	5, -4	7, -6	(ב)

8.

P	N	M	
4	0	-4	(א)
-1	-3	-5	(ב)

13. (א) A(1.12, -4.06) B(-1.78, 8.21) (ב) C(2, 0) D(-3, 0) (ג) 3

14. (א) $\sqrt{10} = 3.16$ $-\sqrt{10} = -3.16$ (ב) 10 (ג) 4 (ד) 4, -4, 2, -2

15. (ב) -1, -2, -3

16. (א) $\{x | x > 0\}$ (ד) $\{180\}$

17. (ב) אינסוף (ג) לא.

$$f(3.5) = 11 \quad f(3.8) = 11 \quad f(4.1) = 13 \quad f(4) = 13 \quad f(3) = 11 \quad \text{א. 18}$$

$$\{x | 2 \leq x < 3\} \rightarrow 9 \quad \text{ג. 10 אינה תמונה.}$$

$$g(30.5) = 18 \quad g(0) = 3 \quad g(10) = 8 \quad \text{א. 19}$$

$$\{x | 15 \leq x < 16\} \rightarrow 10.5 \quad \{x | 11 \leq x < 12\} \rightarrow 8.5 \quad \text{ג. 10}$$

$$\{x | 0 < x < 9\} \quad \text{ג. 10} \quad f(x) = (18 - 2x)^2 x \quad \text{ב. 10} \quad 18 - 2x \quad \text{א. 10}$$

$$3, 12, 12 \quad \text{ד. 10}$$



פסק זמן

- א) שלושה תורנים המורה מינתה כדי שידאגו לנקיון הכתה, להרמת הכסאות, ולהבאת גירים, וישיבועו בכך את רצון המורים.
- ב) וכיון שמן התורנים אף אחד את ניקוי הכתה לא אהד, ולכל אחד מן התורנים התחשק דוקא להביא גירים,
- ג) החליטו על הצדק לשמור ולפיק ארגנו להם תור. וכדי למנוע בעיות רשמו את כל האפשרויות.
- ד) וכל יום בלי להניד עפעף התחלפו על פי הדף. ועתה, אתם אמרו תוך כמה ימים הרשימות נגמרו?
- ה) הודיעה המורה בפנים חמורות: "על התורנים גם הלוח לנקות" וכדי להרגיע את המסכנים, שלחה תורן נוסף אל התורנים.
- ו) ארבעת התורנים שנית ישבו לארגן תור חדש חשבו הרשימה אז השתנתה לכמה ימים, אמור אתה?
- ז) בכתה המקבילה שמעו על הרעיון הנפלא. אך כיון ששם רבים הלכלכנים הם זקוקים להרבה תורנים.
- ח) ישבו החבריה זמן רב, אך לא הספיק להם הדף, כי גם אם נספור שבתות וחגים תספיק הרשימה לשנתיים ימים. (720 יום)

אמרו אתם מה מספר התורנים?

חלוקת התחום בהצגת פונקציה

1. קבוצת ילדים יצאה לטיול רגלי. הם הלכו 12 ק"מ במשך 3 שעות, נחו שעה, וחזרו לביתם, (מרחק של 12 ק"מ), במשך 6 שעות. נניח כי בקטעי הדרך השונים היתה מהירותם קבועה.

s היא פונקציה המתאימה לכל שעה (x) שעברה, את מספר הקילומטרים שהלכו הילדים עד אז.

(א) כמה שעות היו הילדים בטיול? מהו תחום הפונקציה s ?

(ב) כתוב את חוק ההתאמה של הפונקציה s כאשר $0 \leq x \leq 3$

(ג) חשב $s(3.5)$, $s(4)$

(ד) מהו חוק ההתאמה עבור איברי התחום $3 < x \leq 4$

(ה) חשב $s(5)$, $s(6)$

(ו) כתוב את חוק ההתאמה עבור השעות שבהן חזרו הילדים לביתם. מהו חלק התחום במקרה זה?

(ז) שרטט את גרף הפונקציה s .

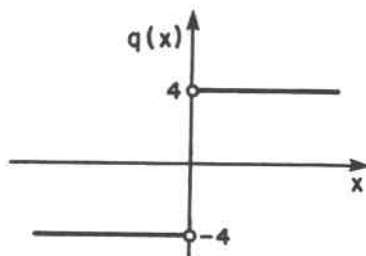
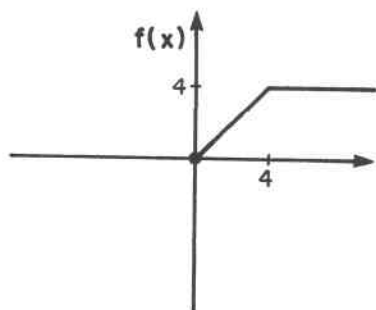
נתאר את הפונקציה s באופן אלגברי כך:

$$s : \{x \mid 0 \leq x \leq 10\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq 3 \\ 12 & 3 < x \leq 4 \\ 12 + 2(x - 4) & 4 < x \leq 10 \end{cases}$$

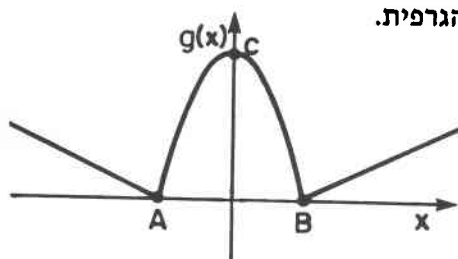


2. רשום הצגה אלגברית לפונקציות אשר הגרפים שלהן מובאים להלן.



3. שרטט את גרף הפונקציה.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < -3 \\ 3 & -3 \leq x \leq 3 \\ 4 & x > 3 \end{cases}$$



4. נתונה פונקציה g בהצגה האלגברית והגרפית.

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & x < -2 \\ -x^2 + 4 & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

(א) חשב $g(2)$, $g(-3)$, $g(1)$, $g(4)$

(ב) מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C, שעל הגרף.

(ג) מצא לפי הגרף כמה מקורות יש ל-3 וחשב אותם.

(ד) כמה מקורות יש ל-5? מצא אותם.

אם תיזה אקבל תמונה
לאמקור נחין,
מצא את היתכנות המאמיה
אפי' התחום.



תרגילים

1. שרטט את הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות.

$$h(x) = \begin{cases} 3, & x < 2 \\ -3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x = 3 \\ x, & x \neq 3 \end{cases}$$

2. הניחו קומקום עם מים על גבי האש למשך 8 דקות.
נניח כי המים מתחממים בקצב קבוע של 15°C לדקה.
ידוע כי המים רותחים ב- 100°C , וכל זמן הרתיחה הטמפרטורה שלהם אינה עולה.

f היא פונקציה המתאימה למספר הדקות (x) שעברו מאז התחילו המים להתחמם, את הטמפרטורה שלהם.

(א) הנח כי הטמפרטורה של המים לפני החימום היתה 10°C ושרטט את הגרף של f .

(ב) רשום את f בהצגתה האלגברית.

★ נסה את כוחך

3. מצא הצגה אלגברית לפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת:

$$f(-4) = 2, f(3) = -2, f(0) = 1$$

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★



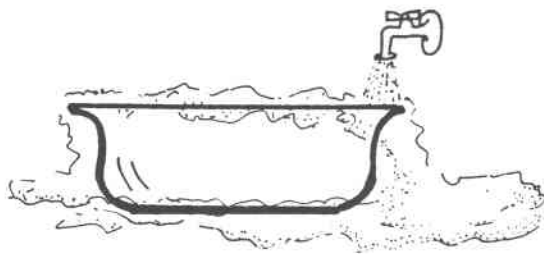
4. אמבטיה יכולה להכיל 450 ליטר מים.

פתחו את הברז בהיות האמבטיה ריקה למשך 20 דקות, והאמבטיה התמלאה בקצב של 30 ליטר לדקה.

(א) רשום פונקציה המתאימה לזמן (בדקות) מאז פתיחת הברז, את כמות המים (בליטרים) שמכילה האמבטיה (אל תשכח תחום).

(ב) שרטט את הפונקציה בגרף.

(ג) מצא על ידי חישוב ומתוך הגרף $f(10)$, $f(18)$.



5. רוכב אופניים יוצא מחיפה במהירות קבועה של 12 קמ"ש. לאחר שרכב במשך 5 שעות במהירות זו, הגביר את מהירותו ל-15 קמ"ש ורכב במהירות זו 4 שעות נוספות.

(א) תאר את הפונקציה המתאימה לזמן שחלף (בשעות), מאז יצא מחיפה, את אורך הדרך שעבר.

(ב) איזו דרך עשה רוכב האופניים כעבור 3 שעות? כעבור 7 שעות.

6. מצא הצגות אלגבריות נוספות לפונקציות הבאות:

רמז: חלק את התחום לשני חלקים

$$(א) \quad f(x) = |x| \quad (ב) \quad g(x) = |x - 2|$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

★ נסה את כוחך

$$(ג) \quad h(x) = 1 - |x - 2|$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★



חקור וגלה

7. פונקציות מיוחדות

I. הסימון $\max(2, 3)$ משמעותו: הגדול מבין המספרים 2 ו-3.
כלומר $\max(2, 3) = 3$.

(א) חשב:

$$\max(-\frac{1}{2}, -2), \max(-1, 7), \max(-2, -3)$$

(ב) נתונה פונקציה:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \max(x, -x)$$

חשב את:

$$f(-\frac{1}{4}), f(\frac{1}{3}), f(-7), f(-1), f(2)$$

(ג) שרטט את גרף הפונקציה.

(ד) מצא הצגה אלגברית נוספת לפונקציה.

II. הסימון $\min(-7, -5)$ משמעותו: הקטן מבין המספרים -5 ו-7.
כלומר: $\min(-7, -5) = -7$.

(א) חשב:

$$\min(-2, 0), \min(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}), \min(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$$

(ב) נתונה פונקציה:

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = \min(x, x^2)$$

חשב את

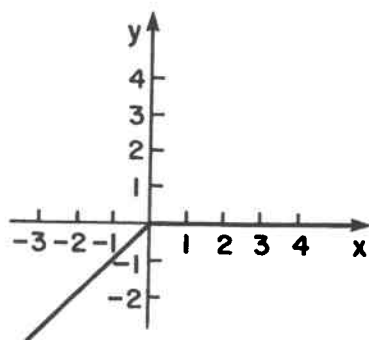
$$h(-\frac{1}{4}), h(\frac{1}{3}), h(-7), h(-1), h(2)$$

(ג) שרטט את גרף הפונקציה.

(ד) מצא הצגה אלגברית נוספת לפונקציה f .

(ה) מצא הצגה נוספת לפונקציה $g(x) = \min(x, x^2)$

III. אילו מבין הפונקציה הבאות $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מתוארות על ידי הגרף? $\downarrow$



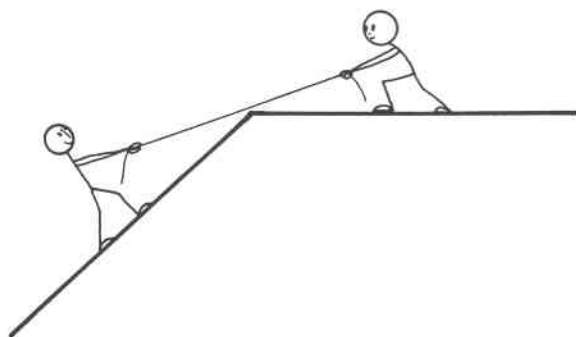
$f(x) = \max(x, 0)$ (ג)

$f(x) = \min(x, 0)$ (א)

$f(x) = -|x|$ (ד)

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ (ב)

$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$ (ה)



מבחר תשובות

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 10 + 15x & 0 \leq x \leq 6 \quad (\text{ב}) \\ 100 & 6 < x \leq 8 \end{cases}$$

$$3. \quad \text{לדוגמא:} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -4 \\ 1 & -4 < x < 1 \\ -2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} 30x & 0 \leq x \leq 15 \quad (\text{א}) \\ 450 & 15 < x \leq 20 \end{cases}$$

$$f(18) = 450, \quad f(10) = 300 \quad (\text{ג})$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} 12x & 0 < x \leq 5 \quad (\text{א}) \\ 60 + 15(x - 5) & 5 < x \leq 9 \end{cases}$$

(ב) כעבור 3 שעות 36 ק"מ.

כעבור 7 שעות 90 ק"מ.

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \quad (\text{א}) \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 2 & x > 2 \quad (\text{ב}) \\ 2 - x & x \leq 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 3 - x & x > 2 \quad (\text{ג}) \\ x - 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

תרגילים לסיכום הפרק

- לכל אחד מהתנאים הבאים שרטט, אם אפשר גרף של פונקציה f המקיימת אותו.

רשום לכל תנאי כמה גרפים תוכל לשרטט.

(א) התחום: המספרים הטבעיים. הטווח: המספרים הטבעיים.

(ב) התחום: המספרים הממשיים. הטווח: המספרים הטבעיים.

(ג) התחום: המספרים הממשיים. הטווח: המספרים החיוביים.

(ד) התחום: המספרים הממשיים. הטווח: המספרים השליליים.

(ה) התחום: המספרים הממשיים. הטווח: המספר 3-.

(ו) התחום: המספרים הממשיים. הטווח: $\{-1, 1\}$

(ז) התחום: $\{x \mid x \neq 0\}$. הטווח: המספרים הממשיים.

(ח) כל התמונות חיוביות.

(ט) $f(2) = 3$

(י) $f(6) = 8$, $f(3) = 5$

(יא) (10, 7) ו- (3, 5) נמצאים על הגרף.

(יב) (3, 4), (6, 7), (8, 13) נמצאים על הגרף.

(יג) (3, 4), (6, 7), (7, 8) נמצאים על הגרף.

(יד) (3, 4), (3, 7), (7, 8) נמצאים על הגרף.

- רשום לכל תנאי מ' א' - ט' פונקציה בדרך אלגברית.
כמה פונקציות ניתן לרשום לכל תנאי?

פרק ב: תכונות של פונקציה

קראו את חלקי הספרים של חור
לפני כן קרה ויש העלית שני שורש
את השורש שני שהיא אכן נמצא
השארנו כפי להקל על התאריך.



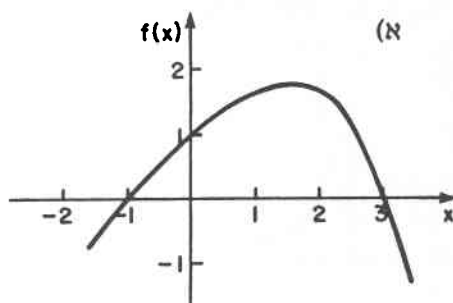
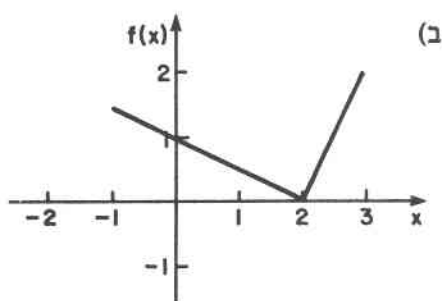
מה קורה בתחום חלקי?

נקודות אפס

הגדרה:

נקודת אפס של פונקציה היא מקור שתמונתו אפס.

1. מהן נקודות האפס של הפונקציות הבאות?



(ד) $f: \{\text{השלמים}\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x - 5$

(ג) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x - 5$

(ו) $f: \{\text{הטבעיים}\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

(ה) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

2. שרטט גרף של פונקציה שאין לה נקודות אפס.

3. מצא הצגה אלגברית של פונקציה אשר נקודות האפס שלה הן 0 ו-4.

חיוביות ושליליות

הגדרה:

פונקציה נקראת חיובית בתחום חלקי שלה, אם התמונה של כל מקור בתחום זה היא חיובית.

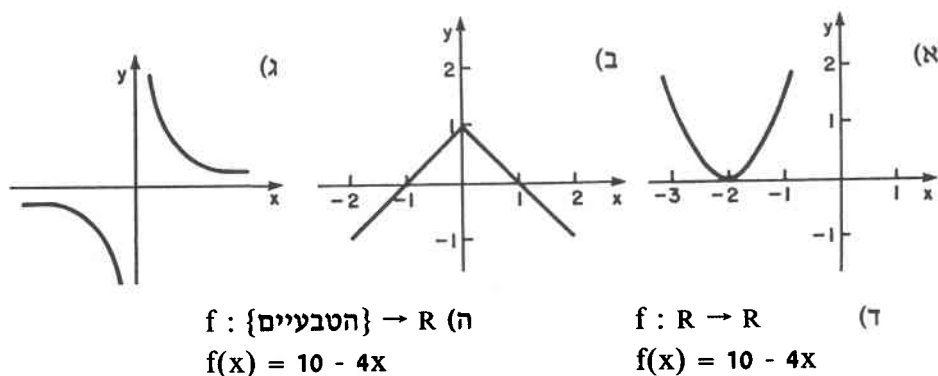
4. הגדר פונקציה שלילית בתחום חלקי.

5. מה ידוע לך על הגרף של פונקציה f במקרים הבאים:

(א) f חיובית בכל תחומה.

(ב) f שלילית בכל תחומה.

6. מצא את התחומים החלקיים בהם הפונקציות הבאות חיוביות, ומצא את התחומים החלקיים בהם הן שליליות.

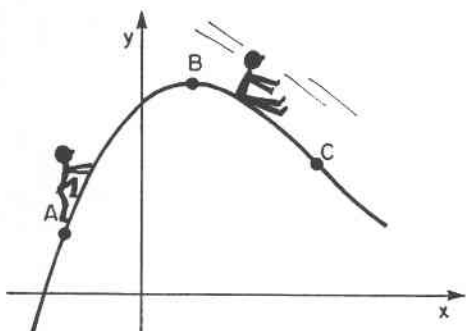


הערה:

בהמשך, כשנתייחס לתחום חלקי נקרא לו, לשם קיצור, תחום. מההקשר אפשר יהיה להבין אם הכוונה לתחום חלקי או לתחום הפונקציה.

7. שרטט גרף של פונקציה שתחומה $\mathbb{R}$ המקיימת את כל התנאים הבאים:

$g(2) = -2$, $g(-2) = 6$, עבור $x < -1$ הפונקציה חיובית, עבור $x > -1$ הפונקציה שלילית.



עליה וירידה

לפניך גרף של פונקציה.
נתאר לעצמנו אדם ההולך על
גרף הפונקציה, כאשר כיוון
התקדמותו הוא הכיוון החיובי
של ציר x (כלומר, משמאל לימין).

נניח כי הוא יוצא מנקודה A
שעל הגרף. כדי להגיע לנקודה B שעל הגרף עליו לעלות.
אחר-כך, כדי להגיע מהנקודה B לנקודה C , עליו לרדת.
העליה והירידה של האדם על גבי הגרף הינן המחשה למושג המתמטי של
עליה וירידה של פונקציות.

8. בחר מבין (א) - (ד) את הסיום המתאים:

אם פונקציה עולה בתחום מסוים, אז ככל ש- x בתחום זה גדל, $f(x)$

(א) גדל

(ב) קטן

(ג) נשאר שווה

(ד) לפעמים גדל, לפעמים קטן ולפעמים נשאר שווה.

9. נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וידוע כי היא עולה בתחום

$$\{x \mid -6 < x < 6\}$$

סמן $<$ או $>$, אם אפשר לקבוע.

$f(3)$ $f(4)$ (א)

$f(0)$ $f(-4)$ (ב)

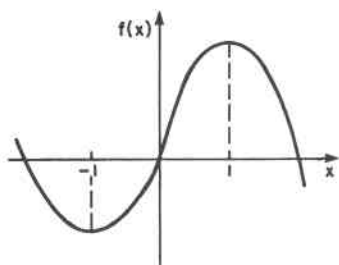
$f(3)$ 0 (ג)

$f(-2)$ $f(8)$ (ד)

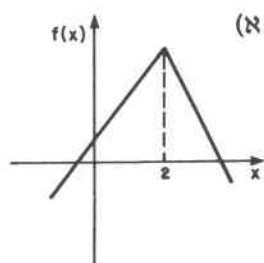
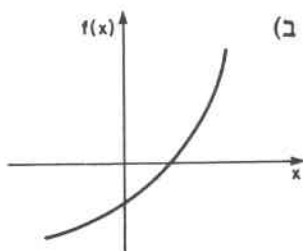
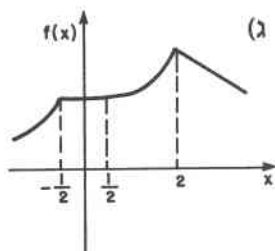
$f(-4)$ 5 (ה)

10. לגבי כל אחת מן הפונקציות ציין באיזה תחום (או תחומים) היא עולה.

לדוגמא:



תחום העליה: $\{x \mid -1 < x < 1\}$



11. בחר מבין (א - ד) את הסיום המתאים:

אם פונקציה יורדת בתחום מסוים, אז ככל ש- x בתחום זה גדל, $f(x)$

(א) גדל

(ב) קטן

(ג) נשאר שווה

(ד) לפעמים גדל, לפעמים קטן ולפעמים נשאר שווה.



12. נתונה הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וידוע כי היא יורדת בתחום

$$\{x \mid -4 < x < 6\}$$

סמן $<$ או $>$, אם אפשר לקבוע.

(א) $f(2)$ $f(3)$

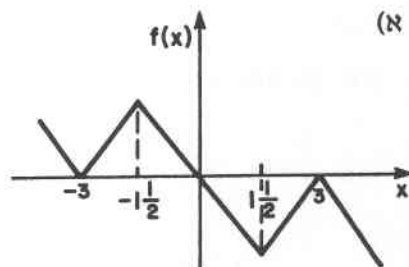
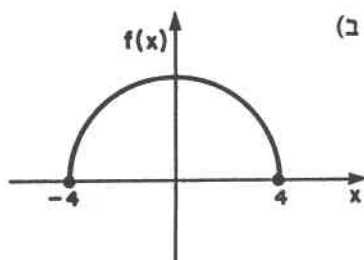
(ב) $f(1)$ $f(-3)$

(ג) $f(\frac{1}{3})$ $f(-\frac{1}{4})$

(ד) $f(5)$ 0

(ה) $f(8)$ $f(-2)$

13. לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות ציין באיזה תחום (או תחומים) היא יורדת.



14. נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

f עולה בתחום $\{x \mid x < 0\}$ ויורדת בתחום $\{x \mid x > 0\}$

סמן $<$ או $>$ או $=$, אם אפשר לדעת.

(א) $f(5)$ $f(6)$

(ב) $f(-4)$ $f(-2)$

(ג) $f(3)$ $f(-3)$

(ד) $f(-2)$ $f(6)$

הגדרה:

פונקציה עולה בתחום מסוים¹ אם לכל $x_2 > x_1$
השייכים לתחום זה קיים גם $f(x_2) > f(x_1)$

פונקציה יורדת בתחום מסוים¹ אם לכל $x_2 > x_1$
השייכים לתחום זה קיים גם $f(x_2) < f(x_1)$

15. פונקציה קבועה בתחום מסוים היא פונקציה שכל תמונותיה בתחום זה שוות.

השלם את ההגדרה:

פונקציה קבועה בתחום מסוים¹ אם לכל $x_2 > x_1$
השייכים לתחום זה קיים גם:

16. (בחר מבין א) - ד) את הסיום המתאים:

אם פונקציה קבועה בתחום מסוים, אז ככל ש- x בתחום זה גדל, $f(x)$

(א) גדל

(ב) קטן

(ג) נשאר שווה

(ד) לפעמים גדל, לפעמים קטן ולפעמים נשאר שווה.

- נקודות אפס של פונקציה הן המקורות של הנקודות בהן גרף הפונקציה חותך את ציר x .
- אם פונקציה חיובית בכל תחומה, הגרף שלה נמצא כולו מעל ציר x .
- כדי למצוא נקודות אפס, או תחומים בהם הפונקציה חיובית או שלילית, כאשר נתונה הצגה אלגברית של הפונקציה, יש לפתור תבנית פסוק מתאימה.
- עליה וירידה נוכל למצוא בשלב זה באופן שיטתי רק מן ההצגה הגרפית של הפונקציה.

1 מדובר רק בתחום שהוא קטע או קרן או ישר ולא בתחום מפוצל.

תרגילים

נקודות אפס

1. מהן נקודות האפס של הפונקציות הבאות, המוגדרות ב- $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x^2 - 25 \quad (1) \quad f(x) = (x - 2)(x - 5) \quad (א)$$

$$f(x) = (x + 5)^2 \quad (2) \quad f(x) = x(x + 4) \quad (ב)$$

$$f(x) = 2 - \frac{2x - 4}{3} \quad (ח) \quad f(x) = x^2 - 3x \quad (ג)$$

$$f(x) = \frac{x - 1}{2} - \frac{2x + 5}{6} \quad (ט) \quad f(x) = x^2 + 1 \quad (ד)$$

$$f(x) = \frac{x - 1}{3} + \frac{1 - 3x}{9} \quad (י) \quad f(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2 \quad (ה)$$

2. מהן נקודות האפס של הפונקציות הבאות?

$$f : \{\text{הרציונליים}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (ב) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (א)$$

$$f(x) = x^2 - 5 \quad f(x) = x^2 - 5$$

3. מצא הצגה אלגברית של פונקציה שאין לה נקודות אפס.

4. שרטט גרף של פונקציה g המקיימת את התנאים הבאים:

$$g(4) < 0, \quad g(-3) = 5, \quad -2 \leq g(x) \leq 2$$

- האם תוכל לשרטט גרף אחר של פונקציה המקיימת תנאים אלו?

5. מה צריך להיות a כדי ש-2 תהיה נקודת אפס של הפונקציות הבאות?

$$f : \{\text{השליליים}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (ב) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (א)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + ax}{x} \quad f(x) = ax^3 - 2x^2 + 4$$



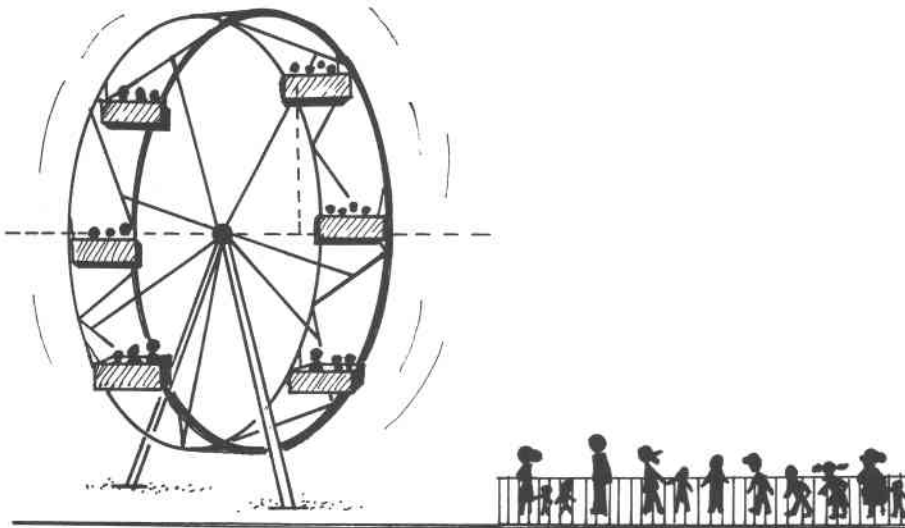
(א) בעירי יש לונה פארק,
ויש בו גם גלגל ענק.
במושב גל יושב,
ולנוף אינו שם לב,
כי על פונקציות הוא חושב.

(ב) בדמיונו הוא מעביר
קוטר היישר דרך הציר.
קו מקביל לאדמה,
אך מדוע ועל מה?
כי עורך הוא התאמה.

(ג) התאמה בין המרחק שרכב
מאז עלה על המושב,
לבין המרחק הנוצר
בינו לבין הקו,
בדמיונו עליו חשב.

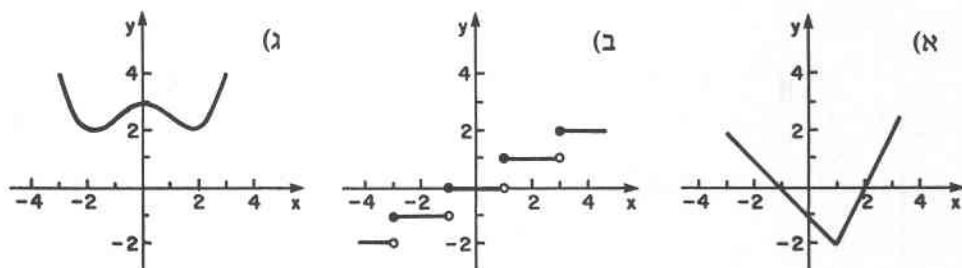
(ד) נסו נא לתאר בגרף,
לא מדויק אך מקורב,
את זו ההתאמה
שהיא כה משונה
עליה גל חשב.

(ה) לפי הערכתו של גל,
מחוגו של הגלגל,
3 מטר אורכו.
נקודות אפס מצאו, איפוא,
בהתאם להערכתו.



חיוביות ושליליות

6. מצא את התחומים בהם הפונקציות הבאות שליליות



7. מצא את התחומים בהם הפונקציות הבאות חיוביות.

$$f(x) = \frac{x-4}{-2} + \frac{3x+5}{4} \quad (ו) \quad f(x) = \frac{x-2}{3} \quad (א)$$

$$f(x) = (x+5)^2 - (x-2)^2 \quad (ז) \quad f(x) = 7 - 2x \quad (ב)$$

$$f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2 \quad (ח) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (ג)$$

$$f(x) = 25 - x^2 \quad (ט) \quad f(x) = (x-3)^2 \quad (ד)$$

$$f(x) = 2(x-1) - 7x \quad (י) \quad f(x) = -|x-2| \quad (ה)$$

8. שרטט גרף של פונקציה f המקיימת את התנאים הבאים:

נקודות האפס של f הן 2, 3, ו-1.
 f חיובית כאשר $2 < x < 3$, ושלילית כאשר $x > 3$ או $x < -1$

- האם תוכל לשרטט גרף אחר של פונקציה המקיימת אותם תנאים?

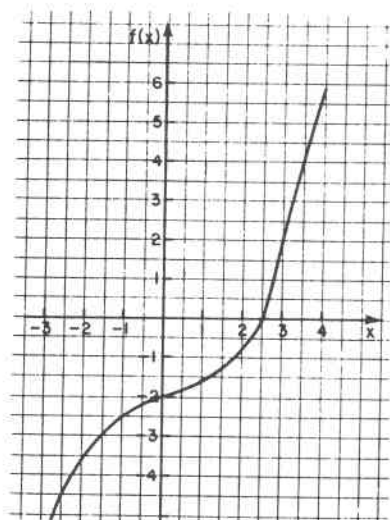
9. מצא את התחומים בהם הפונקציות חיוביות:

$$f : \{\text{השלמים}\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (ב) \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (א)$$

$$f(x) = 2 - x^2 \quad f(x) = 2 - x^2$$

10. שרטט גרף של פונקציה שהיא חיובית בתחום $x > 0$ ושלילית בתחום $x < 0$ ואין לה נקודות אפס.

- האם תוכל לשרטט גרף אחר של פונקציה המקיימת אותם תנאים?



11. בשרטוט גרף של הפונקציה f

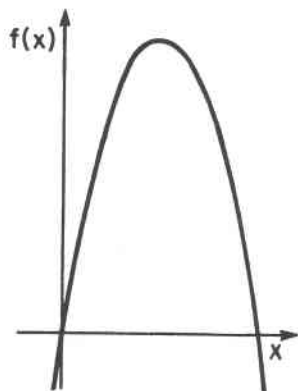
(א) ידוע כי $f(x) = -3$.
מה תוכל לומר על x ?

(ב) ידוע כי $f(x) < 2$.
מה תוכל לומר על x ?

(ג) ידוע כי $-3 < f(x) < 4$.
מה תוכל לומר על x ?

(ד) מהי נקודת האפס של הפונקציה?

(ה) באיזה תחום הפונקציה שלילית?



12. סכום שני מספרים ממשיים הוא 6.

לפניך גרף הפונקציה f המתאימה
לאחד המספרים - x את מכפלתם.

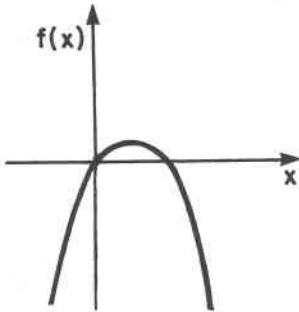
(א) רשום תחום וחוק התאמה
לפונקציה באמצעות תבנית מספר.

(ב) מהן נקודות האפס של הפונקציה?

(ג) באיזה תחום הפונקציה שלילית? הסבר!

(ד) האם נכון לומר כי "ככל שאחד המספרים גדל,
גדלה גם המכפלה"? נמק!

13. לפניך גרף הפונקציה



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x(1 - x)$$

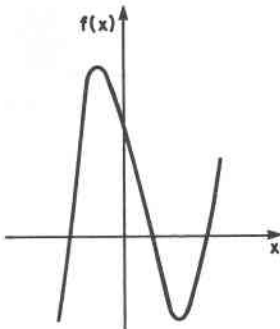
- (א) מצא את נקודות האפס של הפונקציה.
(ב) מהו התחום שבו הפונקציה חיובית?
(ג) נחש את המקורות של 12-.

★ נסה את כוחך

- (ד) a ו- b הם שני מקורות הנמצאים בין שתי נקודות האפס במרחק שווה מהן. הבע את b בעזרת a והראה כי לשני המקורות יש תמונות שוות.

- ה) ב"ד הוכחת כי גרף הפונקציה סימטרי בתחום שבין שתי נקודות האפס. מהו המקור שתמונתו מקסימלית? חשב תמונה זו.

★ ★



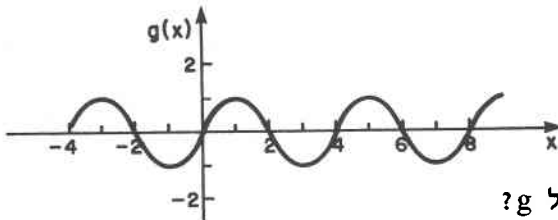
14. לפניך גרף הפונקציה

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

- (א) מצא את נקודות האפס של הפונקציה
- (ב) מצא את התחומים בהם הפונקציה חיובית.

★ נסה את כוחך

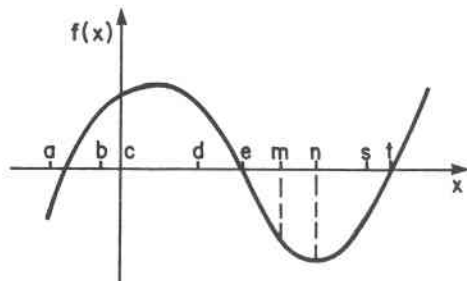
15. לפניך גרף של פונקציה g שהיא פונקציה מחזורית (חוזרת על עצמה).



- (א) מהן נקודות האפס של g ?
- (ב) מהם התחומים בהם הפונקציה חיובית?

★ ★

16. לפניך גרף הפונקציה f .



סמן נכון/לא נכון

(א) $f(d) > 0$

(ב) $f(b) > 0$

(ג) $f(t) < f(a)$

(ד) $f(n) > f(m)$

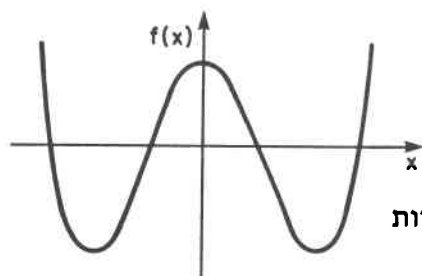
(ה) אם $b < x < c$ אז $f(x) > 0$

(ו) אם $x > t$ אז $f(x) > 0$

(ז) $f(b) = f(s)$

(ח) אם $x < c$ אז $f(x) < 0$

(ט) אם $e < x < t$ אז $f(x) < 0$



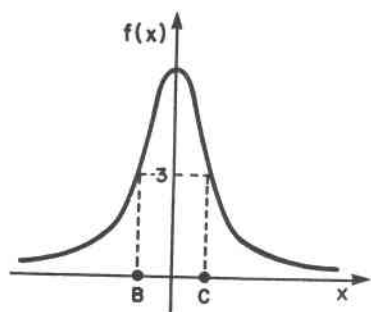
17. לפניך התיאור הגרפי של הפונקציה

$$f(x) = \frac{x^4}{9} - 2x^2 + 5$$



(א) בין אילו שני מספרים שלמים סמוכים נמצאות כל אחת מנקודות האפס של הפונקציה? אל תחפש את נקודות האפס עצמן.

(ב) הנקודות הנמוכות ביותר בגרף מתקבלות עבור x -ים שלמים. מצא את שיעורי הנקודות האלו.



18. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = \frac{6}{1+x^2}$

(א) סמן ב-A נקודה על הגרף שמקורה 0.

מהי התמונה של 0?

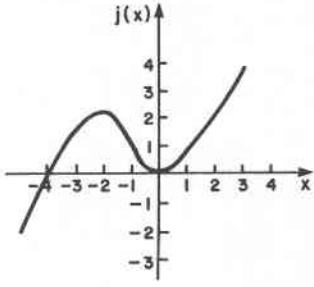
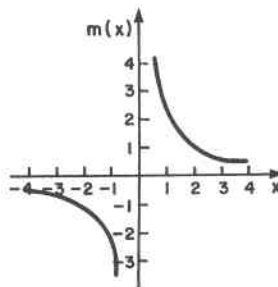
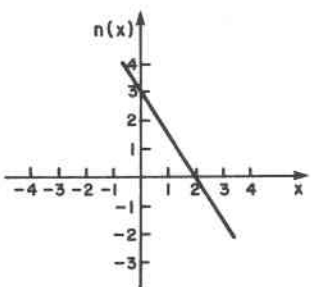
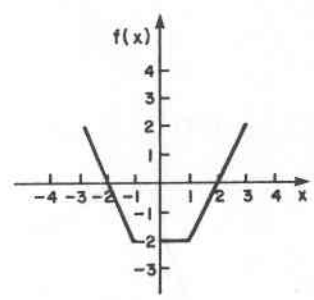
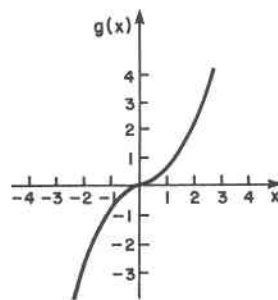
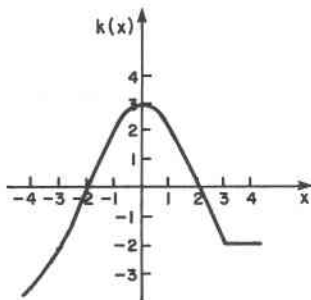
(ב) מהם שיעורי הנקודות B ו-C.

(ג) האם 2- שייך לקבוצת התמונות של f ? נמק.

עליה וירידה

19. לגבי כל אחת מן הפונקציות הבאות, רשום את התחומים המתאימים בטבלה הבאה:

הפונקציה	נקודות אפס	חיובית	שלילית	עולה	יורדת	קבועה
דוגמא: $f(x)$	$-2, 2$	$x < -2$ או $x > 2$	$-2 < x < 2$	$x > 1$	$x < -1$	$-1 < x < 1$
$g(x)$						
$k(x)$						
$j(x)$						
$m(x)$						
$h(x)$						



20. לכל אחד מהסעיפים הבאים, שרטט גרף של פונקציה המקיימת את התכונה.

- (א) הפונקציה עולה בכל התחום.
- (ב) הפונקציה יורדת בכל התחום.
- (ג) הפונקציה קבועה בכל התחום.
- (ד) הפונקציה עולה בחלק מהתחום, ובחלק אחר יורדת.

21. כל אחת מהפונקציות הבאות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ עולה או יורדת או קבועה בתחום חלקי שלה $\{x \mid x > 0\}$.

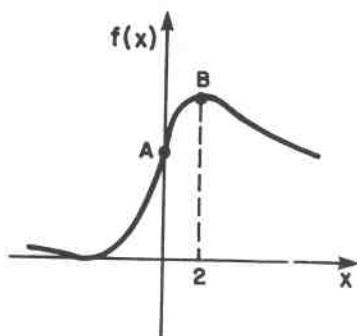
בדוק בלי לשרטט איך "מתנהגת" כל פונקציה בתחום זה.

- | | | |
|-------------------|-------------------|----------------------|
| (א) $f(x) = x^2$ | (ד) $f(x) = 4$ | (ז) $f(x) = -x^3$ |
| (ב) $f(x) = x^3$ | (ה) $f(x) = -x^2$ | (ח) $f(x) = x - 2$ |
| (ג) $f(x) = - x $ | (ו) $f(x) = 3x$ | (ט) $f(x) = 10 - 2x$ |

22. לפניך גרף הפונקציה

$$f(x) = \frac{3(x+4)^2}{x^2+8}$$

- (א) מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
- (ב) מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- (ג) מהו התחום בו הפונקציה חיובית?



לכור!
התחום של פונקציה
היא היגיון בילור האקסני
(בדיק של R) והאולה R
אמא אמא כן נ"ל
אחרי

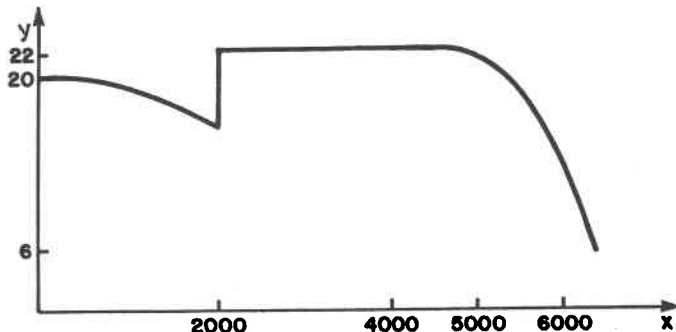


23. לפניך גרף של התאמה. התאמה זו מתאימה למספר הסיבובים שעשה גלגל מכונית מתחילת הנסיעה, את לחץ האויר (באטמוספירות) בגלגל.

(א) ספר במלים מה מתאר הגרף.

(ב) רשום את התחומים בהם ההתאמה היא פונקציה.

(ג) רשום תחומים בהם הפונקציה עולה, יורדת, קבועה.



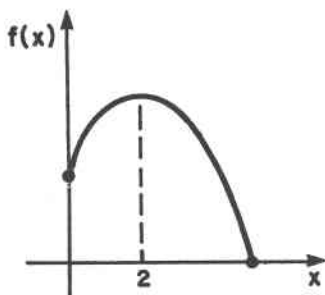
24. אבן נזרקת כלפי מעלה מגג של בית גבוה.

ההתאמה $f(x) = -5x^2 + 20x + 25$ 

מתארת את גובה האבן (במ'), כפונקציה של הזמן (בשניות) שחלף, מאז נזרקה.

(א) מה גובה גג הבית?

(ב) לאיזה גובה מקסימלי הגיעה האבן?



(ג) $f(x) = 25$. מצא $x \neq 0$ מתאים (רמז: השתמש בפרוק לגורמים).

(ד) $f(5) = 0$. בדוק והסבר את המשמעות לגבי הסיפור.

(ה) רשום תחום מתאים לבעיה.

מהי קבוצת התמונות?

(ו) מהו התחום בו הפונקציה עולה? יורדת? הסבר מבחינת הסיפור.

(ז) חשב $f(1) - f(0)$, $f(1) - f(2)$ תן משמעות לחישוב.

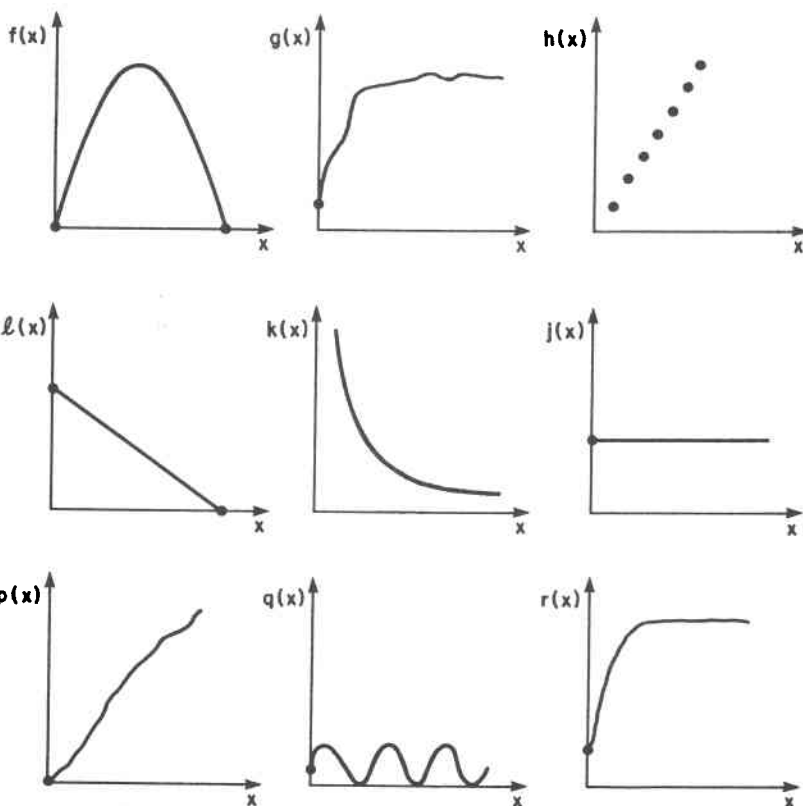
(ח) מצא כמה מטרים ירדה האבן בשניה השלישית למעופה.

שים לב! התשובה איננה 40 מ'.

(ט) השלם: עד 2 שניות, קצב העליה של האבן הולך ו_____

25. התאם לכל תיאור מילולי אחד מן הגרפים.
הפונקציה המתאימה:

- (א) לזמן שעבר את אורכו של נר בוער.
(ב) לגילו של אדם את גובהו.
(ג) לגילו של אדם את משקלו.
(ד) למספר של קוביות (כולן שוות) את משקלן.
(ה) לזמן שחלף את המרחק שעברה מכונית.
(ו) לזמן שחלף את גובהו של כדור שנזרק למעלה ונופל חזרה.
(ז) למספר חיובי את ההופכי לו.
(ח) לאורך היתר של משולש ישר זווית את הזווית הגדולה שלו.
(ט) לדרך שעבר גלגל של אופניים את הגובה של נקודה (הנמצאת עליו) מעל הכביש.



26. שרטט "סקיצה" של גרף של כל אחת מההתאמות הבאות:

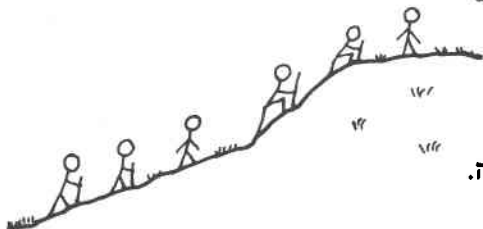
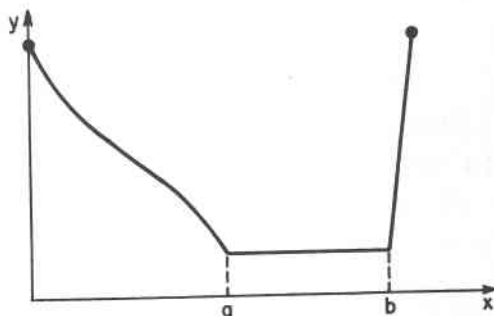
(א) התאמה בין גיל התינוק למשקלו.

(ב) התאמה בין מספר סיבובי הגלגלים לדרך שנסעה מכונית.

(ג) התאמה בין כמות הירקות שהגיעה לשוק לבין מחיר הירקות.

27. לפניך גרף המתאר את כמות הדלק הנמצא במיכל מכונית, כפונקציה של זמן.

תאר את האירועים שעברה המכונית בפרקי הזמן השונים.



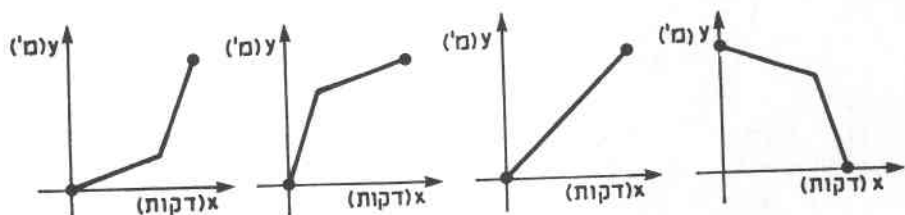
28. לפניך שרטוט של גבעה.

קבוצת צופים טפסה על הגבעה.

מבין הגרפים הבאים

בחר את הגרף המתאים ביותר, לדעתך, לתאר את המרחק שהלכו הצופים בהתאם לזמן, מתחילת העליה ועד לפסגה.

נמק את בחירתך.



29. שרטט בכל מקרה דוגמא לגרף של פונקציה המקיימת את התנאים הבאים:

(א) $f(2) = 1$, f עולה כאשר $x < 0$, f חיובית כאשר $x > -2$.

(ב) $g(2) = -3$, g אין נקודות אפס, g יורדת כאשר $-2 < x < 2$.

(ג) h פונקציה קבועה, $h(0) = 3$

(ד) הפונקציה k מוגדרת בתחום $-4 < x < 4$, יש ל- k שתי נקודות

אפס ופרט להן היא חיובית בכל התחום, k עולה כאשר

$$-3 < x < 0, \quad 3 < x < 4$$

פסק זמן

(ד) ושוב, מטר בדקה עלה אל על ושוב חצי מטר חזרה נפל. וכך התהליך נשנה עד שהגיע אל ראש החומה.

(ה) ועתה נשאלת השאלה כמה זמן הצב עלה אל ראש החומה התלולה אם גובהה 5 מ' היה?

(ו) וכמו כן אתם מתבקשים לשרטט פה גרף מתאים.

(א) אם עוסקים בעליה ובירידה הנה אחוד לכם חידה. לרגלי החומה עמד צב ובדק את המצב.

(ב) החומה חלקה, גובהה מרתיע כיצד אל צידה השני יגיע? הצב החרוץ לא התיאש ומיד התחיל לטפס.

(ג) הוא עלה מטר בדקה, אך החומה היא חלקה, לכן החליק חצי מטר חזרה וזה כהרף עין קרה.



מבחר תשובות

1. (א) 2, 5 (ב) 0, -4 (ג) 0, 3 (ד) אין (ה) 0
(ו) 5, -5 (ז) -5 (ח) 5 (ט) 8 (י) אין.
2. (א) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ (ב) אין.
5. (א) $-\frac{1}{2}$ (ב) 2.
6. (א) $\{x | -1 < x < 2\}$ (ב) $\{x | x < -1\}$ (ג) אין.
7. (א) $\{x | x > 2\}$ (ב) $\{x | x < 3.5\}$ (ג) $\{x | x < -2 \text{ או } x > 2\}$
(ד) $\{x | x \neq 3\}$ (ה) אין. (ו) $\{x | x > -13\}$ (ז) $\{x | x > -1.5\}$
(ח) R (ט) $\{x | -5 < x < 5\}$ (י) $\{x | x < -0.4\}$
9. (א) $\{x | -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ (ב) $\{-1, 0, 1\}$
11. (א) $x = -1.5$ (ב) $x < 3$ (ג) $-1.5 < x < 3.5$ (ד) 2.5 (ה) $x < 2.5$
12. (א) $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x(6 - x)$ (ב) 6, 0 (ג) $\{x | x < 0 \text{ או } x > 6\}$
(ד) לא.
13. (א) 0, 1 (ב) $0 < x < 1$ (ג) 3, -3 (ד) $b = 1 - a$
(ה) $f(0.5) = 0.25$
14. (א) 1, 3, -2 (ב) $-2 < x < 1$, $x > 3$
15. (א) $\{x | x \text{ זוגי}\}$ (ב) $\{x | 4k < x < 4k + 2\}$, k שלם

16. (א) כן (ב) כן (ג) לא (ד) לא (ה) כן (ו) כן (ז) לא
(ח) לא (ט) לא

17. (א) בין 1 ל-2, בין -1 ל-2, בין 3 ל-4, ובין -3 ל-4.

(ב) (-4, 3) (-3, -4)

18. (א) 6 (ב) $B(-1, 3)$, $C(1, 3)$ (ג) לא.

19. הפונקציה נקודות חיובית שלילית עולה יורדת קבועה
אפס

$g(x)$	0	$x > 0$	$x < 0$	R	—	—
$k(x)$	2, -2	$-2 < x < 2$	$x < -2$ או $x > 2$	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
$j(x)$	-4, 0	$-4 < x < 0$ או $x > 0$	$x < -4$	$x < -2$ או $x > 0$	$-2 < x < 0$	—
$m(x)$	—	$x > 0$	$x < 0$	—	$x < 0$ או $x > 0$	—
$h(x)$	2	$x < 2$	$x > 2$	—	R	—

21. (א) עולה (ב) עולה (ג) יורדת (ד) קבועה (ה) יורדת

(ו) עולה (ז) יורדת (ח) עולה (ט) יורדת

22. (א) $A(0, 6)$ $B(2, 9)$ (ב) $\{x | -4 < x < 2\}$ (ג) $\{x | x \neq -4\}$

24. (א) 25 מ' (ב) 45 מ' (ג) $x = 4$ (ה) $\{x | 0 \leq x \leq 5\}$

(ו) $\{x | 0 < x < 2\}$, $\{x | 2 < x < 5\}$ (ז) $\{f(x) | 0 \leq f(x) \leq 45\}$

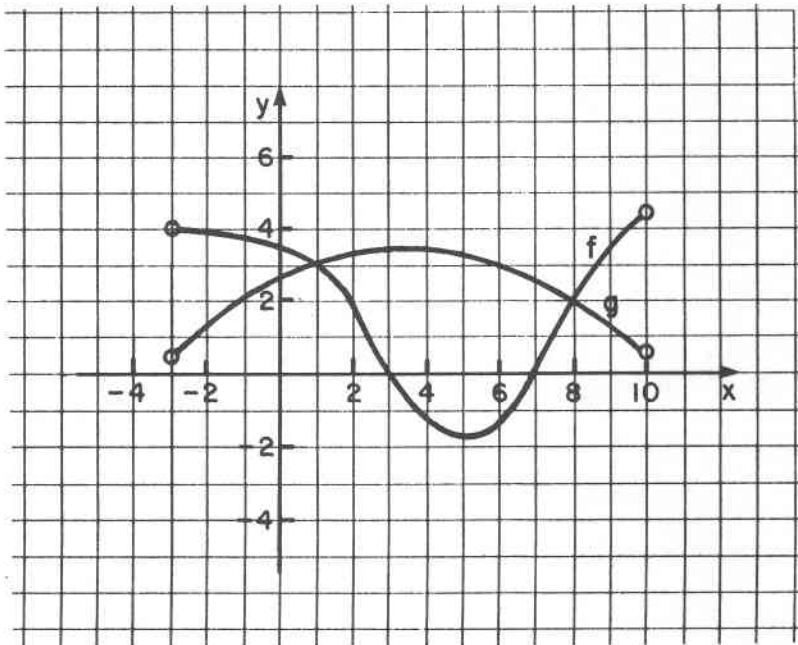
(ח) 5 מ' (ט) וקטן

זוגות של פונקציות

שוויון פונקציות

1. נתונים גרפים של שתי פונקציות f ו- g המוגדרות באותו תחום:

$$\{x \mid -3 < x < 10\}$$



(א) מהו ערכו של x כאשר $f(x) = g(x)$?

(ב) הערך של איזו פונקציה גדול יותר בנקודה $x = 5$ ובנקודה $x = -1$?

(ג) מצא את קבוצת האמת של תבנית הפסוק $f(x) \leq g(x)$

(ד) מצא את קבוצת האמת של תבנית הפסוק $f(x) > g(x)$

(ה) מהן נקודות האפס של הפונקציה f ?

(ו) באילו תחומים הפונקציה f חיובית?

2. מצא אם אפשר, לכל זוג פונקציות את המקורות אשר יש להם אותה תמונה לפי שתי הפונקציות. התחום של כל הפונקציות הוא R .

הדרכה: העזר בפתרון משוואה

$$g(x) = x \qquad f(x) = \frac{1}{2}x + 3 \quad (\text{א})$$

$$g(x) = |x - 2| \qquad f(x) = 3 \quad (\text{ב})$$

$$g(x) = x^2 - 6x + 9 \qquad f(x) = (x - 3)^2 \quad (\text{ג})$$

$$g(x) = -4 \qquad f(x) = x^2 + 3 \quad (\text{ד})$$

3. נתונות שלוש פונקציות: f, g, h , עם תחום וטווח R .

$$f(x) = x \qquad g(x) = \sqrt{x^2} \qquad h(x) = |x|$$

(א) לכל מקור יש אותה תמונה לפי שתיים מן הפונקציות. מצא את שתי הפונקציות.

(ב) שנה את התחום כך שלכל מקור תהיה אותה תמונה לפי שלוש הפונקציות.

הגדרה:

שתי פונקציות f ו- g נקראות שוות זו לזו, אם ורק אם הן מוגדרות מאותו תחום ואל אותו טווח, ולכל x בתחום מתקיים:

$$f(x) = g(x)$$

$$g : \{x \mid x \neq 0\} \rightarrow R \qquad f : \{x \mid x \neq 0\} \rightarrow R \quad .4$$

$$g(x) = 1 \qquad f(x) = \frac{|x|}{x}$$

האם f ו- g הן פונקציות שוות? נמק.

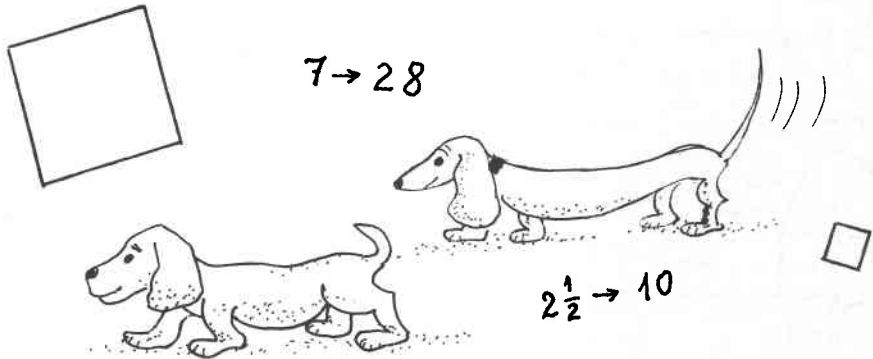
5. הפונקציה f מתאימה לאורך צלע הריבוע את היקפו.

הפונקציה g מתאימה למספר כלשהו את מכפלתו ב-4.

הפונקציה h מתאימה למספר כלבים (בריאים) את מספר רגליהם.

(א) רשום הצגה בדרך אלגברית של הפונקציות f , g ו- h . אילו מהן שוות? הסבר.

(ב) שרטט את שלוש הפונקציות. (שים לב לתחום!)



6. נתונות שתי הפונקציות



$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 2.5x - 2$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 3x - 6 - \frac{x - 8}{2}$$

(א) חשב את $f(x)$ ואת $g(x)$ עבור המקורות הבאים: 1, 0, -2.

(ב) האם הפונקציות שוות?

7. נתונות שתי הפונקציות



$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 0.5x^4 - 9.5x^2 + 3x$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^5 - 7x^3$$

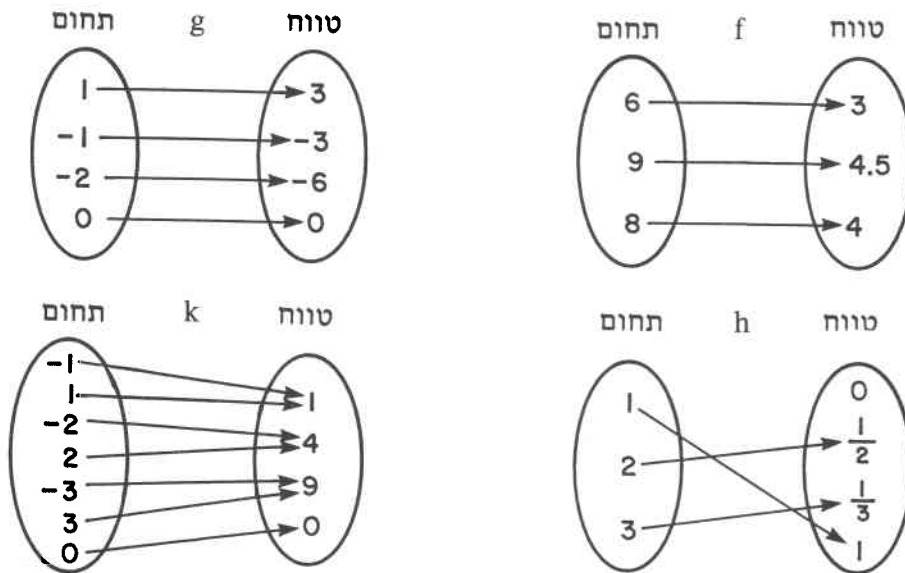
(א) חשב את $f(x)$ ואת $g(x)$ עבור המקורות הבאים:

0, 1, 2, 0.5, -3.

(ב) האם הפונקציות שוות?

פונקציות הפוכות זו לזו. רלע

8. לפניך ארבע פונקציות המתוארות בדיאגרמות חיצים.



(א) הפוך את כיווני החיצים, ואת התחום לטווח ולהיפך.

- האם התקבלה פונקציה אחרי היפוך כיווני החיצים?

(ב) מהם, לדעתך, התנאים לקבלת פונקציה אחרי היפוך כיווני החיצים?

הגדרה:

נתונה פונקציה f .

נתאים לכל תמונה את המקור(ות) שלה.

אם התקבלה פונקציה, היא נקראת הפונקציה ההפוכה של f .

9. במסיבת כיתה שיחק דני עם חבריו במשחק הבא: הוא אמר להם לבחור מספר כלשהו, לכפול אותו פי 4, להוסיף לתוצאה 10 ולחלק את הסכום ב־5. כשאמרו לו את התוצאה הסופית אמר להם דני מיד את המספר שבחרו. "זו לא חכמה" - אמרו החברים וניסו כוחם בהמצאת משחקים מסוג זה.

יוסי אמר: בחר מספר כלשהו, העלה אותו בריבוע וחסר מן התוצאה 17, את ההפרש חלק ב־2.

ננסה, אמר דני. בחרתי מספר וקבלתי 4.

יוסי: בחרתי 5.

דני: לא נכון, בחרתי 5-.

רותי אמרה: בחר מספר כלשהו, חסר אותו מ־20 וכפול את ההפרש פי 3.

יעל אמרה: בחר מספר כלשהו, חסר ממנו 2 ואת ההפרש כפול באפס, הוסף לתוצאה 7.

(א) מי הצליח ל"המציא" משחק טוב, כלומר, משחק שמאפשר למצוא את המספר שנבחר?

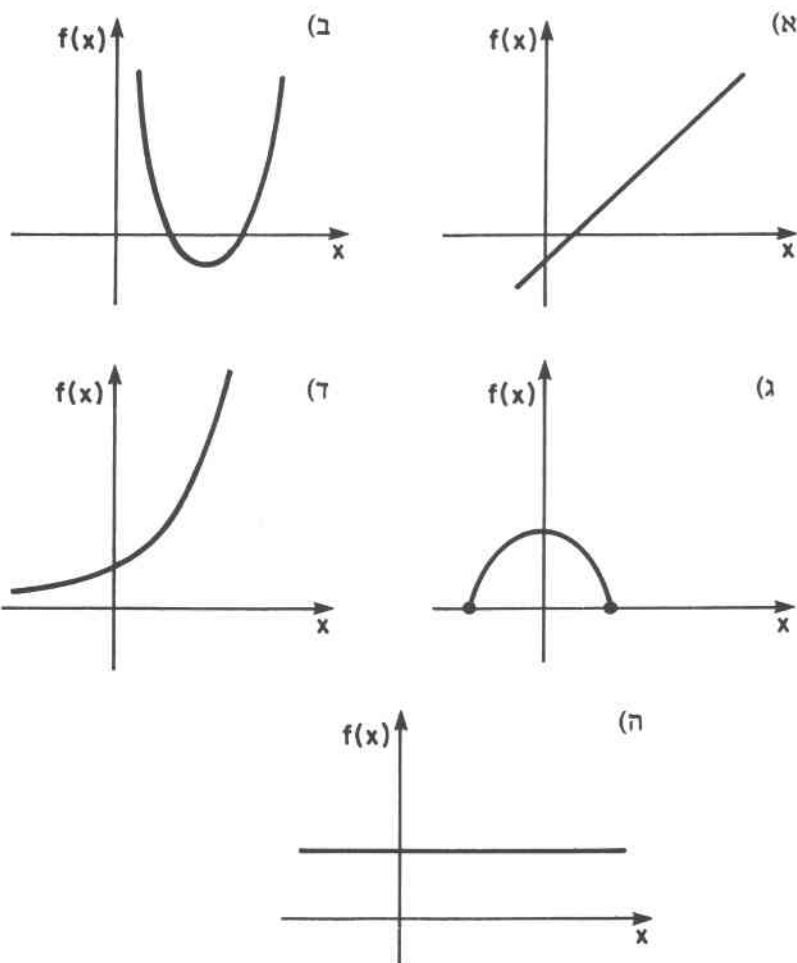
(ב) לגבי ארבעת המשחקים רשום את הפונקציות המתאימות למספרים שנבחרו את התוצאות.

(ג) לגבי המשחקים המוצלחים, רשום את הפונקציות ההפוכות, כלומר, את הפונקציות המתאימות לתוצאות את המספרים שנבחרו.



10. כמה מקורות צריכים להיות לכל תמונה בפונקציה כדי שתהיה קיימת לה פונקציה הפוכה?

11. לפניך גרפים של פונקציות. לאילו מהן ישנה פונקציה הפוכה?



12. השלם:

לפונקציה f אשר הטווח שלה שווה לקבוצת התמונות, יש פונקציה הפוכה, אם ורק אם כל ישר המקביל לציר _____ חותך את הגרף של f ב _____ לכל היותר.

13. (א) שרטט את גרף הפונקציה f שתחומה $\{0, 1, 2, 3\}$ הסטוס שלה שווה לקבוצת התמונות שלה, והיא מקיימת $f(x) = 2x - 2$.
 (ב) שרטט באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה ההפוכה f^{-1} .

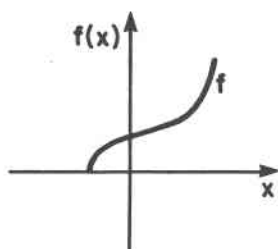
14. f ו- g הן פונקציות הפוכות זו לזו.

- (א) הנקודות $(1, 1)$, $(-2, -5)$, $(2, 5)$ נמצאות על גרף הפונקציה f . אילו מבין הנקודות הבאות חייבות להמצא על גרף הפונקציה g ?

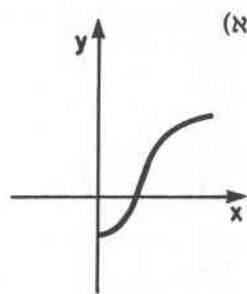
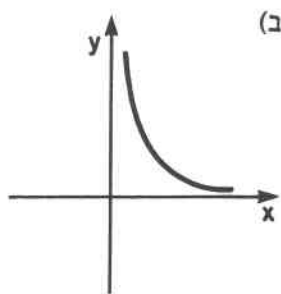
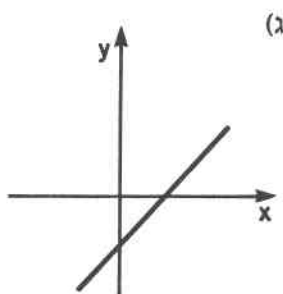
$(-1, -1)$, $(-5, -2)$, $(-2, 5)$, $(5, -2)$, $(2, -5)$, $(5, 2)$

- (ב) הנקודה (a, b) נמצאת על הגרף של f . אילו מבין הנקודות הבאות חייבות להמצא על הגרף של g ?

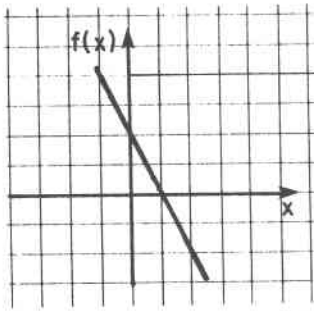
$(-b, -a)$, $(-a, b)$, $(a, -b)$, $(-a, -b)$, (b, a) , $(b, -a)$



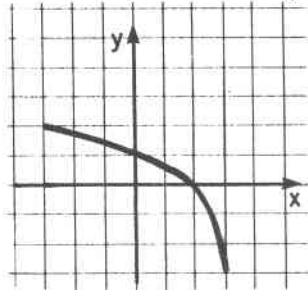
15. לפניך גרף הפונקציה f .
 מי מבין הגרפים הבאים
 הוא גרף הפונקציה
 ההפוכה ל- f ?



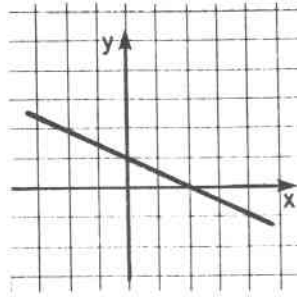
16. זהה את גרף הפונקציה
ההפוכה ל- f מבין
הגרפים הבאים:



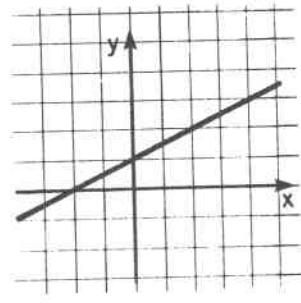
(ג)



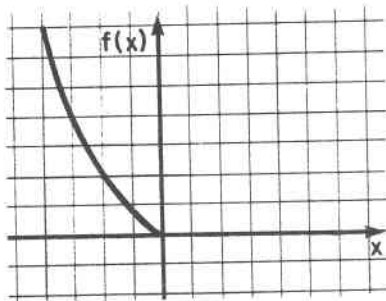
(ב)



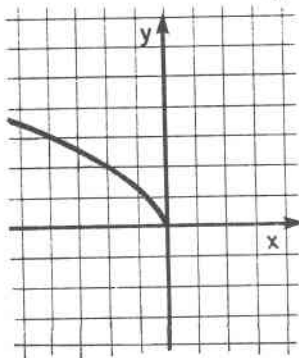
(א)



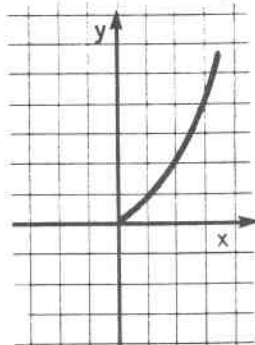
17. זהה את גרף הפונקציה
ההפוכה ל- f מבין
הגרפים הבאים:



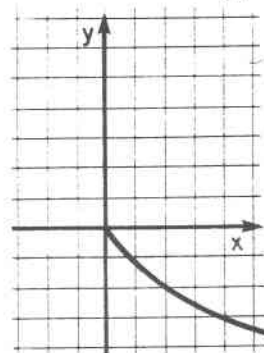
(ג)



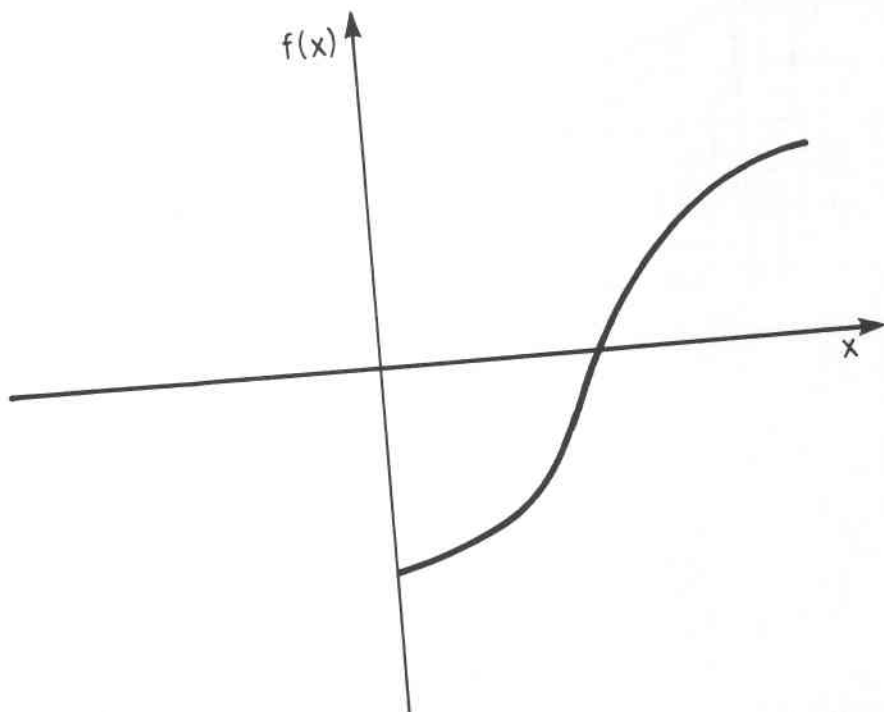
(ב)



(א)

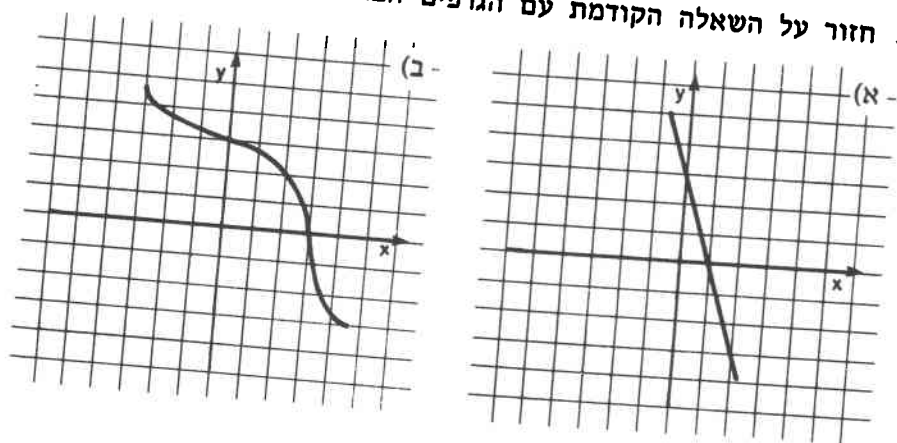


18. לפניך גרף של פונקציה f



- (א) העתק על נייר שקוף את מערכת הצירים ואת הגרף ללא האותיות. שים לב כי ציר המקורות עבה יותר ושרטט בהתאם.
- (ב) הנח את הנייר השקוף על השרטוט שבספר כך שציר התמונות יפול על ציר המקורות ולהיפך. שים לב לכיוונים של הצירים!
- (ג) הגרף החדש שהתקבל במערכת הצירים שבספר הוא גרף של פונקציה. נמק.
- מה הקשר בין פונקציה זו לפונקציה f ?

19. חזור על השאלה הקודמת עם הגרפים הבאים:



20. (א) שרטט במחברתך את גרף הפונקציה:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

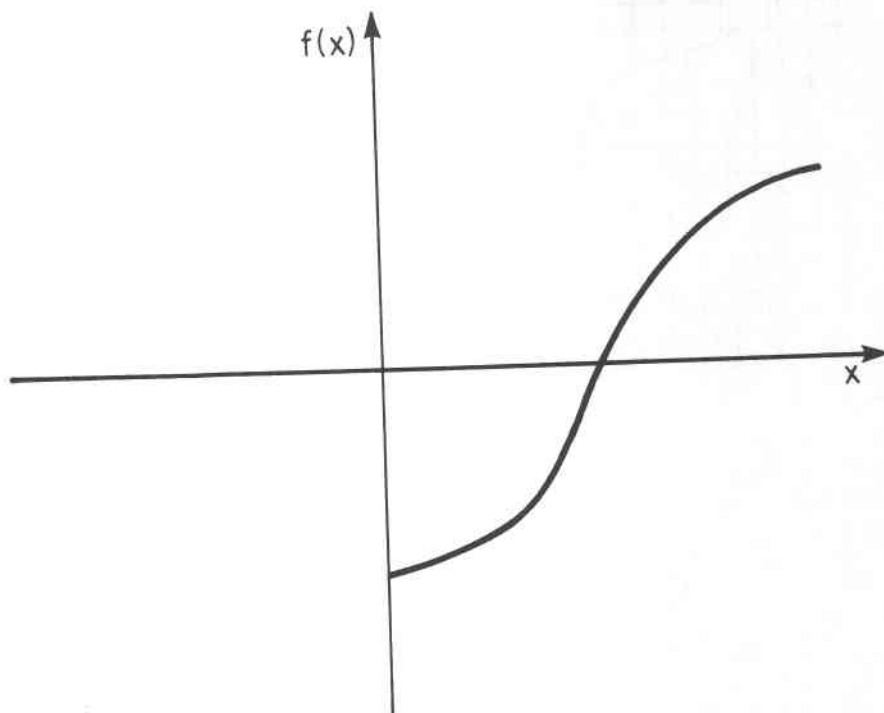
$$f(x) = 2x + 2$$

- (ב) שרטט באותה מערכת צירים את הגרף של $y = x$.
 (ג) שרטט באותה מערכת צירים את הגרף של הפונקציה g ההפוכה ל- f . (תוכל להעזר בנייר שקוף).
 (ד) מה תוכל לומר על קשר בין הגרפים של הפונקציה והפונקציה ההפוכה לגבי הישר $y = x$.

- כדי שלפונקציה f תהיה פונקציה הפוכה צריכים להתקיים שני תנאים:

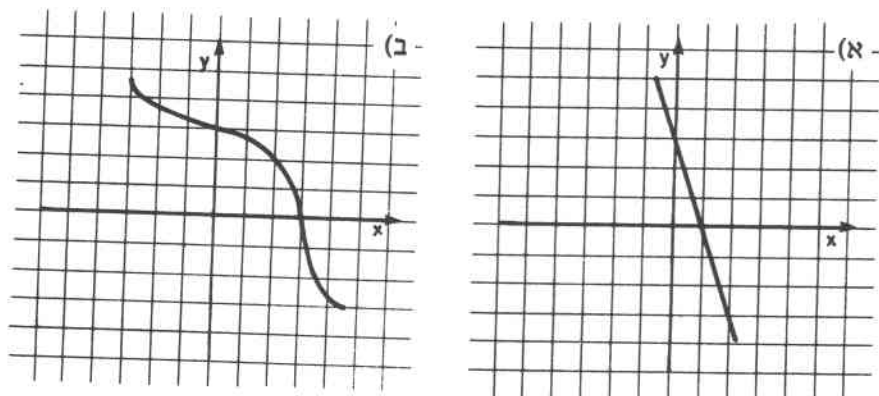
- (א) הטווח של f שווה לקבוצת התמונות שלה.
 (ב) לכל תמונה יש מקור יחיד לפי f .
 - באופן גרפי: כל ישר מקביל לציר x צריך לחתוך את גרף הפונקציה פעם אחת לכל היותר.
 - הפונקציה ההפוכה היא שיקוף של f לגבי הישר $y = x$

18. לפי גרף של פונקציה f



- (א) העתק על נייר שקוף את מערכת הצירים ואת הגרף ללא האותיות. שים לב כי ציר המקורות עבה יותר ושרטט בהתאם.
- (ב) הנח את הנייר השקוף על השרטוט שבספר כך שציר התמונות יפול על ציר המקורות ולהיפך. שים לב לכיוונים של הצירים!
- (ג) הגרף החדש שהתקבל במערכת הצירים שבספר הוא גרף של פונקציה. נמק.
- מה הקשר בין פונקציה זו לפונקציה f ?

19. חזור על השאלה הקודמת עם הגרפים הבאים:



20. (א) שרטט במחברתך את גרף הפונקציה:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 2$$

(ב) שרטט באותה מערכת צירים את הגרף של $y = x$.

(ג) שרטט באותה מערכת צירים את הגרף של הפונקציה g ההפוכה ל- f . (תוכל להעזר בנייר שיקוף).

(ד) מה תוכל לומר על קשר בין הגרפים של הפונקציה והפונקציה ההפוכה לגבי הישר $y = x$.

- כדי שלפונקציה f תהיה פונקציה הפוכה צריכים להתקיים שני תנאים:

(א) הטווח של f שווה לקבוצת התמונות שלה.

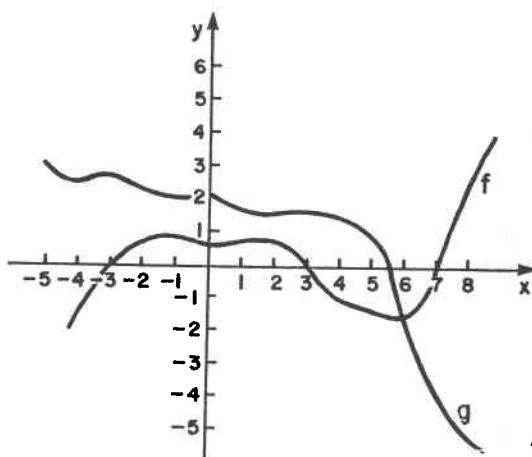
(ב) לכל תמונה יש מקור יחיד לפי f .

- באופן גרפי: כל ישר מקביל לציר x צריך לחתוך את גרף הפונקציה פעם אחת לכל היותר.

- הפונקציה ההפוכה היא שיקוף של f לגבי הישר $y = x$

שוויון פונקציות

1. נתונים גרפים של שתי פונקציות f ו- g .



נכון או לא נכון?

(א) $f(3) > g(3)$

(ב) $f(-3) < g(-3)$

(ג) $g(0) = 5\frac{1}{2}$

(ד) לכל x המקיים $x > 7$, $f(x) > g(x)$

(ה) $f(7) = 0$

(ו) $f(3) \leq 0$

(ז) $f(0) = 2$

(ח) קיים x , $x > 3$, שעבורו $f(x) = g(x)$

(ט) אם $f(x) = g(x)$ אז $x = 6$

(י) f היא פונקציה יורדת לכל x .

(יא) כאשר $x < 5.5$ אז $g(x) > 0$

(יב) כאשר $3 < x < 7$ או $x < -3$ אז $f(x) < 0$.

2. מצא לכל זוג פונקציות את המקורות אשר יש להם אותה תמונה לפי שתי הפונקציות. התחום של כל הפונקציות הוא $\mathbb{R}$.

הדרכה: העזר בפתרון משוואה.

$$g(x) = (x - 2)^2 \qquad f(x) = x^2 \qquad (\text{א})$$

$$g(x) = 4x + 4 \qquad f(x) = x^2 + 8 \qquad (\text{ב})$$

$$g(x) = (x^2 + x + 1)(x - 1) \qquad f(x) = x^3 - 1 \qquad (\text{ג})$$

$$g(x) = 2x - 8 \qquad f(x) = x^3 + 2x \qquad (\text{ד})$$

$$g(x) = x^2 + x + 18 \qquad f(x) = x + 2 \qquad (\text{ה})$$

$$g(x) = 2 - \frac{x - 4}{3} \qquad f(x) = \frac{x}{2} \qquad (\text{ו})$$

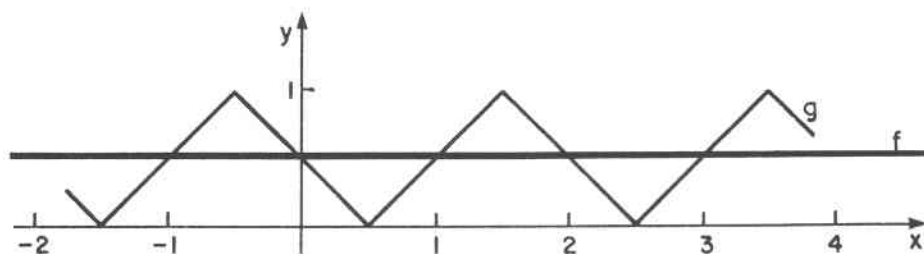
★ נסה את כוחך

$$g(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4} \qquad f(x) = 12 \qquad (\text{ז})$$

★ ★

3. לפניך הגרפים של שתי פונקציות f, g ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

מצא את קבוצת האמת של תבנית הפסוק $f(x) = g(x)$



4. לכל זוג של כללי התאמה מבין הזוגות הבאים, מצא תחום גדול ביותר עבורו הפונקציות תהיינה שוות.

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = x \quad (\text{א})$$

$$g(x) = x \quad f(x) = |x| \quad (\text{ב})$$

$$g(x) = -x \quad f(x) = |x| \quad (\text{ג})$$

$$g(x) = x + 4 \quad f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x} \quad (\text{ד})$$

$$g(x) = x - 1 \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad (\text{ה})$$

$$g(x) = -x \quad f(x) = \frac{x - 5}{5 - x} \cdot x \quad (\text{ו})$$

5. נתונה הפונקציה

$$f : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : x \rightarrow x^2 + 1$$

אילו מן הפונקציות הבאות שוות לה?

$$\begin{array}{ll} h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ h : x \rightarrow x^2 + 1 & g : x \rightarrow x + 1 \end{array}$$

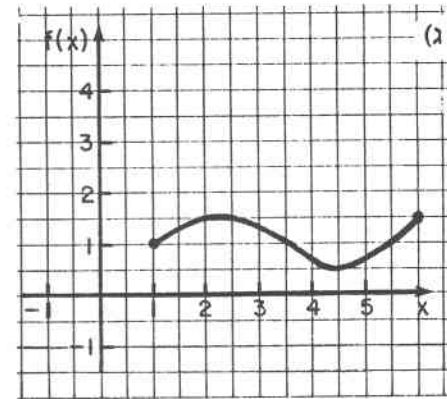
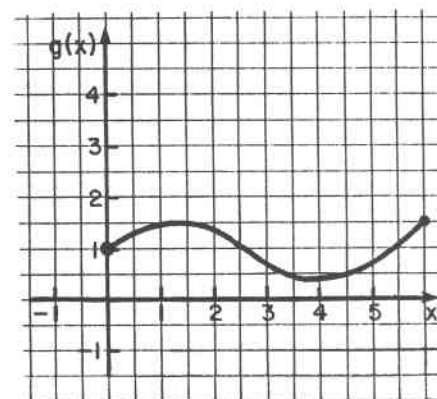
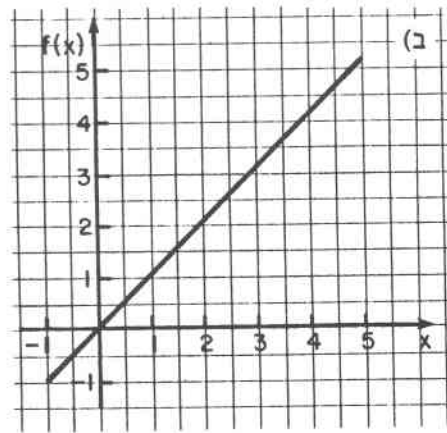
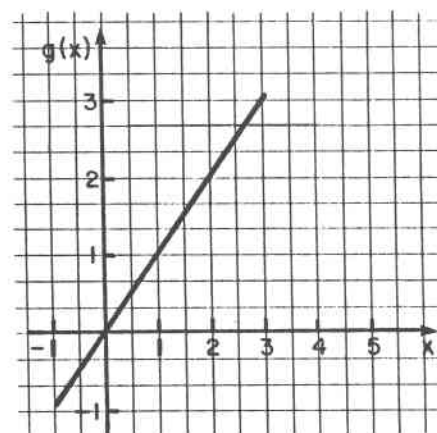
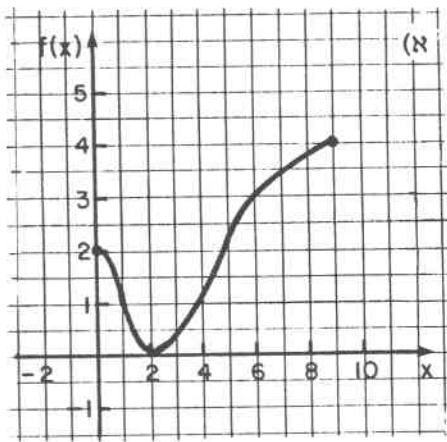
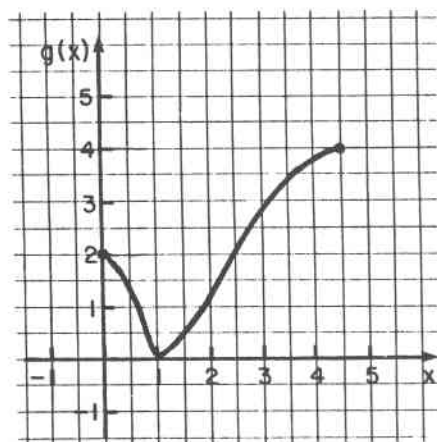
$$\begin{array}{ll} k : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} & r : \{0, -1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ k : x \rightarrow -x^2 + 2x + 1 & r : x \rightarrow x^2 + 1 \end{array}$$

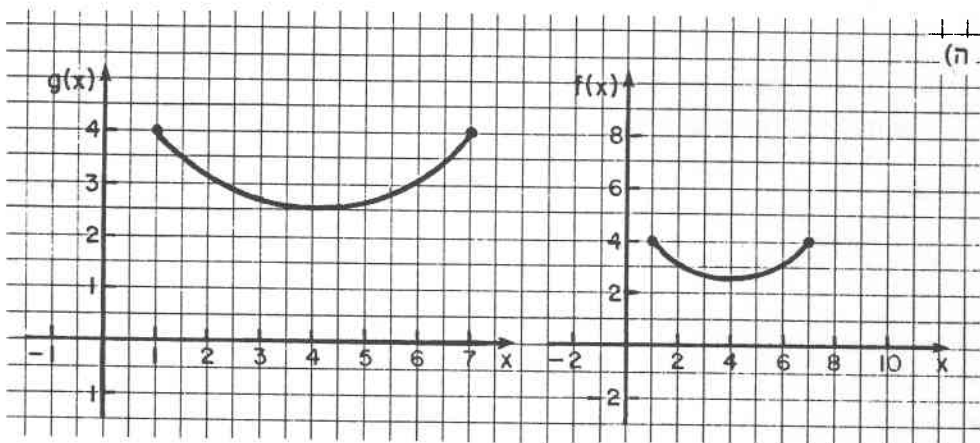
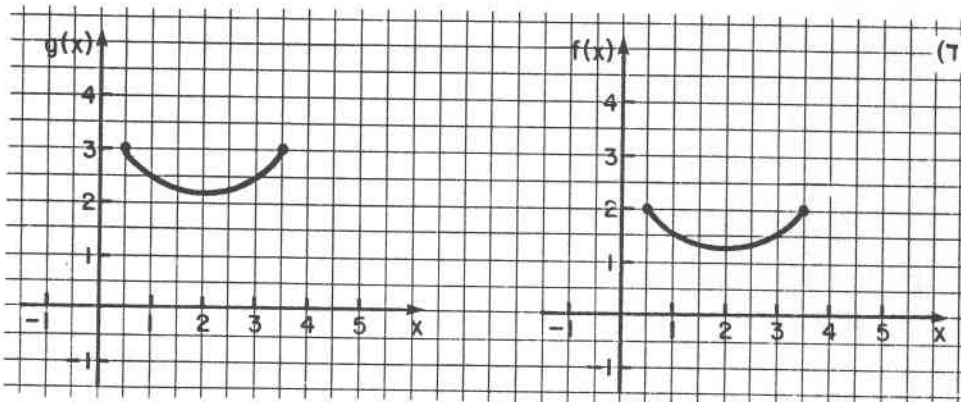
$$\begin{array}{ll} s : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} & t : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ s : x \rightarrow -x^2 + 1 & t = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 2 & x = 1 \end{cases} \end{array}$$

תבניות הימנע אינן תואמות
וכך זאת הפונקציות שוות.
הייתכן?



6. לפניך זוגות של פונקציות המתוארות באופן גרפי.
באילו מן הזוגות הפונקציות שוות זו לזו?





7. מצא, על ידי פישוט, פונקציה שווה לכל אחת מן הפונקציות הבאות שתחומן R (בדוק על ידי הצבה של מקור אחד)

$$f(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2 \quad (ו) \quad f(x) = 3 - [5 - (2x + 1)] \quad (א)$$

$$f(x) = x^2 - (x + 5)(x - 5) \quad (ז) \quad f(x) = 3[5 - (2x + 1)] \quad (ב)$$

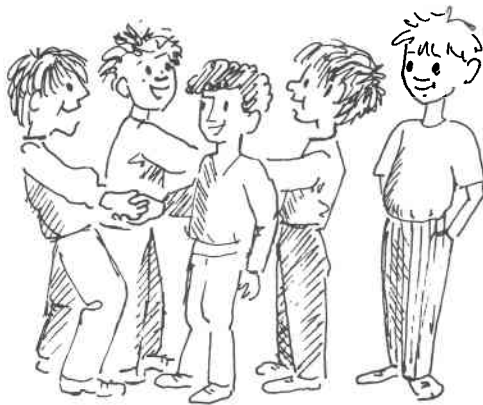
$$f(x) = \frac{x + 4}{4} + \frac{x^3 - 8}{8} \quad (ח) \quad f(x) = (x - 3)^2 + (x + 3)^2 \quad (ג)$$

$$f(x) = x - \frac{1 + x}{x^2 + 1} \quad (ט) \quad f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x^2 + 3} \quad (ד)$$

$$f(x) = x - \frac{5}{4}x \quad (י) \quad f(x) = 1 - \frac{x - 4}{2} \quad (ה)$$

פסק זמן

- (א) בחרוזים פה לפניכם
התאמות נציג לכם.
נא בדקו ההתאמות,
מי מביניהן שוות?
- (ב) מספר נקודות על דף נצייר,
וכל שתיים בקטע נחבר.
ועתה נוכל להתאים
למספר הנקודות את מספר
הקטעים.
- (ג) התאמה שניה קלה,
מתבצעת במצולע.
למספר הקודקודים,
מספר האלכסונים נתאים.
- (ד) אנשים בטקס נפגשו.
כל שניים ידיים לחצו.
למספר האנשים
מספר לחיצות-הידיים נתאים.
- (ה) כל תלמיד מבין המסיימים נתן
את תמונתו לכל האחרים.
למספר התלמידים
מספר התמונות שניתנו
נתאים.
- (ו) בארבע ההתאמות
תחום וטווח קבוצות שוות.
עתה ענו לשאלה
שנשאלה בהתחלה.



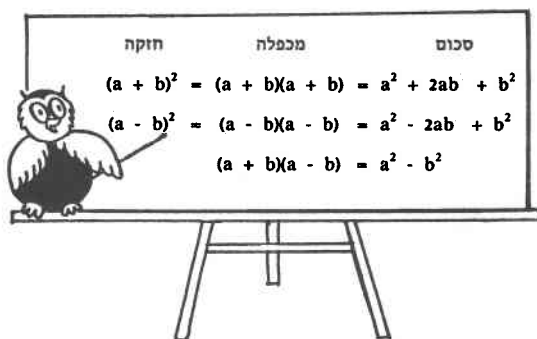
- (א) האם יתכן שלשתי פונקציות שונות יהיה אותו גרף? נמק.
- (ב) האם יתכן שלשתי פונקציות שוות יהיו גרפים שונים? נמק.
- (ג) האם יתכן שלשתי פונקציות שוות תהיינה בחוקי ההתאמה תבניות מספר שאינן תואמות? נמק.
- (ד) האם יתכן שלשתי פונקציות שונות תהיינה בחוקי ההתאמה תבניות מספר תואמות? נמק.

9. לכל פונקציה מסור II מצא את כל הפונקציות השוות לה מסור I.
התחום והטווח של כל פונקציה הוא R.

טור II	טור I	
$g(x) = x^2 - 4x$	$f(x) = (x - 2)^2$	(א)
$h(x) = x^2 - 4$	$f(x) = x(x - 4)$	(ב)
$k(x) = x^2 + 4$	$f(x) = (x + 2)(x - 2)$	(ג)
$j(x) = x^2 - 4x + 4$	$f(x) = (x - 2)^2 + 4x$	(ד)
	$f(x) = \frac{(x - 2)^2 + (x + 2)^2}{2}$	(ה)
	$f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4}$	(ו)

10. מצא פונקציה שווה לכל אחת מהפונקציות הבאות:
(העזר בנוסחות הכפל שבשרטוט)

$f(x) = x^2 + 4x + 4$	(ה)	$f(x) = x^2 - 9$	(א)
$f(x) = x^2 - 2x + 1$	(ו)	$f(x) = x^2 - 1$	(ב)
$f(x) = x^2 + 6x + 9$	(ז)	$f(x) = 25 - x^2$	(ג)
$f(x) = x^4 - x^2$	(ח)	$f(x) = x^2 - x^3$	(ד)



11. נתונה הפונקציה

$$f: \{\text{מספרים טבעיים}\} \rightarrow \{\text{מספרים טבעיים}\}$$

$$f(x) = 4x + 6$$

(א) לכל אחת מהפונקציות הבאות קבע האם היא מתארת פונקציה השווה לפונקציה f .

$$g: \{\text{מספרים טבעיים}\} \rightarrow \{\text{מספרים טבעיים}\}$$

$$g(z) = 4z + 6$$

$$h: \{\text{מספרים טבעיים}\} \rightarrow \{\text{מספרים טבעיים}\}$$

$$h(x) = 2x + 3$$

$$k: \{\text{מספרים ממשיים}\} \rightarrow \{\text{מספרים ממשיים}\}$$

$$k(x) = 4x + 6$$

$$l: \{\text{מספרים טבעיים}\} \rightarrow \{\text{מספרים טבעיים}\}$$

$$l(x) = 2(2x + 3)$$

(ב) שרטט את גרף הפונקציה f

$$12. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = |x - 1|$$

$$f: \{x \mid 0 < x < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

אילו מן הפונקציות הבאות בעלות אותם תחום וטווח, שוות לה?

$$j(x) = x - 1 \quad (\text{ג}) \quad g(x) = |1 - x| \quad (\text{א})$$

$$h(x) = 1 - x \quad (\text{ד}) \quad t(x) = \frac{1 - x^2}{x + 1} \quad (\text{ב})$$

פונקציות הפוכות זו לזו.

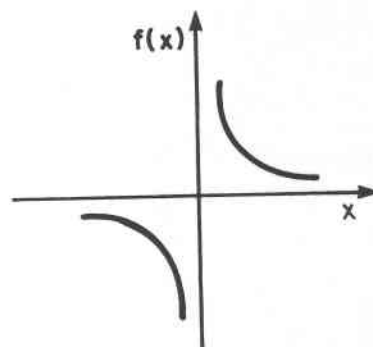
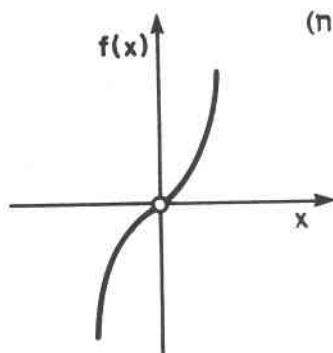
13. לגבי כל אחת מן הפונקציות הבאות, אם אינה הפיכה נמק מדוע.

(א) $f: \mathbb{R} \rightarrow \{y \mid y \geq 0\}$
 $f(x) = x^2$

(ב) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x$

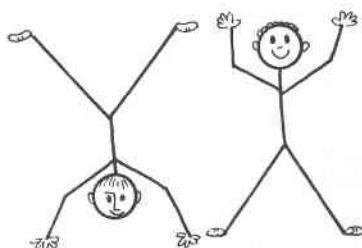
(ג) $f: \{\text{טבעיים}\} \rightarrow \{\text{טבעיים}\}$
 $f(x) = 2x$

(ד) $f: \{x \mid x \neq 0\} \rightarrow \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$

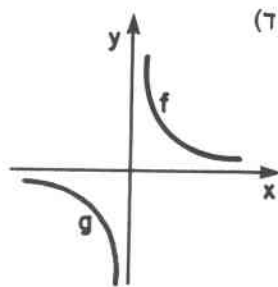
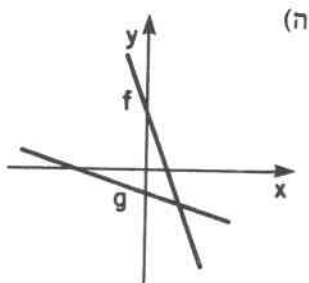
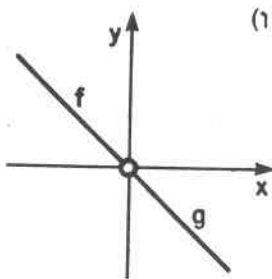
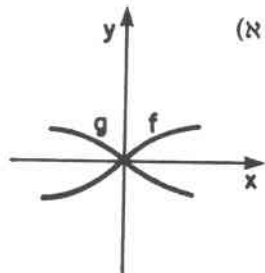
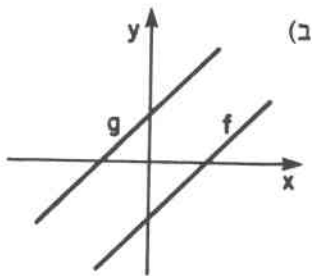
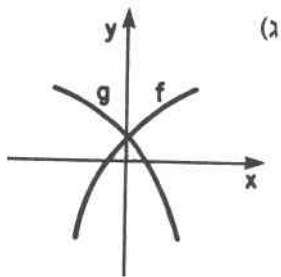


$f: \{x \mid x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$f: \{x \mid x \neq 0\} \rightarrow \{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$



14. באילו ממערכות הצירים הבאות משורטטים גרפים של פונקציות הפוכות זו לזו?

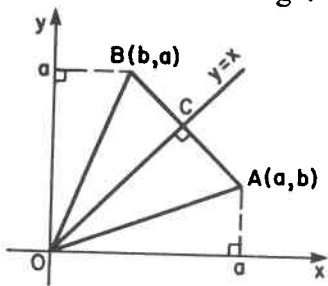


15. שרטט את הגרף של כל אחת מהפונקציות, ואת הגרף של הפונקציה ההפוכה לה באותה מערכת צירים (העזר בגרף של $y = x$).

$$g(x) = -4x - 4 \quad (1) \quad f(x) = 3x \quad (2)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



★ נסה את כוחך

16. הוכח כי הנקודות (a, b) ו- (b, a) סימטריות לגבי הישר $y = x$

הדרכה: לשם כך עליך להוכיח כי OC הוא האנך האמצעי של AB .

כמדת ע
פונקציה
פונקציה הפוכה
15 כדא.



מבחן תשובות

1. (א) לא (ב) כן (ג) לא (ד) כן (ה) כן (ו) כן
 (ז) לא (ח) כן (ט) כן (י) לא (יא) כן (יב) כן
2. (א) 1 (ב) 2 (ג) R (ד) -2 (ה) אין (ו) 4 (ז) 4, -4
3. {השלמים}
4. (א) 1, -1 (ב) $\{x|x \geq 0\}$ (ג) $\{x|x \leq 0\}$
 (ד) $\{x|x \neq 0\}$ (ה) $\{x|x \neq -1\}$ (ו) $\{x|x \neq 5\}$
5. t, k, g
6. ב, ה
7. (א) $f(x) = 2x - 1$ (ב) $f(x) = 12 - 6x$ (ג) $f(x) = 2x^2 + 18$
 (ד) $f(x) = x^2$ (ה) $f(x) = 3 - \frac{x}{2}$ (ו) $f(x) = -4x$ (ז) $f(x) = 25$
 (ח) $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{8}$ (ט) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ (י) $f(x) = -\frac{1}{4}x$
8. (א) כן (ב) לא (ג) כן (ד) כן.
9. (א) j(x) (ב) g(x) (ג) h(x) (ד) k(x) (ה) k(x) (ו) h(x)
10. (א) $f(x) = (x + 3)(x - 3)$ (ה) $f(x) = (x + 2)^2$
 (ב) $f(x) = (x + 1)(x - 1)$ (ו) $f(x) = (x - 1)^2$
 (ג) $f(x) = (5 - x)(5 + x)$ (ז) $f(x) = (x + 3)^2$
 (ד) $f(x) = x^2(1 - x)$ (ח) $f(x) = x^2(x + 1)(x - 1)$
11. (א) g, 1
12. א, ב, ד
13. (א) לא (ב) כן (ג) לא (ד) כן (ה) לא (ו) לא (ז) כן (ח) לא
14. ב, ו

תרגילים לסיכום הפרק

1. לפניך רשימת תכונות. לכל תכונה שרטט גרף של פונקציה המקיימת את התכונה

(א) הפונקציה עולה בכל תחומה.

(ב) תחום הפונקציה אינו R .

(ג) גרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים.

(ד) הפונקציה חיובית בכל תחומה.

(ה) הפונקציה מקיימת $f(2) = 4$.

(ו) גרף הפונקציה חותך את ציר y בנקודה $(0, 4)$.

(ז) יש לפונקציה נקודות אפס.

- לכל אחת מן התכונות הרשומות לעיל, מצא פונקציה בהצגה אלגברית המקיימת אותה.



2. לפניך אוסף של פונקציות חלקן בהצגה אלגברית וחלקן בהצגה גרפית.

(א) רשום לגבי כל פונקציה אילו מן התכונות אשר בשאלה 1 היא מקיימת.

(ב) התוכל למצוא בין הפונקציות זוגות של פונקציות שוות?

(ג) התוכל לשרטט גרף של פונקציה המקיימת את כל התכונות? אם כן, שרטט. אם לא, מצא את מספר התכונות (מן הרשימה) הגדול ביותר שפונקציה כלשהי יכולה לקיים.

$$j : \{x \mid x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$j(x) = x^2$$

$$f : \{x \mid x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow 4$$

$$g(x) = 4$$

$$k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$k(x) = x$$

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

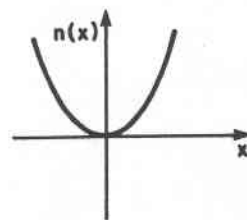
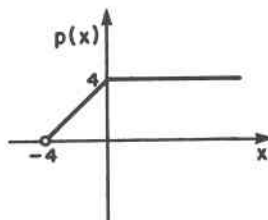
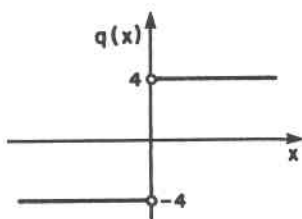
$$h(x) = \begin{cases} x^3 + 4 & x \leq 0 \\ 4 & x > 0 \end{cases}$$

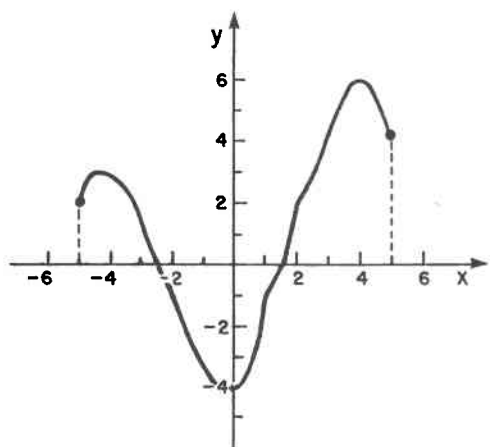
$$m : \{x \mid x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$m(x) = \frac{4x}{|x|}$$

$$l : \{x \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l(x) = x + 2$$





3. הפונקציה f מתוארת

על ידי הגרף שלה.

(א) מהו תחום הפונקציה?

(ב) מהי קבוצת התמונות

של הפונקציה?

(ג) מהם המקורות של 4?

(ד) מהו המקור שתמונתו היא הגדולה ביותר? מהי תמונתו?

(ה) מהן נקודות האפס של הפונקציה?

(ו) באילו תחומים הפונקציה עולה? _____

באילו תחומים הפונקציה יורדת? _____

(ז) באילו תחומים הפונקציה חיובית? _____

(ח) באילו תחומים מתקיים: $-1 \leq f(x) \leq 3$? _____

(ט) מהי קבוצת הערכים שמקבלת הפונקציה בתחום

$$\{x \mid -3 < x \leq 3\}$$

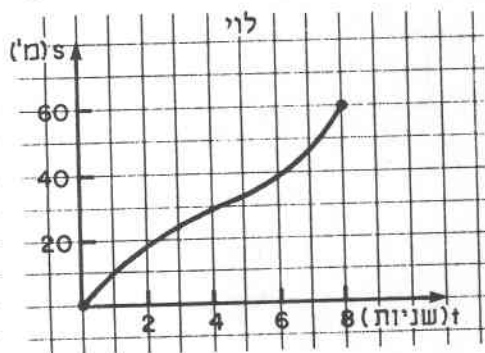
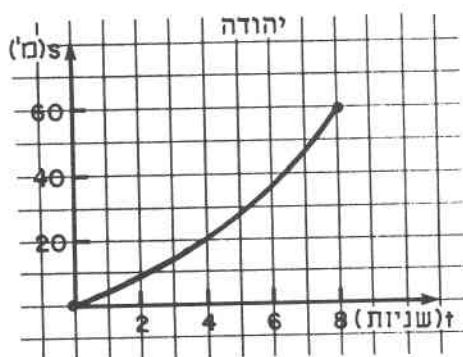
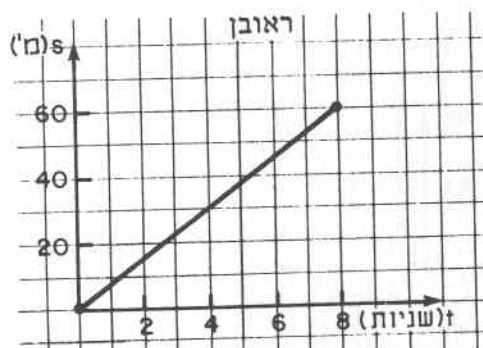
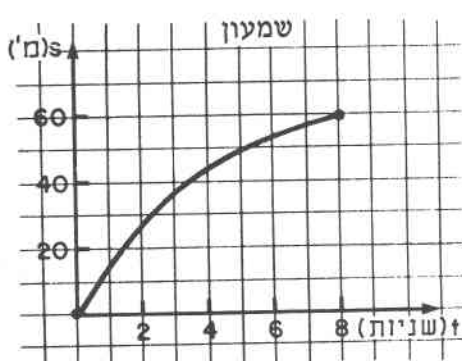
(י) שרטט פונקציה g ($g \neq f$) המקיימת את כל הסעיפים.

פרק ג: הפונקציה הקווית

קצב השינוי של פונקציה קווית

שיפוע של ישר.

1. ארבעה רצים יצאו לתחרות ריצה של 60 מ'. לפניך ארבעה גרפים המתארים את מרחקם מנקודת הזינוק בכל שניה.



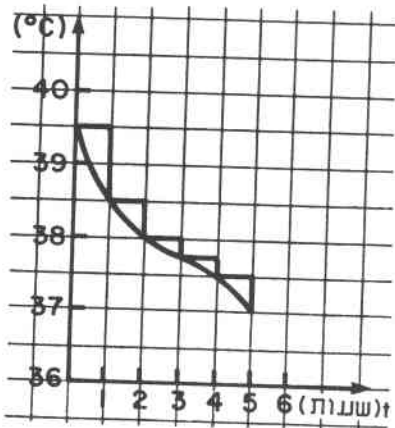
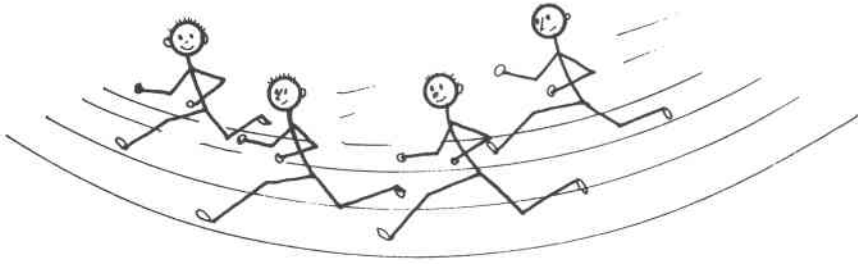
(א) רשום תחום וקבוצת התמונות לפונקציות שאלו הגרפים שלהן.

(ב) מי רץ בקצב אחיד (עבר בכל שניה אותו מרחק)?

(ג) בתחילת המרוץ מי המהיר ביותר?

המשך
←

- (ד) מי האט את מהירותו לקראת סוף המירוץ?
- (ה) מי הגביר את מהירותו לקראת סוף המירוץ?
- (ו) מי היה במחצית הדרך, במחצית מן הזמן שרץ?
- (ז) האם אחד מהם ניצח בתחרות?
- (ח) מה היתה המהירות הממוצעת של הרצים?
- מי רץ במהירות זו כל הדרך?

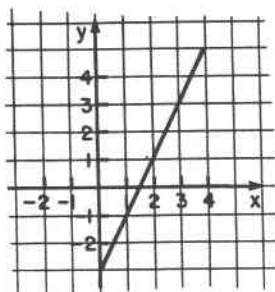


2. לפניך גרף המתאר את מידת חומו של ילד חולה במשך 5 שעות. לשרטוט הגרף הוספנו "מדרגות".
- (א) מה מסמן גובה כל מדרגה?
- (ב) השלם את הטבלה הבאה.

שעה	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
ירידת החום					0.5°

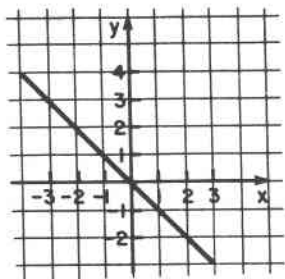
- (ג) האם החום ירד בקצב אחיד?
- (ד) בכמה ירד החום, בממוצע, בכל שעה?
- (ה) אילו ירד החום (מ-39.5° ל-37° ב-5 שעות) בקצב אחיד, בכמה היה יורד כל שעה? מה היתה אז צורת הגרף?

3. (א) לפניך ישר.



בחר נקודה כלשהי על הישר.
צעד ממנה יחידה אחת ימינה,
ועלה חזרה אל הישר. המשך,
באופן זה, לסמן מדרגות. מה גובה
כל מדרגה?

(ב) בחר נקודה כלשהי על הישר
שבשרטוט צעד ממנה יחידה
אחת ימינה ורד חזרה אל
הישר. המשך, באופן זה לסמן
"מדרגות". מה גובה כל
מדרגה?



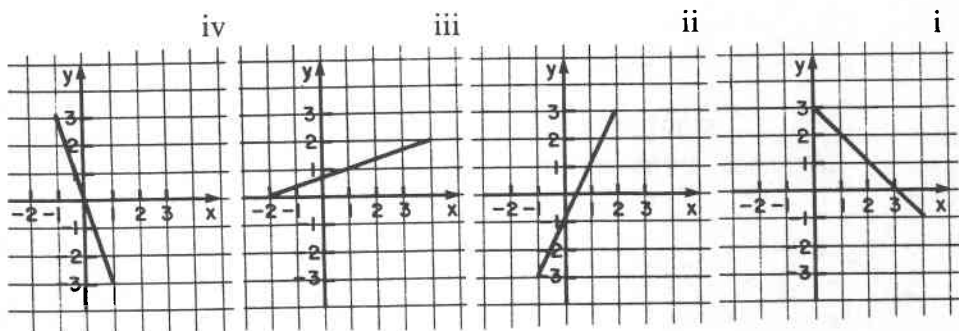
שים לב!

הירידה תסומן על ידי מספר שלילי.

מצאת כי כל המדרגות על הישר ב'א) הן באותו גובה וכן המדרגות על
הישר ב'ב) כולן באותו גובה.

**המספר המסמן את גובה המדרגה כש- x גדל ביחידה
אחת, נקרא שיפוע הישר.**

4. לפניך מספר ישרים.

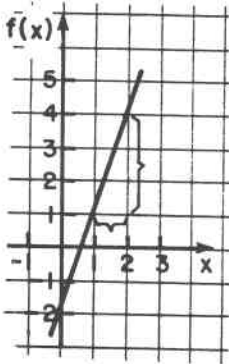


(א) למי מהישרים שיפוע חיובי? שיפוע שלילי?

(ב) התאם לכל ישר אחד מן השיפועים הבאים: 2 , -3 , $\frac{1}{3}$, -1 .

הגדרה:

פונקציה שהגרף שלה ישר נקראת פונקציה קווית או פונקציה לינארית (linea) בלטינית פרושו קו ישר



5. לפניך גרף הפונקציה הקווית f .

מהו קצב עליית הפונקציה?

במלים אחרות: בכמה עלה

שיעור $f(x)$ כאשר x גדל

ביחידה אחת?

שים לב!

קצב השינוי של פונקציה קווית

שווה לשיפוע הגרף שלה.

6. השלם בעזרת המילים: מספר שלילי, אפס, מספר חיובי.

שיפוע הגרף של פונקציה קווית עולה הוא _____ .

שיפוע הגרף של פונקציה קווית יורדת הוא _____ .

שיפוע הגרף של פונקציה קווית קבועה הוא _____ .

7. נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1 + 5x}{2}$

ידוע כי היא פונקציה קווית.

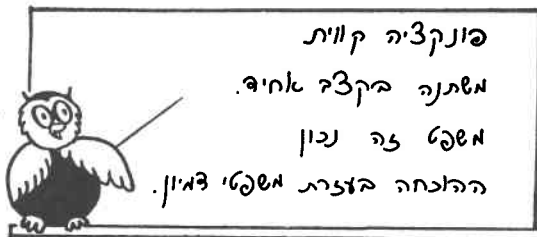
(א) מצא את שיפוע גרף הפונקציה בלי לשרטטו.

(ב) הנקודה (9, 23) נמצאת על גרף הפונקציה (בדוק).

השלם את שיעורי הנקודות הבאות (בלי להציב בפונקציה):

$C(\quad, 28), B(8, \quad), A(10, \quad)$

במהרה תראה
במצאק זהחזיט
איצבו חוק המאמה
של פונקציה קווית



8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$

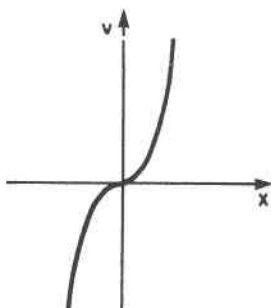
נכון או לא נכון?

(א) $f(1) - f(0) = 1$

(ב) $f(0) - f(-1) = 1$

(ג) כש- x גדל ביחידה אחת
 $f(x)$ גדל ביחידה אחת.

(ד) f משתנה בקצב אחיד.



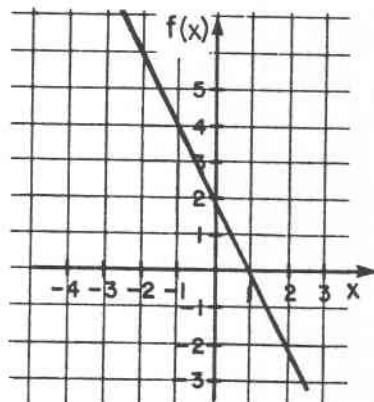
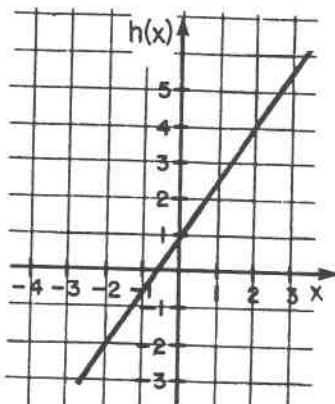
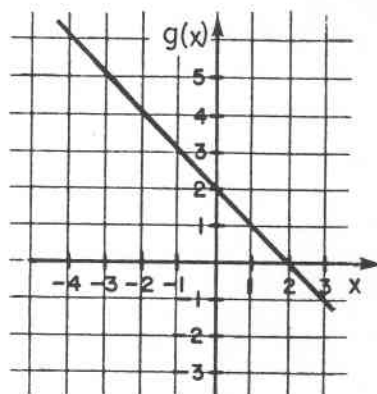
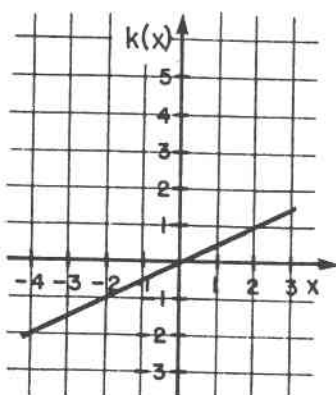
האם פונקציה שאינה קווית
 משתנה בקצב אחיד?



9. לפניך גרפים של פונקציות קוויות.

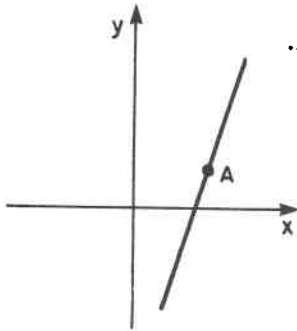
(א) מצא שיפוע של כל ישר.

(ב) חשב את התמונה של 4 בכל פונקציה.



חישוב השיפוע

בעזרת התרגילים הבאים, נלמד לחשב את השיפוע של ישר באופן אלגברי.



10. נתון ישר ששיפועו 3 ונתונה נקודה עליו $A(2, 1)$.

מן הנקודה A התקדמנו שתי יחידות ימינה,

עלינו חזרה אל הישר, והגענו לנקודה B.

(א) כמה יחידות עלינו?

(ב) מהם שיעורי הנקודה B?

11. ישר עובר דרך הנקודות $A(3, 1)$, $B(6, 13)$

(א) בכמה גדל שיעור x מ-A ל-B?

(ב) בכמה השתנה שיעור y מ-A ל-B?

(ג) בכמה השתנה שיעור y כאשר x גדל ביחידה אחת?

(ד) מהו שיפוע הישר העובר דרך A ו-B?

12. חשב את שיפוע הישר העובר דרך A ו-B במקרים הבאים:

(א) $A(-1, 8)$, $B(3, 10)$

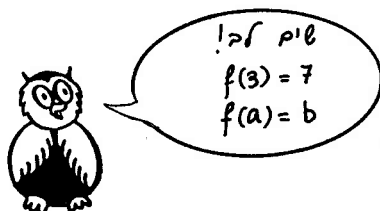
(ב) $A(2, -2)$, $B(5, -5)$

13. נתונות שתי נקודות $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, $x_2 > x_1$.

(א) דיון הסבר את משמעות ההפרשים $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$

(ב) הסבר את משמעות המנה $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

14. נתונה פונקציה קווית f וידוע כי $A(3, 7)$ ו $C(a, b)$ הן שתי נקודות על הישר, כך ש $a > 3$. אילו מן התבניות הבאות מביעות את שיפוע הישר?



$\frac{f(3) - f(a)}{a - 3}$	(ז)	$\frac{b - 7}{a - 3}$	(ד)	$\frac{7 - b}{a - 3}$	(א)
$\frac{f(3) - f(a)}{3 - a}$	(ח)	$\frac{f(a) - f(3)}{a - 3}$	(ה)	$\frac{7 - b}{3 - a}$	(ב)
$\frac{f(a) - f(3)}{7 - b}$	(ט)	$\frac{f(a) - f(3)}{b - 7}$	(ו)	$\frac{b - 7}{3 - a}$	(ג)

רמז: מספר התבניות המתאימות הוא 4.

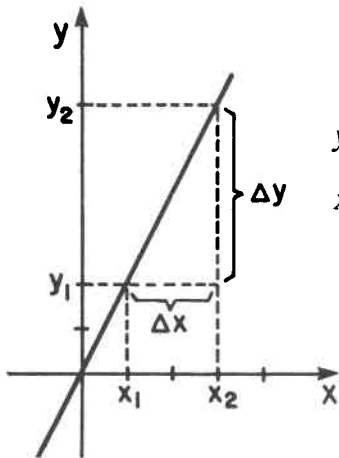
15. נתונות שתי נקודות $M(a, b)$, $N(c, d)$. כך ש $a \neq c$. לא ידוע מה הסדר בין a ו c על ציר המספרים. האם תוכל לדעת את שיפוע הישר העובר דרך שתי הנקודות? אם כן, רשום. אם לא, נמק מדוע.

כדי לחשב שיפוע של ישר העובר דרך שתי הנקודות $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$,

מחשבים את המנה $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ או את המנה $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

בשני המקרים מתקבלת אותה תוצאה (הסבר מדוע).

הגדרה:



נתונות שתי נקודות במערכת צירים
 $x_1 \neq x_2$, $B(x_2, y_2)$, $A(x_1, y_1)$

נסמן (לשם קיצור): $y_2 - y_1 = \Delta y$

$x_2 - x_1 = \Delta x$

למנה $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ קוראים:

מנת ההפרשים בין שתי הנקודות.

16. (א) הסבר מדוע רושמים $x_2 \neq x_1$ בחישוב השיפוע?

(ב) מצא שתי נקודות במערכת הצירים שאין להן מנת הפרשים.

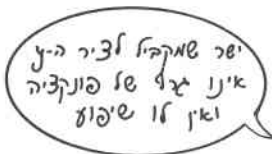
17. נתונה נקודה $A(1, 2)$ במערכת צירים. מצא לכל אחד מן המקרים הבאים נקודה נוספת B המקיימת:

(א) מנת ההפרשים בין A ו-B חיובית.

(ב) מנת ההפרשים בין A ו-B שלילית.

(ג) מנת ההפרשים בין A ו-B היא אפס.

(ד) אין ל-A ו-B מנת הפרשים.



תרגילים

שיפוע של ישר

1. לפניך שתי פונקציות שתחומן $\{x \mid x \geq 1\}$

$$f(x) = x - \frac{1}{x} \qquad g(x) = 2 - \frac{x}{2}$$

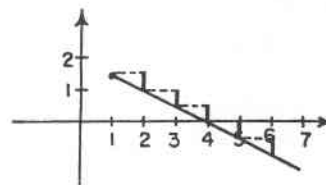
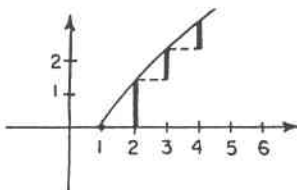
(א) השלם את הטבלה הבאה:

x	1	2	3	4	5
f(x)					
g(x)					

(ב) התאם לכל אחת מן הפונקציות (f או g) את התכונות המתאימות לה.

- עולה.
- יורדת.
- משתנה בקצב אחיד.
- הגרף שלה אינו ישר.

(ג) התאם אחת מן הפונקציות (f או g) לכל גרף.



(ד) מהם אורכי הקטעים המודגשים שבשרטוט?

2. (א) שרטט במערכת צירים, ישר העובר דרך הנקודה (2, 3) ושיפועו $\frac{1}{2}$.

(ב) שרטט באותה מערכת צירים, עוד שני ישרים בעלי אותו שיפוע.

3. הכן לך ערכה המכילה:

(א) מערכת צירים נוקשה (תוכל להשתמש במערכת הצירים המשורטטת בדף האחרון של הספר).

(ב) 3 ישרים (רצועות דף שקף אשר משורטטים עליהם ישרים).

(ג) 2 נעצים.

ערכה זו תשמש אותך לשרטוט מהיר של ישרים. בכל פעם שתבקש להשתמש בערכה, נרשום "שרטט" את הישר (במקום שרטט את הישר), ואז תוכל להניח את ה"ישר" המוכן במערכת הצירים המוכנה.

4. (א) נתונה הנקודה (1, -4). "שרטט" ישר העובר דרכה.

- האם תוכל להעביר דרכה ישר נוסף?

(ב) "שרטט" ישר העובר דרך A ושיפועו 3.

- האם תוכל ל"שרטט" ישר נוסף עם אותם נתונים?

(ג) נתון שיפוע 1. כמה ישרים בעלי שיפוע זה קיימים?

"שרטט" כדי להדגים.

(ד) כמה מן הישרים מ-ג) עוברים דרך הנקודה (4, 0)?

(ה) למדת בגיאומטריה אכסיומה האומרת כי "דרך שתי נקודות עובר ישר אחד ויחיד".

סכם על פי אכסיומה זו ועל פי הסעיפים הקודמים איזה נתונים יש לתת כדי לקבל ישר יחיד?

5. נתונות זוגות הנקודות הבאות:

(א) (1, 3) (2, 7) (ג) (1, -4) (2, -2)

(ב) (3, 2) (5, 0) (ד) (4, -3) (4, -1)

דרך כל זוג נקודות עובר ישר. "שרטט" כל אחד מהישרים ומצא את שיפועו.

6. שרטט במערכת צירים אחת ישרים לפי שיפוע נתון m ונקודה נתונה A .

(א) $A(3, 3) \quad m = 2$ (ד) $A(4, 2) \quad m = \frac{1}{2}$

(ב) $A(0, 0) \quad m = 1$ (ה) $A(1, 1) \quad m = 0$

(ג) $A(0, 3) \quad m = -1$ (ו) $A(1, 4) \quad m = -3$

מיהו הישר יוצא הדופן? מדוע?

★ נסה את כוחך

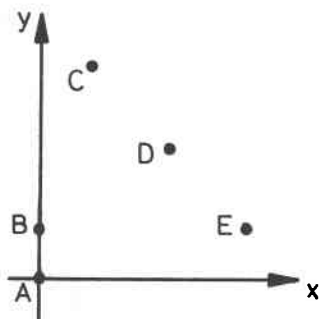
7. במערכת הצירים שלפניך מספר נקודות.

אורך יחידה על ציר x

שווה לאורך יחידה על ציר y .

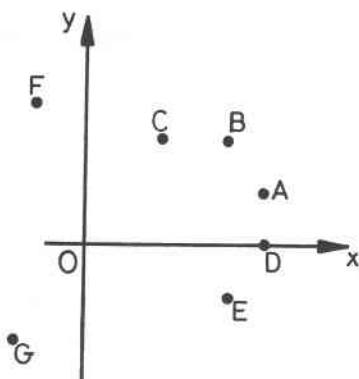
התאם לכל שיפוע, ישר הנקבע על ידי זוג נקודות.

השיפועים: $1, 3, \frac{1}{4}, 0, -1$.



8. לגבי כל זוג ישרים, הקף בעיגול את הישר ששיפועו גדול יותר. אם שני

השיפועים שווים הקף את שניהם בעיגול.



(א) OC, OB (ו) OG, OC

(ב) OC, OA (ז) OE, CB

(ג) CB, OD (ח) GE, CB

(ד) OF, OE (ט) AB, EG

(ה) OF, OC (י) EF, CD



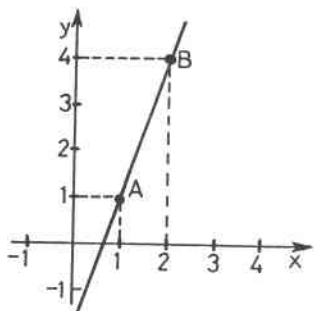
מערכת צירים מאלנכים
בה אלתה יחידה על שני הצירים
נקראת מערכת קרטזית
על שם המתמטיקאי זקארי

9. נתונים הישרים הנקבעים ע"י שיפוע m ונקודה A . מצא, על ידי חישוב, נקודה נוספת על כל ישר.

(א) $A(3, 2)$ $m = 2$ (ב) $A(4, -1)$ $m = -2$

(ג) $A(-1, 0)$ $m = 3$ (ד) $A(-1, -1)$ $m = 0$

(ה) $A(3, 0)$ $m = \frac{1}{2}$ (ו) $A(1, 1\frac{1}{3})$ $m = -\frac{1}{3}$



10. במערכת הצירים משורטט הישר AB

(א) מצא את שיפוע הישר.

(ב) אילו מן הנקודות הבאות נמצאות על הישר?

$F(2.5, 5.5)$, $E(-1, -5)$, $D(1.5, 2)$, $C(3, 7)$

11. מצא על ידי חישוב את שיפוע הגרף של כל אחת מן הפונקציות הלינאריות הבאות:

הדרכה: אין צורך לפשט את הביטויים.

(א) $f(x) = 3(2 - x)$ (ה) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$

(ב) $f(x) = \frac{x + 6}{2}$ (ו) $f(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$

(ג) $f(x) = (x - 2)(x + 3) - x^2$ (ז) $f(x) = (x + 1)^2 - x^2$

(ד) $f(x) = 6x - 2(1 + 3x)$ (ח) $f(x) = \frac{x + 3}{3} - \frac{5 - 4x}{6}$

חישוב השיפוע

12. מצא את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (מנת ההפרשים) עבור זוגות הנקודות הבאות:

- (א) $(-1, 0)$ $(2, 3)$ (ה) $(-9, 3)$ $(0, 3)$
- (ב) $(0, 0)$ $(\frac{1}{2}, 2)$ (ו) $(-7.3, 18)$ $(2.4, 5)$
- (ג) $(-2, \sqrt{2})$ $(4, 0)$ (ז) $(8, \frac{1}{2})$ $(8, 2\frac{1}{2})$
- (ד) $(6, -2)$ $(-5, 4)$ (ח) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

13. קבע את המספר שיש להציב במקום d כך ששתי הנקודות תהיינה על ישר אחד ששיפועו m.

הדרכה: העזר בפתרון משוואה.

- (א) $m = -1$ $(d, 2)$ $(5, 4)$ (ד) $m = -3$ $(3, 3d)$ $(1.5, 6d)$
- (ב) $m = -2$ $(3, -1)$ $(-7, d)$ (ה) $m = 2$ $(3, 6)$ $(d, 2d)$
- (ג) $m = \frac{1}{2}$ $(5d, 2)$ $(2d, -4)$ (ו) $m = -3$ $(d, 6)$ $(5, 3d)$

14. בכל אחת מן הטבלות הבאות מופיעים שלושה זוגות מספרים. קבע, על ידי חישוב מנות ההפרשים, אם הזוגות בכל טבלה יכולים להתאים לפונקציה לינארית.



x	y	(ה)
1	1.5	
-3	2.51	
0	1.72	

x	y	(ג)
1	-2	
-0.5	-6.5	
0.5	-3.5	

x	y	(א)
0	4	
1	2	
-3	10	

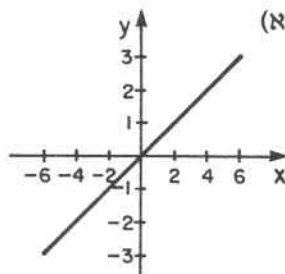
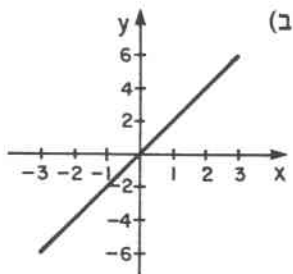
x	y	(ו)
-2	-6	
2	6	
0	4	

x	y	(ד)
-3	0	
0	-4	
1.2	-5.6	

x	y	(ב)
2	2	
0	-5	
-2	-8	

★ נסה את כוחך

15. קבע לפי הגרפים הבאים, שיפועה של איזו פונקציה הוא הגדול ביותר? הקטן ביותר? שים לב ליחידות על הצירים.



★ ★

16. השלם, בעזרת המילים חיובית/אפס/שלילית, את הטענות הבאות והוכח אותן

מנת ההפרשים בין כל שתי נקודות

של פונקציה עולה היא _____

של פונקציה יורדת היא _____

של פונקציה קבועה היא _____

להזכירך: פונקציה עולה בתחום מסויים אם:

לכל $x_2 > x_1$ השייכים לתחום זה מתקיים $f(x_2) > f(x_1)$

פונקציה יורדת בתחום מסויים אם:

לכל $x_2 > x_1$ השייכים לתחום זה מתקיים $f(x_2) < f(x_1)$

17. שרטט את הנקודה $A(1, 2)$ במערכת צירים. מצא לכל אחד מן המקרים את חלקי המישור במערכת הצירים שבהם מתקיים:

(א) מנת ההפרשים בין כל נקודה ו-A היא חיובית.

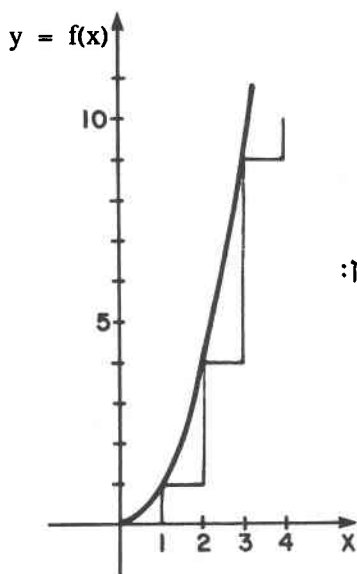
(ב) מנת ההפרשים בין כל נקודה ו-A היא שלילית.

(ג) מנת ההפרשים בין כל נקודה ו-A היא אפס.

(ד) אין לנקודות מנת הפרשים עם A.

★ נסה את כוחך

18. לפינך שרטוט הפונקציה $f(x) = x^2$ בתחום $\{x \mid x \geq 0\}$ ושרטוט מדרגות.



(א) חשב את גובה המדרגות המשורטטות.

(ב) העזר בשרטוט ובחישוב ומצא כמה

איברים יש לחבר בסדרה:

1 3, 5, 7,...

כדי לקבל 100. מהו המספר האחרון?

(ג) מצא תבנית המתאימה למספר האחרון:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + \underline{\hspace{1cm}} = n^2$$

(ד) מצא במהירות את סכום המספרים

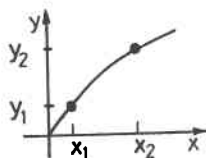
האיזוגיים מ-1 עד 15.

★ ★

19. נתונה הפונקציה f שהגרף

שלה אינו ישר.

נתון כי $y_1 = f(x_1)$

$$y_2 = f(x_2)$$


נסה לתת משמעות למנת ההפרשים



מבחן תשובות

1. (א)

x	1	2	3	4	5
f(x)	0	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{3}{4}$	$4\frac{4}{5}$
g(x)	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

(ב) g יורדת ומשתנה בקצב אחיד
f עולה והגרף שלה אינו ישר.

(ג) גרף מימין - g: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

גרף משמאל - f: $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{2}$

5. (א) 4 (ב) -1 (ג) $\frac{1}{2}$ (ד) 0

8. (א) OC (ב) OC (ג) OD, CB (ד) OE (ה) OC

(ו) OC, OG (ז) CB (ח) GE (ט) EG (י) EF, CD

10. (א) 3 (ב) F, E, C

11. (א) -3 (ב) $\frac{1}{2}$ (ג) 1 (ד) 0 (ה) 1 (ו) -8 (ז) 2 (ח) 1

12. (א) 1 (ב) 4 (ג) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ (ד) $-\frac{6}{11}$ (ה) 0 (ו) -1.34
(ז) חסר משמעות. (ח) $\frac{2}{3}$

13. (א) 7 (ב) 19 (ג) 4 (ד) 1.5 (ה) $\{d | d \neq 3\}$ (ו) אין מספר.

14. א, ג, ד.

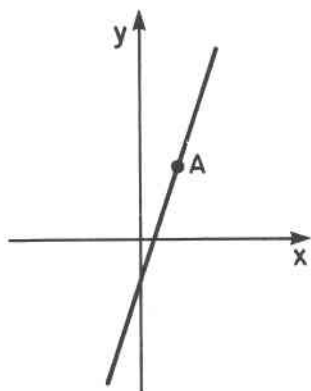
15. הגדול ב, הקטן א.

16. (ב) יש לחבר 10 מספרים. האחרון 19.

(ג) התבנית היא $2n - 1$

חוק ההתאמה של פונקציה קווית

מהישר אל התבנית



1. נתון ישר העובר דרך הנקודה $A(1, 2)$ ושיפועו 3. נחפש את כלל ההתאמה של הפונקציה שהישר הוא הגרף שלה.

(א) השלם:

- מנת ההפרשים בין כל שתי נקודות על הישר היא —

- נבחר על הישר נקודה כלשהי $B (B \neq A)$, ונניח את שיעוריה כך: $[x, f(x)]$

$$\frac{f(x) - 2}{x - 1} = \text{---} : B \text{ ל-} A$$

(ב) הראה כי התבנית שהתקבלה שקולה לתבנית $f(x) = 3x - 1$

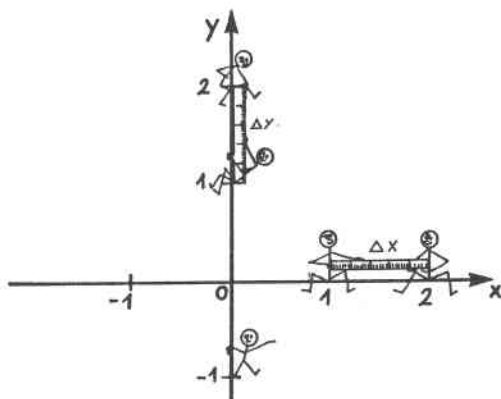
(ג) התבנית שהתקבלה היא כלל התאמה של הפונקציה המבוקשת. נמק! שים לב כי התבנית מתאימה גם עבור $x = 1$.

2. נתון ישר העובר דרך שתי נקודות: $A(3, 5)$, $B(-1, 3)$.

(א) מצא את שיפוע הישר.

(ב) מצא את חוק ההתאמה לפונקציה שהישר הוא הגרף שלה.

הדרכה: העזר בשאלה 1.



3. נתונה פונקציה f וידוע כי הגרף שלה הוא ישר העובר דרך הנקודה (x_1, y_1) , ושיפועו a .

(א) השלם:

לכל נקודה $[x, f(x)]$ השונה מ- (x_1, y_1) מתקיים:

$$\frac{f(x) - y_1}{x - x_1} = \text{—}$$

(ב) הראה שהתבנית שהתקבלה שקולה לתבנית

$$f(x) = ax + (y_1 - ax_1)$$

(ג) האם הנקודה (x_1, y_1) מקיימת את התבנית

$$f(x) = ax + (y_1 - ax_1) ?$$

4. מצא חוקי התאמה לפונקציות קוויות אשר הגרף שלהן ישר ששיפועו a נתון והוא עובר דרך נקודה נתונה A .

הדרכה: הצב בתבנית שהתקבלה בשאלה 3, a ופשוט.

(א) $a = 2$ $A(3, -1)$ (ד) $a = 3$ $A(-2, -6)$

(ב) $a = -3$ $A(-1, 2)$ (ה) $a = 0$ $A(-4, 1)$

(ג) $a = 1$ $A(0, -4)$

- מהי הצורה הכללית של כל חוקי ההתאמה שמצאת?
- האם לכל שיפוע ולכל נקודה יתקבל חוק מאותה צורה?

אם f היא פונקציה קווית אז חוק ההתאמה שלה הוא
מהצורה $f(x) = ax + b$

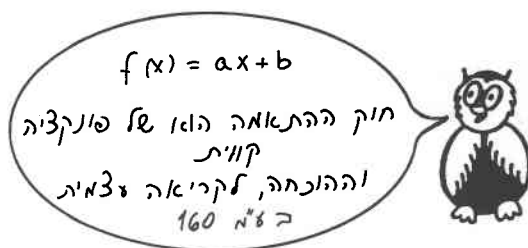
מהתבנית אל הישר

בסעיף הקודם ראינו כי אם פונקציה היא קווית אז חוק ההתאמה שלה הוא מהצורה $f(x) = ax + b$

אפשר להסתכל על חוק התאמה מהצורה $f(x) = ax + b$ כעל משוואה בשני משתנים ממעלה ראשונה: $y = ax + b$.

בלימודיך הקודמים ראית בדרך של הצבת נקודות ושרטוט, כי גרף של משוואה ממעלה ראשונה בשני משתנים הוא ישר. כלומר:

כל פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מהצורה $f(x) = ax + b$ היא קווית.



שים לב! מעתה ואילך נרשום חוק התאמה של פונקציה בצורה

$f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ או בצורה $y = \underline{\hspace{2cm}}$

5. לאילו מבין הפונקציות הבאות יש חוק התאמה של פונקציה לינארית?

הדרכה: בדוק אם ניתן להביאן לצורה $y = ax + b$

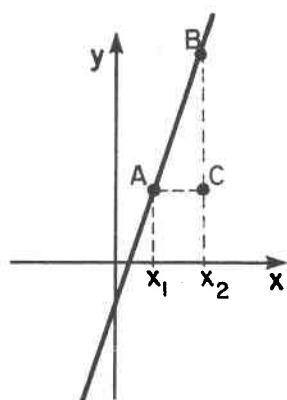
(א) $y = 7 + \frac{2}{3}x$ (ה) $y = x^3$

(ב) $y = 9x^2 - 2$ (ו) $y = (2x + 3)^2$

(ג) $y = 5$ (ז) $y = \sqrt{2}x$

(ד) $y = \frac{1}{2x + 1}$ (ח) $y = \frac{2}{x} + 7$

המשמעות הגרפית של a



6. נתונה הפונקציה הקווית $f(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$.
A ו-B הן שתי נקודות כלשהן על הגרף שלה.

(א) הבע את שיעורי הנקודות
A, B ו-C מן השרטוט באמצעות x_1, x_2 .

(ב) בטא את AC באמצעות x_1, x_2 .

(ג) בטא את BC באמצעות x_1, x_2 .

(ד) בטא את מנת ההפרשים בין A ל-B, ופשט את התבנית.
- מהו שיפוע גרף הפונקציה?

(ה) בעזרת (א) - (ד) אפשר להוכיח את המשפט: "שיפוע הגרף של פונקציה קווית מהצורה $y = ax + b$ הוא a " נמק מדוע.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 2.25x + 1$

(א) האם f היא פונקציה קווית?

(ב) מהו שיפוע הגרף של f ?

(ג) מהי מנת ההפרשים בין כל שתי נקודות על הגרף של f ?

8. נתונות שתי פונקציות קוויות: $f(x) = 5x - 2$ ו- $g(x) = 5x + 3$.

(א) הוכח בדרך אלגברית שאין לגרפים שלהן נקודה משותפת.

(ב) השלם: הגרפים של f ו- g _____ (נחתכים/מקבילים/מתלכדים).

9. נתונות שתי פונקציות קוויות שונות.

$$y = ax + c \quad y = ax + b$$

(א) נסה למצוא לגרפים שלהן נקודה משותפת.

(ב) השלם: הגרפים של הפונקציות הנתונות _____ (מקבילים/נחתכים).

המשמעות הגרפית של b

10. מצא את הנקודות בהן חותכים הגרפים של הפונקציות הבאות את ציר ה- x ואת ציר ה- y .

$$(א) \quad y = 2x + 5 \quad (ג) \quad y = -2.4x$$

$$(ב) \quad y = \frac{2}{5}x - 2 \quad (ד) \quad y = -6$$

11. הבע באמצעות a ו- b את הנקודות בהן חותך גרף הפונקציה $f(x) = ax + b$ את ציר ה- x ואת ציר ה- y .

12. רשום 3 פונקציות קוויות שונות שהגרפים שלהן נפגשים באותה נקודה על ציר y .

- מה המשותף לתבניות של שלוש הפונקציות שרשמת?

- חוק ההתאמה של פונקציה קווית הוא מהצורה $f(x) = ax + b$, ולהיפך, אם חוק ההתאמה של פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הוא $f(x) = ax + b$ אז היא קווית.

- שיפוע הגרף של פונקציה כזו הוא a .

- כשנתון השיפוע a (או כשאפשר למצוא אותו) ונתונה נקודה (x_1, y_1) דרכה עובר הגרף אפשר למצוא את חוק ההתאמה על פי מנת הפרשים

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$$

- לפונקציות קוויות שונות בעלות אותו שיפוע a מתאימים ישרים מקבילים.

- גרף הפונקציה מהצורה $f(x) = ax + b$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = b$.

13. א) "שרטט" את גרף הפונקציה $f(x) = 2x - 1$ על פי נקודת החיתוך עם ציר ה-y ועל פי שיפועו.

(ב) רשום את הפונקציה הקווית אשר הגרף שלה עובר דרך הנקודה (5, 0) ושיפועה 3-.

★ נסה את כוחך

14. נתונות שתי פונקציות קוויות $y = ax + b$ ו- $y = cx + d$. ידוע כי הגרפים שלהן נחתכים על ציר ה- x בצירו השלילי.

(א) חקור את הקשר בין b ו- d .

הדרכה: העזר ב"שרטוט"

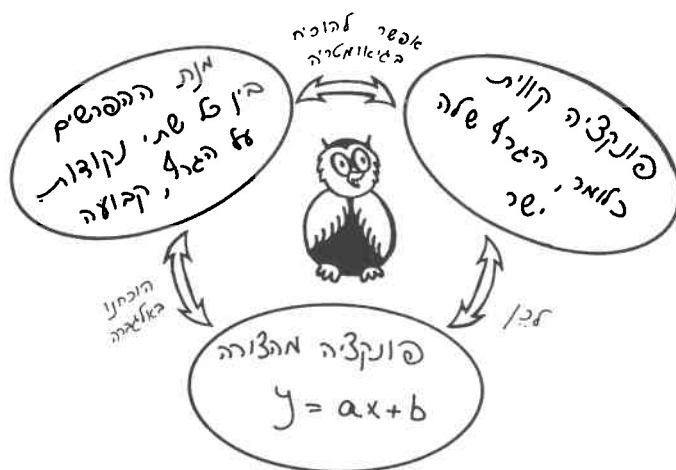
בדוק לגבי המקרים: $a > c > 0$

$$a > 0 > c$$
$$.0 > a > c$$

(ב) נתון כי $d > b$. חקור את הקשר בין a ו- c .

15. חזור על שאלה 14 כשידוע שהגרפים נחתכים על ציר x בציוד החיובי.

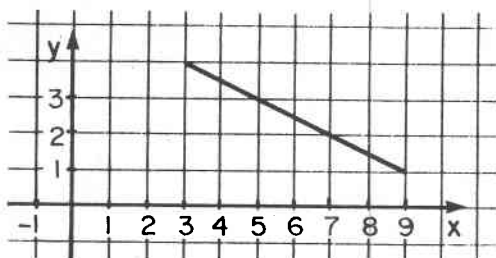
★ ★



תרגילים

מהישר אל התבנית

1. מצא תבניות אלגבריות עבור הפונקציות הבאות אם ידוע כי הגרף שלהן הוא ישר המקיים:
- (א) הישר עובר דרך הנקודה $(2, 2)$, ושיפועו $-\frac{1}{2}$.
- (ב) הישר עובר דרך הנקודות $(1, 3)$, $(-3, 4)$.
- (ג) הישר עובר דרך הנקודה $(-4, -3)$, ויוצר זווית בת 45° עם הכוון החיובי של ציר ה- x .
- (ד) הישר עובר דרך הנקודה $(2, 2)$, וחותך מן הצירים קטעים שווים, שאורכם אינו אפס.
- (ה) שני הישרים העוברים דרך הנקודה $(1, 3)$, וחותכים מן הצירים קטעים שווים.
- (ו) הישר מקביל לציר ה- x , והוא עובר דרך הנקודה $(-2, -1)$.
- (ז) הישר עובר דרך ראשית הצירים, ושיפועו 5.



2. מצא תבנית אלגברית לפונקציה שהגרף שלה הוא הישר הבא:

★ נסה את כוחך

3. מצא את הפונקציה f המעבירה טמפרטורות הנתונות בסולם פרנהייט לסולם צלסיוס, לפי נקודות הקיפאון והרתיחה הסולמות. ידוע כי חוק ההתאמה של f הוא מהצורה $f(x) = ax + b$.
בסולם צלסיוס: המים קופאים ב- 0° ורותרים ב- 100° .
בסולם פרנהייט: המים קופאים ב- 32° ורותרים ב- 212° .

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★

מהתבנית אל הישר.

4. לפניך הפונקציות מתרגיל 11 עמ' 138. הראה כי הן קוויות.

הדרכה: הבא את הפונקציות לצורה $f(x) = ax + b$

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1} \quad (\text{ה}) \quad f(x) = 3(2 - x) \quad (\text{א})$$

$$f(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2 \quad (\text{ו}) \quad f(x) = \frac{x + 6}{2} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = (x + 1)^2 - x^2 \quad (\text{ז}) \quad f(x) = (x - 2)(x + 3) - x^2 \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \frac{x + 3}{3} - \frac{5 - 4x}{6} \quad (\text{ח}) \quad f(x) = 6x - 2(1 + 3x) \quad (\text{ד})$$

5. אילו מן ההתאמות הבאות מבטאות, בדרך כלל, חוק של פונקציה קווית? [כלומר מהצורה $f(x) = ax + b$]

(א) התאמה בין מספר המדפים (x) בארון, למספר הספרים שבו.

(ב) התאמה בין מספר פעימות המונה (x) בשיחות טלפון שנערכו במשך חודש, לתשלום החודשי.

(ג) התאמה בין האורך (x) של צלע ריבוע, להיקפו.

(ד) התאמה בין האורך (x) של צלע ריבוע, לשטחו.

(ה) התאמה בין האורך (x) של צלע ריבוע, לאורך אלכסונו.

(ו) התאמה בין האורך (x) של אחד הניצבים של משולש ישר זווית ושווה שוקיים, לשטח הריבוע הבנוי על היתר.

(ז) התאמה בין מספר (x), לנגדי לו.

(ח) התאמה בין מספר שונה מאפס (x), להופכי לו.

(ט) התאמה בין מספר חיובי (x), לשורשים שלו.

(י) התאמה בין מספר (x) של החולצה, למחירה.

יא) התאמה בין זווית הראש (x) במשולש שווה שוקיים, לזווית בסיס.

יב) התאמה בין זווית הראש (x) במשולש שווה שוקיים, לסכום זוויותיו.

יג) התאמה בין זווית בסיס (x) במשולש שווה שוקיים, לזווית הראש.

יד) התאמה בין האורך (x) של צלע המלבן, לשטחו, כאשר אורך הצלע השניה 5 ס"מ.

טו) התאמה בין האורך (x) של צלע המלבן, להיקפו כאשר אורך הצלע השניה גדול ב-5 ס"מ מאורך הצלע הראשונה שסומנה ב-x.

טז) התאמה בין מספר שקי המלט שנקנו (x), לתשלום עבורם, הכולל דמי הובלה קבועים.

6. מצא, אם אפשר, מספר שאם תציב אותו במקום d, תתקבל פונקציה קווית.

$$y = d \cdot \frac{x^4 + x^2}{x^2 + 1} \quad (\text{א}) \quad y = (5x + 3)x - 2dx^2 + 3 \quad (\text{ז})$$

$$y = \frac{(2 + d)(x^3 + 2x)}{x^2 + 2} \quad (\text{ב}) \quad y = dx^2 + (x - 2)^2 \quad (\text{ח})$$

$$y = 1 + (d - 4)x^2 \quad (\text{ג}) \quad y = d(x - 3)^2 + 2x^2 - 25 \quad (\text{ט})$$

$$y = \frac{(x + 3)(x^2 + 3)}{d(x^2 + 3)} \quad (\text{ד}) \quad y = (2x + 3)^2 + d(x - 2)^2 \quad (\text{י})$$

$$y = x^2 + \frac{x^2 + x}{d - 2} \quad (\text{הא}) \quad y = \frac{2x^2 + 3}{3} - \frac{5 + dx^2}{2} \quad (\text{הב})$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{d - 2} \quad (\text{יב}) \quad y = -(x + 5)^2 - dx + x^2 \quad (\text{ו})$$

7. לפניך מספר משוואות מן המעלה הראשונה.
הבע, אם אפשר, את חוקי ההתאמה של הפונקציות המסתתרים במשוואות

דוגמא: המשוואה $x - y = 2$

חוק ההתאמה $y = x - 2$ או $[f(x) = x - 2]$

(א) $x + y = 5$ (ה) $3(x + y - 2) = 4y$

(ב) $5x - y = 6$ (ו) $2(x - 5) - 2(x + y) = 6$

(ג) $4x + 2y = 5$ (ז) $4(x + 1) + 2(x + y) = 2y$

(ד) $\frac{x + 2y}{2} = 7$ (ח) $\frac{3x + 2y}{5} = \frac{2x + y}{3}$

8. (א) שרטט שני ישרים שהם אינם גרפים של פונקציה.

(ב) רשום משוואה מתאימה לכל אחד מהישרים.

9. (א) העבר לצורה מפורשת, אם אפשר, את המשוואות הבאות:
(רשום אותן בצורה $y = \dots$).

i. $\frac{7x - y}{6} = 5$ iv. $\frac{2x + 5}{2} = \frac{y}{3} - 1$

ii. $xy = 9$ v. $4y = 2x - 4(1 - y)$

iii. $x - y^2 = 1$ vi. $\frac{1}{xy} = 5$

(ב) אילו מהמשוואות יכולות לשמש חוקי התאמה של פונקציה?
רשום לגביהן את התחום הגדול ביותר האפשרי.

(ג) אילו מהפונקציות הן קוויות?

(ד) לאילו התאמות יש גרף שהוא קו ישר?

(ה) נתונה המשוואה $Ax + By = C$. באיזה תנאי תוכל המשוואה
לתאר חוק התאמה של פונקציה?

המשמעות הגרפית של a

10. קבע בלי להציב בפונקציות ובלי לשרטטן, מהו השיפוע של כל אחת מן הפונקציות הקוויות הבאות:

$$(א) \quad y = 5x - 1 \quad (ה) \quad y = 1$$

$$(ב) \quad y = 3 - \frac{1}{2}x \quad (ו) \quad y = (1 + \sqrt{2})x$$

$$(ג) \quad y = \frac{x + 15}{3} \quad (ז) \quad y = 6(x - 2) + 2(4 - 3x)$$

$$(ד) \quad y = 3(x - 2) - 5x \quad (ח) \quad y = \frac{x - 2}{3} - \frac{3 - x}{6}$$

11. נתונה פונקציה קווית אשר בה a שווה לאפס. מה תוכל לומר על גרף הפונקציה?

12. מצא את התמונה של 1 בכל אחת מן הפונקציות הקוויות הבאות:

$$(א) \quad f: x \rightarrow 3x - 3 \quad (ב) \quad f: x \rightarrow \frac{1}{2}x - 2 \quad (ג) \quad f: x \rightarrow 5 - x$$

"שרטט" את הגרף של כל פונקציה לפי הנקודה (1,) והשיפוע, בדוק את ה"שרטוט" על ידי מציאת נקודה נוספת מן הגרף של כל פונקציה.

13. "שרטט" את הגרפים של הפונקציות הבאות על ידי מציאת שתי נקודות.

$$(א) \quad y = 2x - 3 \quad (ב) \quad y = \frac{1}{3}x \quad (ג) \quad y = 2 - x$$

וודא כי שיפוע הישרים ש"שרטטת" מתאים לשיפוע (a) הנתון בתבניות.

14. מקבילית היא מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות.

נתונות שתי פונקציות קוויות $y = 2x - 3$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.

רשום עוד שתי פונקציות קוויות כך שהגרפים של ארבע הפונקציות יצרו מקבילית.

15. נתון מלבן שצלעותיו מקבילים לצירים. מה תוכל לומר על שיפועי הישרים

שעליהם מונחות צלעות המלבן?

16. לכל פונקציה f מצא פונקציה g כך שהגרפים של שתי הפונקציות הם ישרים מקבילים.

רשום את האותיות המתאימות בטבלה למטה ותקבל שם של מתמטיקאי שעסק בפונקציות.

$$\text{א) } g(x) = \frac{1-x}{3} - \frac{1+5x}{3} \quad f(x) = 2 + 2x$$

$$\text{ב) } g(x) = 5(x-1) + 3(1-x) \quad f(x) = x - \frac{x}{3}$$

$$\text{ג) } g(x) = 6 - 6(x+1) \quad f(x) = (x-3)^2 - x^2$$

$$\text{ד) } g(x) = x^2 - (x-3)(x+3) \quad f(x) = -9$$

$$\text{ה) } g(x) = 3x - \frac{1-6x}{2} \quad f(x) = \frac{5-3x}{6} - 1.5x$$

$$\text{ו) } g(x) = \frac{5+4x}{6} \quad f(x) = 6x$$

ו	ה	ד	ג	ב	א	f
						g

17. נתונים זוגות המשוואות המבטאות חוקי התאמה של פונקציות קוויות.

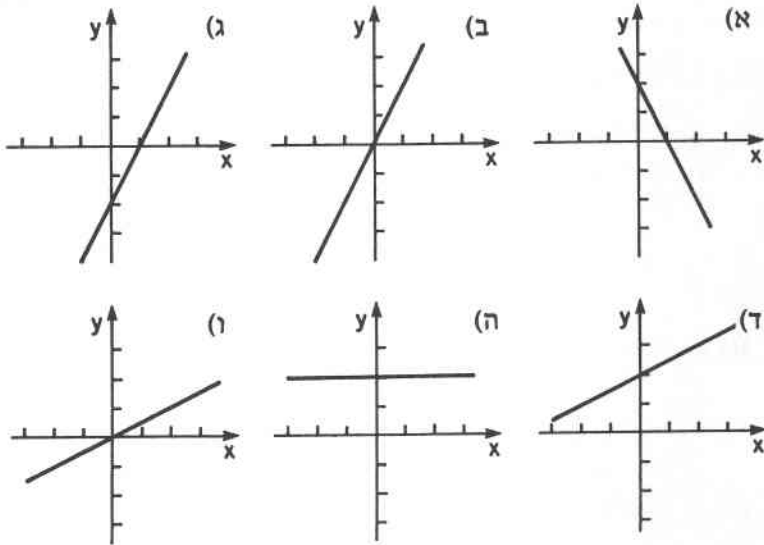
לגבי כל זוג בדוק אם הגרפים ישרים מקבילים, ואם לא, מצא את נקודת החיתוך.

$$\begin{array}{ll} \text{א) } x + y = 7 & \text{ד) } 2(x+3) = \frac{4x-y}{2} \\ y = x - 2 & y = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ב) } 2x + 3y = 5 & \text{ה) } y = 3x + 1 \\ 4x + 6y = 6 & y = -2x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ג) } y = 2x - 4 & \text{ו) } \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{2} \\ x = 2y - 4 & y = x - 1 \end{array}$$

18. התאם לכל גרף פונקציה קווית מן הרשימה שלמטה.



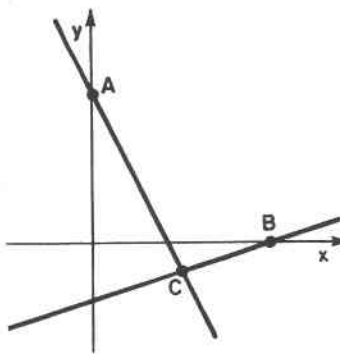
$$y = 2x, \quad y = 2, \quad y = -2x, \quad y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -2x + 2, \quad y = 2x - 2, \quad y = \frac{1}{2}x + 2$$

19. לפניך שרטוט הגרפים:

$$f(x) = -2x + 5$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x - 2$$



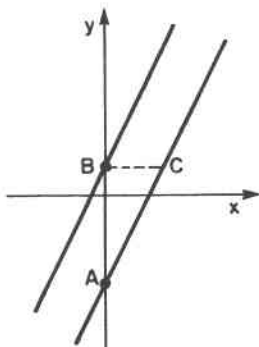
(א) מהו הגרף המתאים לכל פונקציה? נמק.

(ב) מצא את שיעורי הנקודות A, B, C.

20. לפניך שרטוט הגרפים:

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = 2x - 3$$



(א) מהו הגרף המתאים לכל פונקציה? נמק.

(ב) מצא את שיעורי הנקודות A, B.

(ג) BC מקביל לציר ה-x. מצא את אורך הקטע CB.

המשמעות הגרפית של b

21. קבע באיזה צד חותכים הגרפים של הפונקציות הבאות כל ציר.
(בחלקו החיובי או השלילי)? נמק קביעתך.

הדרכה: אין צורך בחישובים.

$$f(x) = 3 - 2x \quad (\text{ה}) \quad f(x) = 5x - 2 \quad (\text{א})$$

$$f(x) = 0.4x \quad (\text{ו}) \quad f(x) = x - 7 \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = -4 + 1.5x \quad (\text{ז}) \quad f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = 10 \quad (\text{ח}) \quad f(x) = \sqrt{5}x + \sqrt{3} \quad (\text{ד})$$

22. קרא מן התבנית נקודה ושיפוע, ו"שרטט" את הגרפים של הפונקציות
הקוויות הבאות ללא כל חישוב.

$$f(x) = 5 \quad (\text{ד}) \quad f(x) = 3x \quad (\text{א})$$

$$f(x) = -x - 2 \quad (\text{ה}) \quad f(x) = 2x - 1 \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x + 1 \quad (\text{ו}) \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad (\text{ג})$$

23. (א) האם ציר x יכול לייצג גרף של פונקציה קווית?
אם כן, מהו a ומהו b?

(ב) האם ציר y יכול לייצג גרף של פונקציה קווית?
אם כן, מהו a ומהו b?

24. רשום פונקציה קווית לפי נקודה ושיפוע.

$$A(0, 0) \quad m = \frac{1}{2} \quad (\text{ג}) \quad A(0, 3) \quad m = 2 \quad (\text{א})$$

$$A(0, -1) \quad m = 0 \quad (\text{ד}) \quad A(0, -2) \quad m = -1 \quad (\text{ב})$$

25. רשום פונקציה קווית לפי שתי נקודות.

(א) $B(0, 2)$ $A(3, 5)$ (ג) $B(0, 2)$ $A(5, 2)$

(ב) $B(8, 0)$ $A(0, 4)$ (ד) $B(3, 1)$ $A(0, 0)$

26. "שרטט" ישרים העוברים דרך זוגות הנקודות הבאות. קרא מן ה"שרטוט" את a ו b ורשום פונקציה קווית לכל זוג נקודות.

(א) $(-1, 1)$ $(-3, -1)$ (ד) $(3, 1)$ $(-2, 1)$

(ב) $(0, 3)$ $(2, -1)$ (ה) $(4, 3)$ $(2, 2)$

(ג) $(3, 0)$ $(5, -4)$ (ו) $(1, 3)$ $(0, 0)$

בדוק כל פונקציה שרשמת על ידי הצבת הנקודות.

27. האלכסונים במעוין, מונחים על ציר ה-x ועל ציר ה-y במערכת צירים, ואורכיהם 4 יחידות ו-6 יחידות בהתאמה.

רשום את הפונקציות המתאימות לצלעות המעוין.

שים לב! האלכסונים במעוין חוצים זה את זה.

28. "שרטט" ישרים ששיפועם a נתון והם עוברים דרך נקודה נתונה A. קרא מן ה"שרטוט" את הפרמטר b ורשום פונקציה קווית לכל ישר.

(א) $a = 2$ $A(1, 1)$ (ג) $a = \frac{1}{2}$ $A(1, 3)$

(ב) $a = -1$ $A(1, -2)$ (ד) $a = 0$ $A(2, -4)$

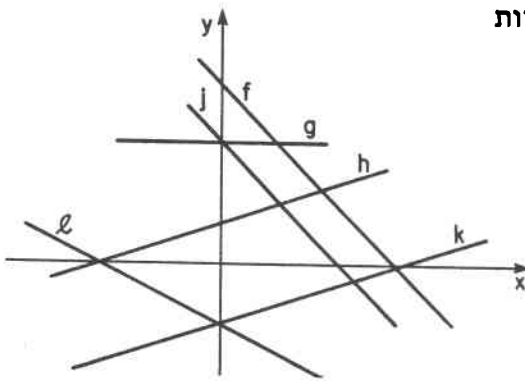
29. מצא פונקציה קווית אשר הגרף שלה נחתך עם גרף הפונקציה $f(x) = 2x - 1$ על ציר ה-y ומקביל לגרף הפונקציה $f(x) = 5x + 3$.

30. לפניך גרפים של פונקציות קוויות

$$y = ax + b$$

(א) מצא זוגות של פונקציות בעלות אותו a .

(ב) מצא זוגות של פונקציות בעלות אותו b .



31. (א) שרטט את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x$.

(ב) שרטט באותה מערכת צירים את גרף הפונקציה g המקיימת: $g(x) = f(x) + 3$.

32. בשרטוט הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = -2x + 4$$

$$g(x) = -2x - 2$$

(א) מהו הגרף של כל פונקציה?

(ב) הישרים CD ו- EF מקבילים לציר ה- y

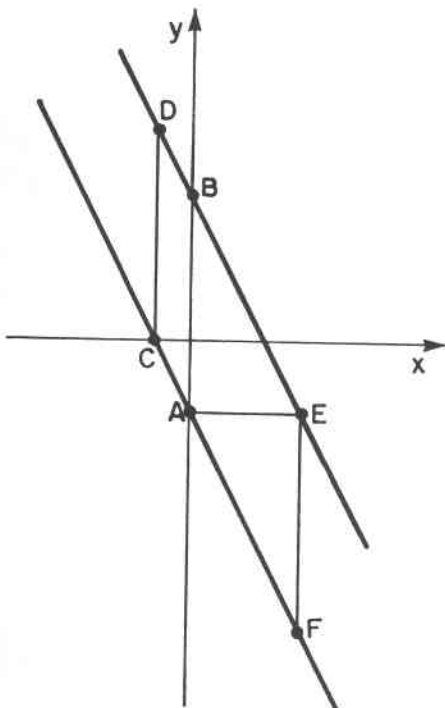
והישר AE מקביל לציר ה- x .

מצא את שיעורי הנקודות

A, B, C, D, E, F

(ג) מצא את אורכי הקטעים

EF, AB, CD





שרטט מערכת צירים בגודל עמוד של מחברת. כל יחידה משבצת אחת. שרטט במערכת הצירים את הגרפים של הפונקציות הבאות:

הדרכה: שרטט תחילה בעפרון את הישרים, אחר עבור בצבע על הקטעים המתאימים לתחום של כל פונקציה.

$$\{x \mid -8 < x < -4 \text{ או } -2 < x < 2 \text{ או } 6 < x < 10\} \quad f(x) = \frac{1}{2}x$$

$$\{x \mid -1 < x < 3\} \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

$$\{x \mid -9 < x < -5 \text{ או } 2 < x < 4 \text{ או } 5 < x < 7\} \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$$

$$\{x \mid 8 < x < 12\} \quad f(x) = \frac{1}{2}x - 5$$

$$\{x \mid -4 < x < -1\} \quad f(x) = -2x - 10$$

$$\{x \mid -5 < x < -3 \text{ או } -2 < x < 0\} \quad f(x) = -2x - 5$$

$$\{x \mid 1 < x < 3 \text{ או } 4 < x < 6\} \quad f(x) = -2x + 10$$

$$\{x \mid -3 < x < -1\} \quad f(x) = -2x$$

$$\{x \mid 4 < x < 5\} \quad f(x) = -2x + 17\frac{1}{2}$$

$$\{x \mid 7 < x < 8 \text{ או } 10 < x < 12\} \quad f(x) = -2x + 25$$

$$\{x \mid -1 < x < 1 \text{ או } 2 < x < 4\} \quad f(x) = -2x + 5$$

שרטוט נכון יזכה אותך בברכה.

לקריאה עצמית

משפט:

אם פונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא מהצורה $f(x) = ax + b$, אז היא קווית, ושיפוע הגרף שלה a .

נתון: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = ax + b$$

צ"ל: הגרף של f ישר, כלומר קצב השינוי של f קבוע.

הוכחה: נבחר שתי נקודות שונות כלשהן $A[x_1, f(x_1)]$ ו- $B[x_2, f(x_2)]$ על הגרף של f .

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

A ו- B נקודות שונות לכן $x_2 - x_1 \neq 0$ ומותר לצמצם ב $x_2 - x_1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

מצאנו כי קצב השינוי קבוע ואינו תלוי בנקודות שבחרנו. כלומר, לכל שתי נקודות שנבחר נקבל כי קצב השינוי של הפונקציה הוא a . לכן הגרף ישר ושיפועו a .

מ.ש.ל.

מבחר תשובות

1. א) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ב) $f(x) = -4x + 13$ ג) $f(x) = x - 1$

ד) $f(x) = -x + 4$ ה) $f(x) = -x + 4$, $f(x) = x - 2$

ו) $f(x) = -2$ ז) $f(x) = 5x$

2. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{2}$

3. $f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$

4. א) $f(x) = -3x + 6$ ב) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ ג) $f(x) = x - 6$

ד) $f(x) = -2$ ה) $f(x) = x$ ו) $f(x) = -8x$

ז) $f(x) = 2x + 1$ ח) $f(x) = x + \frac{1}{6}$

5. א, ב, ג, ה, ו, ז, יא, יב, יג, יד, טו, טז.

6. א) $2\frac{1}{2}$ ב) -1 ג) -2 ד) -4 ה) $\frac{4}{3}$ ו) כל מספר

ז) 0 ח) כל מספר ט) 4 י) $\{d | d \neq 0\}$ יא) 1 יב) אין

7. א) $y = -x + 5$ ב) $y = 5x - 6$ ג) $y = -2x + 2.5$

ד) $-y = -\frac{1}{2}x + 7$ ה) $y = 3x - 6$

ו) $y = -8$ ז) אין ח) $y = x$

$$B \neq 0 \quad (\text{ה}) \quad v, iv, i \quad (\text{ד}) \quad iv, i \quad (\text{ג}) \quad vi, iv, ii, i \quad (\text{ב}) \quad .9$$

$$1 + \sqrt{2} \quad (\text{ו}) \quad 0 \quad (\text{ה}) \quad 8 \quad (\text{ד}) \quad \frac{1}{3} \quad (\text{ג}) \quad -\frac{1}{2} \quad (\text{ב}) \quad 5 \quad (\text{א}) \quad .10$$

$$\frac{1}{2} \quad (\text{ח}) \quad 0 \quad (\text{ז})$$

$$(19, 18) \quad (\text{ו}) \quad (0, 1) \quad (\text{ה}) \quad (4, 4) \quad (\text{ג}) \quad (4.5, 2.5) \quad (\text{א}) \quad .17$$

$$BC = 2 \quad .20$$

$$y = \frac{1}{2}x \quad (\text{ג}) \quad y = 2x + 3 \quad (\text{א}) \quad .24$$

$$y = 2 \quad (\text{ג}) \quad y = x + 2 \quad (\text{א}) \quad .25$$

$$y = 1.5x + 3 \quad \text{אחת הפונקציות:} \quad .27$$

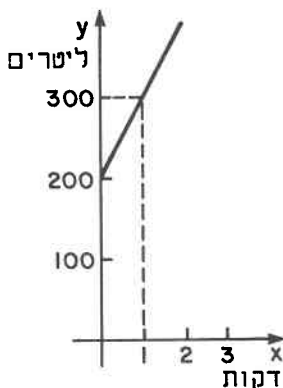
$$F(3, -8) \quad D(-1, 6) \quad .32$$

פונקציה קווית בחיי יום יום

במקרים רבים, חוק ההתאמה של פונקציה קווית הוא דגם מספיק קרוב למציאות, לכן תופעות רבות בחיי יום יום אנו מתארים על ידי חוק מהצורה $y = ax + b$.

1. נניח כי כשמחממים מים בדוד, ההתאמה בין זמן החימום לטמפרטורת המים היא מהצורה $y = ax + b$.
 התחילו לחמם מי ברז שהטמפרטורה שלהם 20°C עד לרתיחתם. כל דקה עלתה הטמפרטורה ב- 2°C .
 (א) כמה דקות חיממו עד שהמים רתחו?
 (ב) רשום תחום טווח וחוק התאמה לפונקציה המתאימה לזמן החימום בדקות (x) את הטמפרטורה ב- $^{\circ}\text{C}$ (y).
 (ג) מה היתה טמפרטורת המים לאחר חצי שעה של חימום?
 (ד) תאר את הפונקציה בגרף.

2. הגרף הבא הוא גרף של פונקציה המתאימה לזמן בדקות (x) את כמות המים בליטרים הנמצאת בדוד מים.



- (א) מהי התבנית המתאימה לגרף?
 מה מייצגים a ו-b?
- (ב) מה תהיה כמות המים בדוד לאחר $2\frac{1}{2}$ דקות? 5 דקות?
- (ג) כעבור כמה דקות תהיה כמות המים בדוד 550 ליטרים?
- (ד) קיבולו של הדוד הוא 1000 ליטרים וברגע שהוא מתמלא, נסגר הברז מאליו.
 רשום תחום וקבוצת תמונות מתאימים לפונקציה.

תרגילים

1. (א) רשום פונקציה המתאימה לאורך צלעו של משולש שווה צלעות בס"מ (x) , את היקפו בס"מ (y) . אל תשכח לרשום תחום וטווח.

(ב) תאר את הפונקציה בגרף.

2. אטמוספירה היא יחידה למדידת לחץ. על כל גוף בגובה פני הים קיים לחץ של אטמוספירה אחת (זהו לחץ הנובע משכבת האוויר המקיפה את כדור הארץ). כשצוללים לעומק הים, קיים לחץ נוסף של המים. נניח כי עם כל ירידה של 10 מ' לעומק במים עולה הלחץ באטמוספירה אחת (בקירוב).

(א) רשום פונקציה (תחום, טווח וחוק התאמה) המתאימה לעומק המים במטרים (x) , את הלחץ באטמוספירות (y) , בעומק זה.

(ב) איזה לחץ מופעל על גוף הנמצא בעומק של 5 מ' בים?

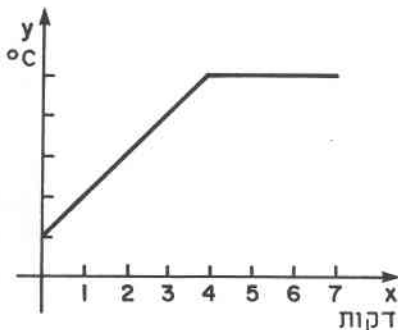
(ג) באיזה עומק נמצא גוף שמופעל עליו לחץ של $1\frac{1}{4}$ אטמוספירות?

(ד) שרטט את גרף הפונקציה.

(ה) שני גופים נמצאים בתוך הים.

על גוף א' מופעל לחץ גדול ב- $\frac{1}{2}$ אטמוספירה מן הלחץ המופעל על גוף ב'. מה הבדל העומק בין שני הגופים?

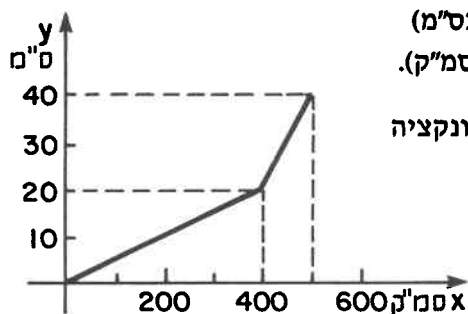
3. חיממו קומקום עם מים. טמפרטורת המים עלתה בקצב של 20°C לדקה. לפניך גרף הפונקציה המתאימה לזמן החימום בדקות (x) , את הטמפרטורה של המים בקומקום.



(א) רשום יחידות מתאימות על ציר ה- y .

(ב) מה היתה טמפרטורת המים עם תחילת החימום?

(ג) רשום כלל התאמה לפונקציה.



4. לפניך גרף המתאר את גובה המים (בס"מ) בכלי כפונקציה של הכמות שלהם (בסמ"ק).

(א) השלם את חוק ההתאמה של הפונקציה

$$y = \begin{cases} \text{---} & 0 \leq x < \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \leq x \leq 500 \end{cases}$$

(ב) מהי צורת הכלי?

5. נניח כי מכונית צורכת כמות קבועה של דלק לכל ק"מ.

נניח כי הפונקציה המתאימה למרחק בק"מ (x) , שנסע נהג את כמות

הדלק בליטרים (y) , שנתרה במיכל היא: $y = -\frac{1}{12}x + 20$.

תחומה: $\{x \mid 0 \leq x \leq 240\}$.

(א) איזו כמות של דלק נותרה במכונית לאחר נסיעה של 60 ק"מ?

(ב) מה משמעות המספר 20 בתבנית?

(ג) איזו כמות של דלק צורכת המכונית בנסיעה של ק"מ אחד?

(ד) כמה ק"מ נוסעת המכונית לכל ליטר דלק?

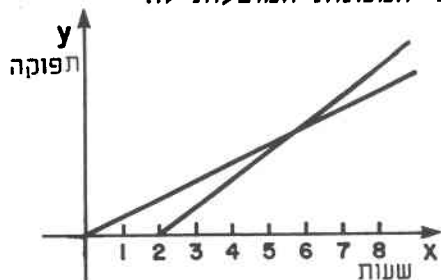
(ה) כאשר במכונית נשאר דלק ל-20 ק"מ של נסיעה בלבד, נדלקת

נורית התראה אדומה. כמה ק"מ יוכל הנהג לנסוע עד שתידלק

נורית זו?

6. מנהל מפעל צריך לרכוש מכונה המייצרת פריט מסויים.

הגרפים שלפניך מתארים את תפוקת שתי המכונות המוצעות לו.



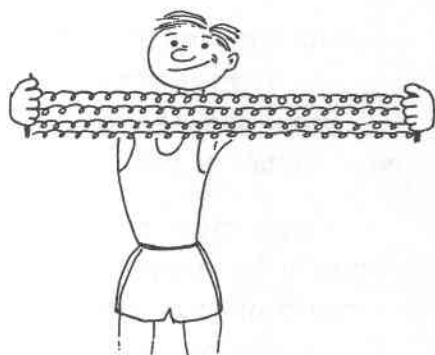
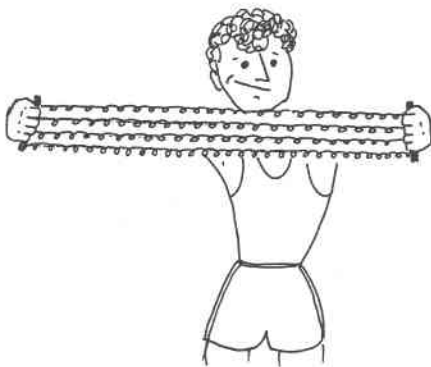
(א) יום עבודה במפעל הוא בן 8 שעות.

איזו מכונה כדאי לו לרכוש?

(ב) האם קיצור יום העבודה יכול

להשפיע על החלטתו?

7. בחדר התעמלות ישנם קפיצים למדידת כוח השרירים.
 כוח אפשר למדוד בניוטונים.
 קפיץ א' שאורכו 60 ס"מ מתארך ב-10 ס"מ על כל יחידת כוח (ניוטון)
 הפועלת עליו.
 קפיץ ב' שאורכו 40 ס"מ מתארך ב-15 ס"מ על כל יחידת כוח (ניוטון)
 הפועלת עליו.
- (א) כתוב לגבי כל קפיץ, פונקציה המתאימה לכוח (x) בניוטונים
 המופעל על הקפיץ, את אורך הקפיץ בס"מ (y).
- (ב) תאר את הפונקציות בגרף במערכת צירים אחת.
- (ג) יעקב ויוסף התחרו במתיחת הקפיצים. יעקב מתח קפיץ א' ויוסף
 מתח קפיץ ב'.
- i. תחילה הפעילו שניהם כוח של 3 ניוטונים.
 לאיזה אורך הגיע כל קפיץ?
- ii. אחר-כך שניהם מתחו את קפיציהם לאורך 90 ס"מ.
 מי מהם הפעיל כוח רב יותר?
- iii. בשלב שלישי הפעילו שניהם אותו כוח ושני הקפיצים הגיעו
 לאותו אורך. איזה כוח הפעילו ולאיזה אורך הגיעו הקפיצים?



8. בארץ עוץ מחיר הנסיעה באוטובוס קבוע בתוך העיר ושווה ל-5 זוזים. מחוץ לעיר המחיר משתנה: כל 3 תחנות יש תוספת של 1.5 זוזים. קו 23 שבארץ עוץ נוסע בעיר 8 תחנות וממשיך מחוץ לעיר עוד 12 תחנות. פלוני עלה לאוטובוס בתחנה הראשונה שלו.

(א) שרטט את גרף הפונקציה המתאימה למספר התחנות (x) שנסע פלוני, את מחיר הנסיעה שלו בזוזים.

(ב) האם חוק ההתאמה הוא של פונקציה קווית?

9. על מחוג הדקות של שעון ישנה נקודה שחורה המרוחקת ממרכז השעון 10 ס"מ.

(א) כתוב פונקציה המתאימה למספר הדקות (x) שעבר המחוג הנ"ל מן השעה 12:00, את גודל הסיבוב במעלות (y) שעברה הנקודה.

(ב) רשום פונקציה המתאימה למספר הדקות שעבר המחוג הנ"ל מן השעה 12:00 את המרחק בס"מ שעברה הנקודה.

להזכיר: היקף מעגל ניתן ע"י הנוסחה $p = 2\pi r$.

(ג) רשום פונקציה המתאימה למספר הדקות שעבר המחוג הנ"ל את מרחק הנקודה ממרכז השעון בס"מ.



פסק זמן 

- | | |
|---|--|
| (א) צב וצבי יצאו לדרך של חצי ק"מ בערך. הצבי בכל דקה 200 מ' דוהר הצב באותו זמן רק 5 מ' עובר. | (ג) ושוב התחרות התחילה וכך חוזר חלילה עד אשר הצב המזיע גם הוא אל המטרה הגיע. |
| (ב) מובן שהצבי הגיע ראשון ואז חמד הוא לו לצון עד הצב רץ חזרה ושוב חזר למטרה. | (ד) ועתה, אמרו בערך, מה אורכה של זו הדרך אשר הצבי אותה עבר במרוצו זה המוזר? |

10. בשעה 07:00 בבוקר יצא רוכב אופניים מאילת לכיוון באר-שבע במהירות של 16 ק"מ לשעה. כעבור שעה יצא אחריו מאילת רוכב אופניים שני במהירות 20 ק"מ לשעה. כעבור זמן מסוים, לאחר צאת רוכב האופניים השני, יצא מאילת לבאר-שבע רוכב אופנוע. הוא השיג את רוכב האופניים השני בשעה 10:00 בבוקר ואת רוכב האופניים הראשון 15 דקות לאחר מכן. נניח שמהירותם של כל אחד מרוכבי האופניים וזו של רוכב האופנוע לא השתנו בשעת הנסיעה.

(א) שרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות המתאימות לזמן שחלף מאז 07:00 בבוקר את מרחקו של כל אחד מכלי הרכב מאילת.

הדרכה: סמן כל שעה 4 משבצות מחברת, כל 4 ק"מ משבצת אחת.

(ב) מצא בעזרת הגרף את מהירותו של רוכב האופנוע.

★ נסה את כוחך

11. בנסיעה במונית בארץ עוץ, מורה המונה עם תחילת הנסיעה סכום התחלתי של 10 זוזים. אחרי כל ק"מ של נסיעה "קופץ" המונה ב-4 זוזים.

(א) הפונקציה המתאימה למרחק הנסיעה בק"מ (x) את גובה התשלום בזוזים (y) אינה מהצורה $f(x) = ax + b$.
הסבר מדוע. נסה לרשום לה תבנית מתאימה.

(ב) רשום תחום חלקי שבו הגרף יהיה חלק של ישר.

שים לב! יש יותר מאפשרות אחת.

* * * * *



מבחר תשובות

1. (א) $y = 3x \quad \{x|x \geq 0\} \rightarrow R$

2. (א) $f : \{x|x \geq 0\} \rightarrow R$ (ב) 1.5 אטמ' (ג) 2.5 מ' (ה) 5 מ'.

$$f(x) = 0.1x + 1$$

3. (ב) $20^\circ C$ (ג) $0 \leq x \leq 4$ $f(x) = \begin{cases} 20x + 20 & 0 \leq x \leq 4 \\ 100 & x > 4 \end{cases}$

4. (א) $0 \leq x < 400$ $y = \begin{cases} 0.05x & 0 \leq x < 400 \\ 0.2x - 60 & 400 \leq x \leq 500 \end{cases}$

5. (א) 15 ליטרים (ד) 12 קמ' (ה) 220 קמ'.

7. (א) קפיץ א: $y = 60 + 10x$ קפיץ ב: $y = 40 + 15x$

(ג) i. קפיץ א: 90 סמ' קפיץ ב: 85 סמ'

ii. יוסף iii. 4 ניוטונים, מטר אחד.

9. (א) $y = 6x$ (ב) $y = \frac{\pi}{3}x$ (ג) $y = 10$

10. (ב) 48 קמ"ש

11. (א) $y = 10 + 4[x]$ (ב) מסמן את הערך השלם של x .

משפחות של פונקציות

מהי משפחה?

1. נתונה תבנית של חוק התאמה $f(x) = mx - 2m$ הצב במקום m שלושה מספרים שונים, ושרטט את שלוש הפונקציות המתקבלות, במערכת צירים אחת.
- מה המשותף לשלושת הישרים ששרטטת?

התבנית $f(x) = mx - 2m$ איננה פונקציה, אבל כשבחרים מספר במקום m מקבלים פונקציה.

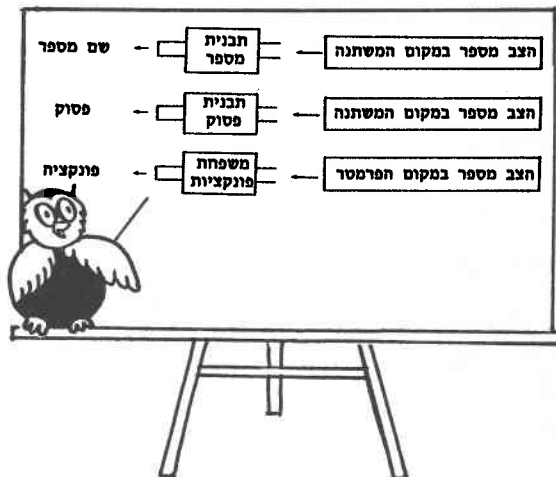
התבנית מבטאת אם כן משפחה של פונקציות. הפונקציות השייכות למשפחה זו הן כל אותן הפונקציות המתקבלות בהצבה כלשהי של m . m נקרא פרמטר.

2. בכל אחד מן המקרים הבאים רשום שלוש פונקציות פרטיות מן המשפחה ותן תיאור מילולי של תכונה משותפת למשפחה.

$$(א) f(x) = mx + 5 \quad (ב) f(x) = \frac{1}{2}x + n$$

תזכורת:

אם אין רושמים תחום, מתכוונים לתחום הגדול ביותר האפשרי שהוא בדרך כלל R . הטווח בכל מקרה R

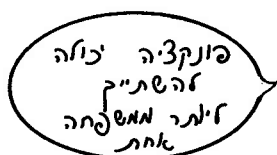


3. (א) השלם את הטבלה הבאה:
אם הינך נתקל בקושי במציאת התכונה או התבנית, רשום שתי פונקציות פרטיות נוספות.

תבנית למשפחה	פונקציה פרטית	התכונה
	$y = 5x$	הגרף הוא ישר בעל שיפוע העובר דרך ראשית הצירים
$y = 2x + b$		
		הגרף הוא ישר המקביל לישר $y = \frac{1}{2}x - 2$ או מתלכד אתו.
$y = mx - 3$		
$y = c$		
		הגרף הוא ישר החותך את ציר x בנקודה $(0, 3)$.
		הגרף הוא ישר היוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר x .
		הפונקציה היא קווית יורדת והגרף שלה חותך מן הצירים קטעים שווים.
	$y = \frac{1}{2}x$	

(ב) הדגם בתנועה של ישר במערכת צירים כל משפחה.

(ג) חלק את המשפחות לשתי קבוצות עיקריות.



על המשפחה $y = ax$

למשפחות של הפונקציות הקוויות שבהן נטפל יש בדרך כלל אחת מן התכונות הבאות:

- כל הגרפים הם ישרים מקבילים.
- כל הגרפים עוברים דרך נקודה אחת.

4. (א) הגרף של כל פונקציה מן המשפחה $y = ax$ עובר דרך ראשית הצירים. נמק.

(ב) נסח את הטענה ההפוכה. האם היא נכונה?

5. (א) הצב שלושה מקורות, פרט ל-0, בפונקציה $y = 3x$ ומצא את תמונתם.

(ב) מצא את היחס בין כל תמונה למקור שלה. מה מצאת?

(ג) מצא את היחסים בין שלוש תמונות למקורן בפונקציה $y = 2x - 1$.

התאמה אשר בה היחס בין כל תמונה למקורה הוא קבוע (פרט למקור 0 המקיים $f(0) = 0$) נקראת התאמה ביחס ישר.

6. (א) כל פונקציה מהמשפחה $y = ax$ מבטאת התאמה ביחס ישר. נמק.

(ב) נסח את הטענה ההפוכה. האם היא נכונה?

$X_{xa}fY^xXaXafX^YaaXaf^fxYaYaXy$

7. היחס בין מסתו של כל גוש ברזל בגרמים לבין נפחו בסמ"ק הוא קבוע ושווה ל- 7.8 (גרם/סמ"ק) והוא נקרא הצפיפות של הברזל. רשום פונקציה המבטאת את ההתאמה בין נפח הברזל למסתו. - האם זוהי התאמה ביחס ישר?

8. בכל פונקציה המבטאת התאמה ביחס ישר מתקיים גם: היחס בין כל שתי התמונות שווה ליחס בין המקורות של אותן תמונות.

(א) השלם את הוכחת הטענה:

$$f(x) = ax \text{ היא התאמה ביחס ישר.}$$

(x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) הן שתי נקודות על גרף הפונקציה.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{f(x_1)}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{ax_2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(ב) הסק מטענה זו מסקנה לגבי היחס בין מסתם של שני גושי ברזל.

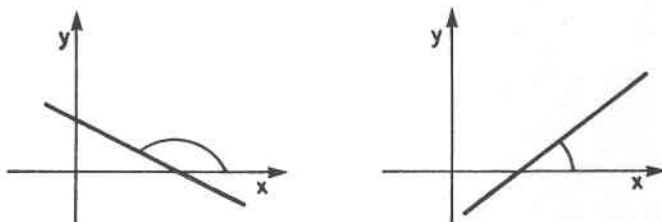
לשוויון בין שני יחסים קוראים פרופורציה.

נוהגים, אם כן, לומר כי בפונקציה מן המשפחה $y = ax$ ו- x הם גדלים פרופורציוניים.

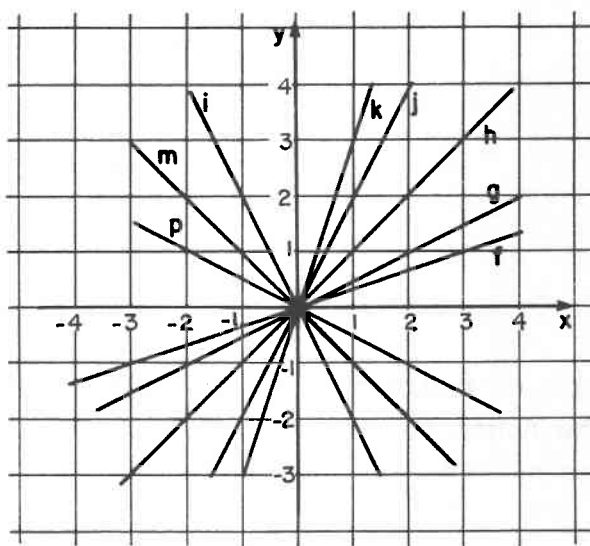
פונקציה מבטאת "התאמה ביחס ישר" אם ורק אם היא מהמשפחה $y = ax$

זווית ושיפוע

בתרגילים הבאים (9-11) נחקור את הקשר בין שיפוע של ישר לבין הזווית שהישר יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.



9. לפניך שרטוט של גרפים



(א) רשום חוק התאמה לכל פונקציה.

(ב) בין אילו שני גרפים מן השרטוט ימצא הגרף של $y = 1\frac{1}{2}x$ של $y = -\frac{3}{4}x$?

10. הגרפים בשאלה 9 הם גרפים של פונקציות מן המשפחה $y = ax$. כל גרף כזה יוצר זווית α עם הכיוון החיובי של ציר x .

לדוגמא: אם $\alpha = 45^\circ$ ו $a = 1$

השלם את הטבלה הבאה:

α	a
$\alpha = 0$	$a = \underline{\hspace{2cm}}$
$0^\circ < \alpha < 45^\circ$	$\underline{\hspace{2cm}} < a < \underline{\hspace{2cm}}$
$\alpha = 45^\circ$	$a = \underline{\hspace{2cm}}$
$\underline{\hspace{2cm}} < \alpha < \underline{\hspace{2cm}}$	$a > 1$
$90^\circ < \alpha < 135^\circ$	$a < \underline{\hspace{2cm}}$
$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	$a = -1$
$\underline{\hspace{2cm}} < \alpha < 180^\circ$	$-1 < a < \underline{\hspace{2cm}}$
$\alpha = 180^\circ$	$a = \underline{\hspace{2cm}}$

★ נסה את כוחך

11. הטבלה בתרגיל הקודם מראה, כי קיימת התאמה בין זווית (מקור) לשיפוע (תמונה). חוק ההתאמה הזו הוא חוק התאמה של פונקציה המסומנת ב- tg (קיצור של המלה $tangent$) והנקראת טנגנס.

מצא במחשבון את המקש tg (או $\tan$)

(א) בצע את סדרת הלחיצות

tg	45
----	----

 משמאל לימין מה קיבלת?

(ב) חשב בעזרת המחשבון את השיפועים המתאימים לזוויות הבאות:
 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$.

- האם מצאת ביניהם זוגות של מספרים נגדיים?

★ ★

שיפוע הגרף של פונקציה קווית משתנה בהתאם לזווית

שהישר יוצר עם הכוון החיובי של ציר ה-x

תרגילים

מהי משפחה?

1. רשום תבנית למשפחת הישרים החותכים את ציר y בנקודה $-\frac{1}{2} - 3$.
רשום שתי פונקציות מן המשפחה. אחת עולה ואחת יורדת.
2. רשום תבנית למשפחת הפונקציות שהגרף שלהן מקביל לישר $y = -x + 3$. כמה פונקציות במשפחה זו?
כמה מן הפונקציות של המשפחה עוברות דרך הנקודה $(2, 4)$?
3. רשום את כל הפונקציות הקוויות אשר הגרפים שלהן חותכים מן הצירים קטעים שאורכם שתי יחידות (מן הראשית עד לנקודת החיתוך). התוכל לרשום אותן כמשפחה? נמק!
4. רשום תבנית למשפחת ישרים אשר אין בה גרף של אף פונקציה.
5. (א) רשום פונקציה השייכת לשתי המשפחות $y = ax + 3$ ו- $y = -2x + c$.
(ב) איזו תכונה מקבלת הפונקציה מכל משפחה?
(ג) האם יש פונקציה קווית אחרת המשותפת לשתי המשפחות? נמק!
6. (א) רשום שתי פונקציות קוויות אשר שיפוען 0. "שרטט" את הגרף שלהן.
(ב) רשום תבנית למשפחת הפונקציות הקוויות אשר שיפוען 0.
איזה שם נוסף אתה מכיר למשפחה זו?
(ג) רשום פונקציה ממשפחה זו העוברת דרך ראשית הצירים.
מה תוכל לומר על הגרף שלה? מהי הזווית שיוצר הגרף עם ציר x ?

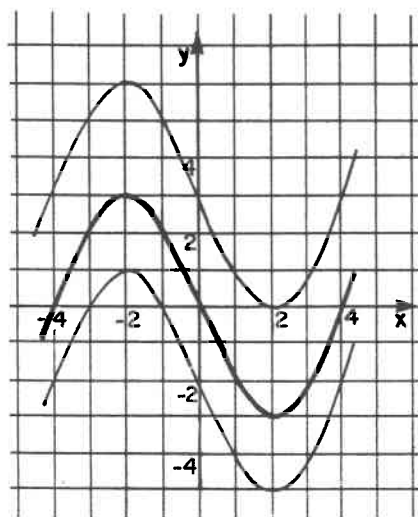
7. (א) רשום שלוש פונקציות פרטיות מן המשפחה $y = mx + 5 - 2m$ ושרטט את הגרפים שלהן במערכת צירים אחת.

(ב) שער לפי השרטוט את התכונה המשותפת לפונקציות מהמשפחה והוכח את השערתך.

★ נסה את כוחך

8. לפניך (בקו עבה) גרף הפונקציה: $y = \frac{1}{2}x^3 - 2x$.

גרף זה שייך למשפחה שחלק מן הגרפים הנוספים שלה משורטטים בקו דק. התוכל לרשום למשפחה תבנית חוק התאמה?



★ ★

9. נכון או לא נכון?

(א) במשפחה $y = 2x + b$ יש פונקציה שהגרף שלה עובר דרך ראשית הצירים.

(ב) במשפחה $y = 3x + c$ יש פונקציה שהגרף שלה מקביל לגרף הפונקציה $y = 2x + 3$

(ג) במשפחה $y = ax - 4$ יש פונקציה קבועה.

(ד) במשפחה $y = ax + 1$ יש פונקציה שהגרף שלה עובר דרך ראשית הצירים.

על המשפחה $y = ax$

10. אילו מן הטבלות הבאות יכולות לייצג התאמה ביחס ישר?

x	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

x	-1	0	1	2
y	2	0	-2	-4

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	0
y	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	3	1

x	-4	-6	-8
y	0	0	0

11. קבע, אילו מן ההתאמות הבאות מבטאות בדרך כלל התאמה ביחס ישר. רשום מה מבטא יחס ההתאמה הקבוע, בכל מקרה כזה?

- (א) התאמה בין אורך צלע הריבוע לאורך אלכסונו.
 (ב) התאמה בין אורך צלע הריבוע לגודל אחת מזוויותיו.
 (ג) בשקם נמכר כל מוצר בהנחה של 12.5%. התאמה בין מחיר המוצר לפני ההנחה (בש"ח) לבין ההנחה (בש"ח).
 (ד) התאמה בין מחירו של מוצר מן השקם לפני ההנחה של 12.5% (בש"ח) לבין מחירו לאחר ההנחה.

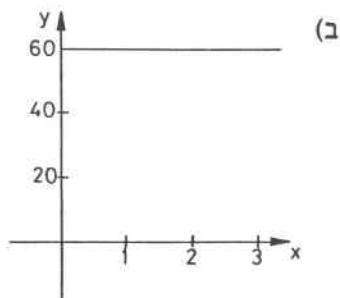
פסק זמן

- (א) נערה בחופשה
 עבודה לה חפשה.
 לחנות פרחים נגשה
 להיות שליחה בקשה.
 (ב) "לפי בחירתך בכל יום מראש,
 אחת מהשתיים תוכלי לדרוש.
 אפשרות ראשונה" לה אמר המוכר,
 "15 ש"ח לכל זר".
 (ג) "אפשרות שניה אם תבחרי,
 עבור הזר הראשון שתמסרי
 התשלום יהיה מועט:
 אגורה אחת בלבד.
 (ד) אך 2 אגורות לזר השני,
 4, אם את השלישי תתני,
 8 אגורות לזר הבא שתובילי
 וכך הלאה התשלום תכפילי".

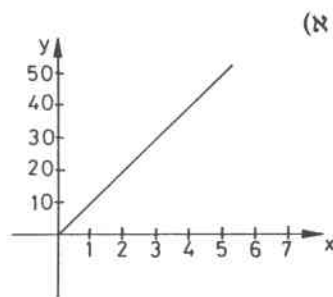
אילו רציתם להיות שליחים,
 ולהחליט הייתם צריכים.
 מה הייתם למוכר משיבים,
 איזו אפשרות אתם מעדיפים?

✓

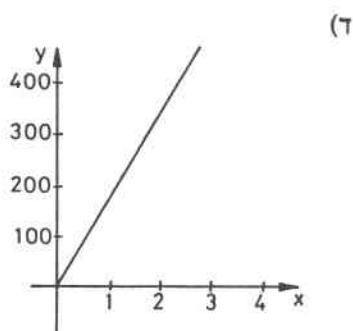
12. סמן את הגרפים אשר הפונקציות המתאימות להן מבטאות "התאמה ביחס ישר".



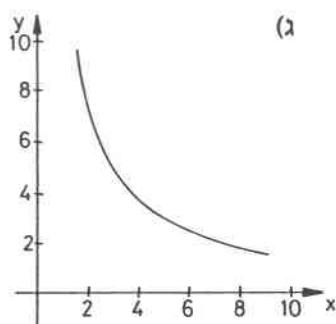
x - הזמן (בשעות).
y - מהירות ממוצעת של המכונית (בקמ"ש)



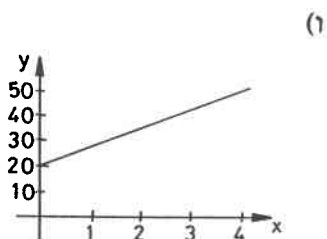
x - כמות הדלק שצורך מנוע (בליטר)
y - הדרך. (בק"מ)



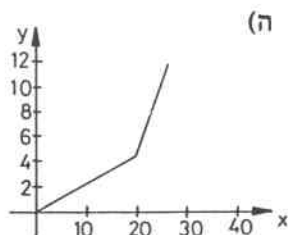
x - הזמן שחלף מפתיחת הברז (בשעות).
y - כמות המים שהפיקה הברז (במ"ק).



x - אורך מלבן ששטחו 16 סמ"ר (בס"מ)
y - רוחב המלבן (בס"מ)



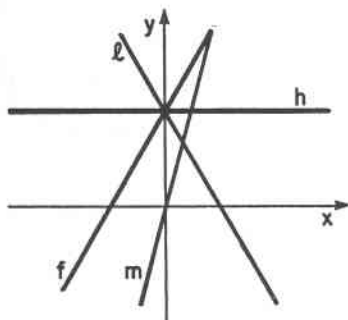
x - זמן החימום (בדקות).
y - טמפרטורת המים (ב-°C).



x - כמות הנוזלים בכלי (בסמ"ק)
y - גובה המים בכלי (בס"מ)

זווית ושיפוע

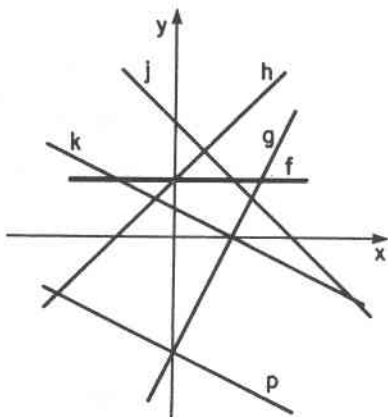
13. לפניך הגרפים של פונקציות אחדות.



(א) סדר את הפונקציות לפי גודל השיפוע שלהן, החל מהקטן.

(ב) היחידות על שני הצירים שוות.
רשום אומדן של השיפועים.
- האם השיפוע תלוי בגודל היחידה?

14. רשום כללי ההתאמה לגרפים הבאים:



בחר את a ו- b
מן המספרים הבאים בלבד:

$$.0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, 2, -1, 1$$

★ נסה את כוחך

15. סמן אמת או שקר. תקן את הטענות השקריות כך שיהיו נכונות.
העזר בתרגיל 11 עמ' 176.

(א) הפונקציה tg מוגדרת לכל זווית בתחום: $\{\alpha \mid 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ\}$

(ב) קבוצת התמונות של הפונקציה tg יכולה להיות: {המספרים הממשיים}.

(ג) לזווית $\alpha = 90^\circ$ אין תמונה לפי הפונקציה tg .

(ד) לזוויות 0° ו- 180° יש אותה תמונה לפי הפונקציה tg .

(ה) בתחום $\{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$ ככל שהזווית גדלה, גדל השיפוע.

(ו) כאשר $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ השיפוע שלילי.

(ז) בתחום $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ הפונקציה tg עולה.

★ ★



16. ריבוע קסם

א	ב	ג
ד	ה	ו
ז	ח	ט

א) המקור של 7 לפי הפונקציה $f(x) = 2x + 1$

ב) גרף הפונקציה $y = 3x - 4$, חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

ג) נקודת האפס של הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

ד) שיפוע הפונקציה k , שהיא התאמה ביחס ישר, ומקיימת: $k : 1\frac{1}{2} \rightarrow -3$

ה) ערך b (כאשר $k(x) = ax + b$) של הפונקציה ב- $(ד)$.

ו) שיפוע הפונקציה הקווית העוברת דרך הנקודות:
 $B(0, -1)$, $A(-10, -21)$

ז) ערך b (כאשר $y = ax + b$) של הפונקציה ב- $(ו)$.

ח) השעור הראשון של נקודת חיתוך הגרפים של הפונקציות:
 $y = \frac{1}{2}x - 5$ $y = -x + 1$

ט) השעור השני של הנקודה ב- $(ח)$.



חקור וגלה

17. ישרים וסימטריה

I. (א) "שרטט" במערכת צירים אחת את הישרים $y = 2x$, $y = x$.

(ב) דמיון כי הינך מעמיד מראה דו כונית לאורך ציר ה-y במאונך לדף. מיהם הישרים ה"נראים" במראה?

(ג) דמיון כי הינך מעמיד מראה לאורך ציר ה-x במאונך לדף מיהם הישרים ה"נראים" במראה?

(ד) "העמד" את המראה לאורך הישר $y = x$ במאונך לדף. מיהם הישרים ה"נראים" במראה?

(ה) "העמד" את המראה לאורך הישר $y = -x$. מיהם הישרים ה"נראים" במראה.

הישר ושיקופו נקראים סימטריים זה לזה לגבי הישר שלאורכו "עומדת" המראה (ציר הסימטריה).

II. (א) אם השיקוף נעשה בציר ה-y. מיהו הישר הסימטרי ל- $y = 4x$ ל- $y = \frac{1}{3}x$? ל- $y = -3x$? ל- $y = cx$?

(ב) אם השיקוף נעשה בציר ה-x. מיהו הישר הסימטרי ל- $y = 4x$ ל- $y = \frac{1}{3}x$? ל- $y = -3x$? ל- $y = cx$?

(ג) אם השיקוף נעשה בישר $y = x$. מיהו הישר הסימטרי ל- $y = 4x$ ל- $y = \frac{1}{3}x$? ל- $y = -3x$? ל- $y = cx$? $c \neq 0$.

(ד) אילו ישרים סימטריים לעצמם לגבי ציר y (בנוסף לציר ה-y עצמו) לגבי הישר $y = x$?

III.א) שרטט במערכת צירים את הישר $y = -3x$.

(ב) שרטט באותה מערכת צירים את הישר הסימטרי לישר $y = -3x$ לגבי ציר ה־y.

ג) שרטט באותה מערכת צירים את הישר הסימטרי לישר שקבלת ב-ב) לגבי הישר $y = x$. איזה ישר קיבלת?

(ד) הוכח בעזרת השוואת זוויות כי הזווית בין הישרים (מא) ו(ג) היא ישרה.

(ה) חזור על א - ד) לגבי הישר $y = 2x$.

(ו) חזור על א) - ד) לגבי ישר כלשהו מן המשפחה $y = ax$.

2) השלם את המשפט: שני ישרים מן המשפחה $y = ax$ אשר שיפועיהם a_1 ו- a_2 מקיימים _____ מאונכים זה לזה.

IV. נתון הישר $y = 2x + 1$.

(א) מהי משוואת ישר הסימטרי לישר זה לגבי ציר ה-y?

(ב) מהי משוואת ישר הסימטרי לישר זה לגבי ציר ה־x?

(ג) מהי משוואת ישר הסימטרי לישר זה לגבי הישר $y = x$?

(ד) מצא משוואת ישר המאונך לישר הנתון והפוגש אותו על ציר ה-y.

★ נסה את כוחך

V. חזור על הסעיפים של שאלה IV עם הישר $y = ax$.

VI. חזור על הסעיפים של שאלה IV עם הישר $y = ax + b$.

★ ★

מבחר תשובות

1. $y = ax - 3\frac{1}{2}$

2. $y = -x + b$

3. $y = -x - 2$, $y = x - 2$, $y = -x + 2$, $y = x + 2$

4. $x = c$

5. (א) $y = -2x + 3$ (ג) לא.

6. (ב) $y = a$

8. $y = \frac{1}{2}x^3 - 2x + k$

9. (א) כן (ב) לא (ג) כן (ד) לא.

10. א, ב, ג.

12. א, ד.

14. $g(x) = 2x - 2$, $f(x) = 1$, $j(x) = -x + 2$, $h(x) = x + 1$

$p(x) = -\frac{1}{2}x - 2$, $k(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

15. (א) לא (ב) כן (ג) כן (ד) כן (ה) כן (ו) כן (ז) כן

17. I. (ב) $y = -x$, $y = -2x$ (ג) $y = -x$, $y = -2x$

(ד) $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$ (ה) $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$

אל התבנית על ידי חישוב הפרמטרים

בסעיפים הקודמים למדנו למצוא חוק התאמה של פונקציה קווית כשנתונים שיפוע ונקודה על גרף הפונקציה. מצאנו זאת על פי מנת ההפרשים.

עתה נלמד למצוא חוק התאמה של פונקציה קווית מהצורה $y = ax + b$ על ידי חישוב הפרמטרים שלה a ו- b .

1. (א) רשום תבנית למשפחת הפונקציות הקוויות f בעלות שיפוע 5.
(ב) מצא מתוך המשפחה את הפונקציה הקווית המקיימת: $f(2) = 4$.
(ג) מצא באותה דרך פונקציה קווית לפי שפוע 2- ונקודה $(-1, 4)$.
2. מצא פונקציה קווית לפי שתי נקודות $(7, -4)$, $(1, 2)$ הנמצאות על הגרף שלה.
הדרכה: מצא תחילה את השיפוע והמשך כמו בתרגיל 1.
3. מצא פונקציה קווית המקיימת: $f(-4) = 7$, $f(2) = 1$
הדרכה: הצב בתבנית $y = ax + b$ מקור ותמונה בכל פעם, ותקבל מערכת של שתי משוואות אשר המשתנים שלהן הם a ו- b .
4. בריכה מתמלאת על ידי ברז מים. ידוע כי ביום מסוים בשעה שתיים היו בבריכה 100 מ"ק מים ובשעה חמש 175 מ"ק מים.
(א) נניח כי הפונקציה המתאימה לזמן x (בשעות) את כמות המים בבריכה y (במ"ק), היא פונקציה קווית. מצא את חוק ההתאמה.
(ב) מה היתה כמות המים בבריכה בשעה 12:00?
(ג) איזו כמות מים יוצאת מהברז במשך שעה אחת?

תרגילים

1. סמן אמת או שקר או אי אפשר לדעת.

(א) גרף הפונקציה הקווית ששיפועה 2- והמקיימת $f(-10) = 0$, חותך את ציר ה-y בנקודה $(0, -20)$.

(ב) הפונקציה הקווית המקיימת $f(2) = 5$ אשר הגרף שלה עובר דרך הנקודה $(-2, -3)$, היא פונקציה עולה.

(ג) הפונקציה הקווית ששיפועה 1- אשר הגרף שלה עובר דרך הנקודה $(2, 1)$, היא $f(x) = x - 1$.

(ד) הגרפים של כל הפונקציות במשפחה $y = ax + 5 - 3a$, עוברים דרך הנקודה $(3, 5)$.

(ה) הגרף של הפונקציה הקווית החותך את ציר ה-y בנקודה $(0, 7)$ ושיפועו 2-, מקביל לגרף הפונקציה $y = 7x - 2$.

(ו) הפונקציה הקווית אשר הגרף שלה עובר דרך הנקודות $(4, -1)$ ו- $(3, 5)$ מקיימת: $f(0) = 23$.

(ז) הגרף של הפונקציה הקווית f המקיימת: $f(5) = -4$, $f(-2) = 3$, והגרף של הפונקציה הקווית g המקיימת: $f(-2) = 7$, $f(0) = 6$, נפגשים ברביע השני.

(ח) הגרף של הפונקציה הקווית ששיפועה $-\frac{1}{3}$, אשר עובר דרך הנקודה $(8, -25)$, חותך את ציר ה-y בחלקו החיובי.

(ט) פונקציה f המקיימת $f(2) = 3$, $f(1) = 0$ היא פונקציה קווית.

(י) הפונקציה אשר הגרף שלה עובר דרך הנקודות $(1, -1)$, $(1, 8)$, $(12, 1)$, היא פונקציה קווית.

(יא) הפונקציה אשר הגרף שלה עובר דרך הנקודות $(0, -1)$, $(1, 8)$, $(12, 2)$, היא פונקציה קווית.

2. מצא, אם אפשר, בדרך הנוחה לך פונקציות קוויות לפי זוגות הנקודות הבאות:



- | | |
|-------------------------|---|
| א) (5, 7), (-1, -2) | ז) (-1, 0), (3, -4) |
| ב) (3, -2), (-5, -2) | ח) (1, 0), (-1, 4) |
| ג) (0, 0), (-3, 7) | ט) (0, 2.5), (10, 0) |
| ד) (-3, 2.8), (0, 0.8) | י) (2, 1), (5, 2.5) |
| ה) (1, 6), (0.3, 0) | יא) $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ |
| ו) (2, 2.5), (-2, -1.5) | יב) (4, -2), (4, 6) |

3. בית חרושת לשיש שוכר משאית לצורך הובלה. מסתה של המשאית ללא מטען היא 12,000 ק"ג. כאשר העמיסו על המשאית שיש בנפח של 7 מ"ק, היתה מסתה של המשאית עם השיש 33,000 ק"ג.

א) מצא את חוק ההתאמה המתארת את המסה (y) של המשאית עם המטען (בק"ג), כפונקציה של נפח השיש x (במ"ק).

ב) הסבר את משמעות של a ושל b בפונקציה שרשמת.

4. במיכלית חלב 2800 ליטר חלב. המיכלית מתרוקנת במחלבה בקצב קבוע בעזרת צינור עם ברז. 4 דקות אחרי פתיחת הברז נמצאים במיכלית רק 2200 ליטר חלב.

א) מצא את הפונקציה המתאימה לזמן בדקות (x) שחלף מאז פתיחת הברז, את הכמות בליטרים (y) של החלב במיכלית.

ב) מה משמעות הפרמטר a בבעיה זו?

ג) מצא בעזרת חישוב את מספר הדקות הדרוש כדי לרוקן את המיכלית.

5. כאשר דוד מים מתחמם אפשר ליצור התאמה בין זמן החימום בשעות (x) של הדוד לטמפרטורה ב- $^{\circ}\text{C}$ (y) של המים בדוד. נניח כי החוק של התאמה זו הוא של פונקציה קווית. בשעה 6:00 בבוקר התחילו לחמם את הדוד ואז היתה טמפרטורת המים בדוד 20°C . בשעה 8:00 בבוקר היתה טמפרטורת המים בדוד 60°C .

(א) מצא את הפונקציה המתאימה לזמן החימום את טמפרטורת המים (שים לב! בשעה 8:00 בבוקר זמן החימום הוא שעתיים).

(ב) אילו גדלים מייצגים הפרמטרים a ו-b בחוק ההתאמה הקווית שקיבלת?

(ג) מהי טמפרטורת המים בשעה 7:30 בבוקר?

(ד) באיזו שעה יגיעו המים לרתיחה (100°C)?

6. כאשר מחממים גז בלחץ קבוע גדל נפחו. נפחו של גז מסויים בטמפרטורה של 30°C הוא 101 דצמ"ק. נפחו של אותו גז בטמפרטורה של 60°C הוא 111 דצמ"ק. ידוע כי הקשר בין הטמפרטורה של גז לנפחו (כאשר הלחץ קבוע) ניתן בעזרת חוק התאמה של פונקציה קווית.

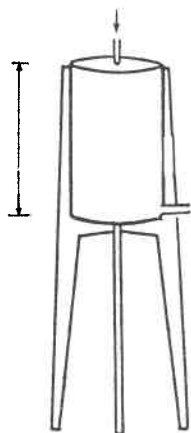
(א) מצא את הפונקציה f המתאימה לטמפרטורה (x) של הגז את נפחו.

(ב) שרטט את גרף הפונקציה f במדויק ככל האפשר.

הדרכה: קח $\frac{1}{2}$ ס"מ כ- 20°C .

(ג) מצא בדרך אלגברית באיזו נקודה הגרף חותך את ציר הטמפרטורה? (הערה: לנקודה שבה הגרף חותך את ציר הטמפרטורה בשאלה 6 יש חשיבות רבה. תוכל לקרוא על כך בספרי הפיסיקה בהם מופיע פרק על שינוי נפחו של גז בעקבות שינויים בטמפרטורה).

(ד) מצא את הפונקציה g המתאימה לנפח הגז (x) את הטמפרטורה שלו. רשום גם תחום וטווח.



7. לבריכת מים צורה גלילית.
שטח בסיס הבריכה 25 מ"ר,
גובהה 10 מ'. הבריכה
מתמלאת בעזרת צינור קבוע
בתקרתה, בקצב של 5 מ"ק לדקה.
בתחתית הבריכה קבוע צינור
נוסף, הנפתח כאשר גובה
המים מגיע ל-4 מ' מתחתית
הבריכה, והמריק את מי הבריכה
בקצב של 3 מ"ק לדקה.
התחילו למלא את הבריכה
בהיותה ריקה.

- שים לב! נפח של גליל מחשבים על ידי מכפלת שטח בסיסו בגובה.
(א) שרטט את גרף הפונקציה המתאימה לזמן (בדקות) את כמות המים
בבריכה (במ"ק).
(ב) שרטט. גרף כמו ב' א' לגבי בריכה הדומה בכל לבריכה הנתונה, אך
בה מרוקן הצינור את המים בקצב של 6 מ"ק לדקה.
(ג) כנ"ל לגבי בריכה שקצב הורקת המים בה הוא 5 מ"ק לדקה.
(ד) השווה את שלושת הגרפים שקיבלת.
(ה) כתוב בכתב מתמטי את הפונקציות המתאימות לגרפים ששרטטת.

8. במפעל שתי מכונות. הספקה של המכונה האחת 20 יחידות של מוצר
בשעה, והטיפול הראשוני בה (לפני תחילת העבודה) נמשך 2 שעות.
המכונה השניה מייצרת 10 יחידות של מוצר בשעה, והטיפול הראשוני
בה נמשך $\frac{1}{2}$ שעה.

- (א) רשום פונקציות המתאימות לזמן (בשעות) את מספר יחידות
המוצר שמספיקה כל מכונה.
(ב) שרטט את גרף הפונקציות.
(ג) עבור איזו כמות של יחידות מוצר כדאי להפעיל את המכונה
הראשונה?

מבחר תשובות

1. (א) אמת (ב) אמת (ג) שקר (ד) אמת (ה) שקר (ו) אמת

(ז) אמת (ח) שקר (ט) אי אפשר לדעת (י) שקר (יא) אי אפשר לדעת

2. (א) $y = 1.5x - 0.5$ (ב) $y = -2$ (ג) $y = -2\frac{1}{3}$

(ד) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ (ה) $y = 9x - 3$ (ו) $y = x + 0.5$

(ז) $y = -x - 1$ (ח) $y = -2x + 2$ (ט) $y = -\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}$

(י) $y = 0.5x$ (יא) $y = 2x - \frac{2}{3}$ (יב) אין.

3. (א) $y = 3,000x + 12,000$

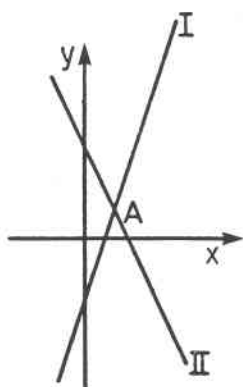
4. (א) $y = -150x + 2,800$ (ג) 18 דקות ו-40 שניות.

5. (א) $y = 20x + 20$ (ג) 50°C (ד) 10:00

6. (א) $f(x) = \frac{1}{3}x + 91$ (ג) $(-273, 0)$ (ד) $g(x) = 3x - 273$

7. (ה) ii $y = \begin{cases} 5x & 0 \leq x \leq 20 \\ 120 - x & 20 < x < 120 \end{cases}$

תרגילים לסיכום הפרק



1. לפניך שרטוט הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = -2x + 3$$

$$g(x) = 3x - 2$$

(א) מהו הגרף המתאים לכל פונקציה? נמק.

(ב) באיזה תחום הפונקציה f חיובית?

(ג) באיזה תחום הפונקציה g חיובית?

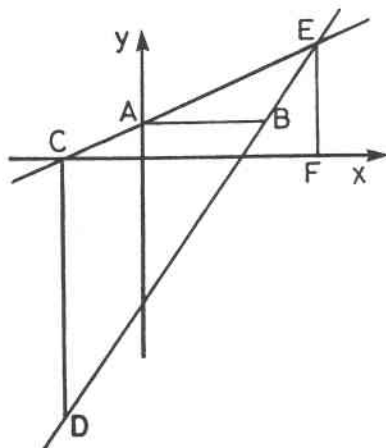
(ד) מהו המקור עבורו נקבל אותה תמונה משתי הפונקציות?

(ה) מצא את שיעורי הנקודה A .

(ו) מצא תחום בו $f(x) > g(x) > 0$

(ז) מצא תחום בו $g(x) > f(x) > 0$

(ח) מצא תחום בו $g(x) > 0 > f(x)$



2. לפניך שרטוט הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = 1.5x - 5$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

הקטעים AB , CD ו- EF מקבילים לצירים.

מצא את אורכם.

3. נתונות שתי פונקציות קוויות f ו- g .

ידוע כי $f(3) = g(3)$, $f(5) > g(5)$.

מהו התחום עבורו $f(x) < g(x)$ לכל x בתחום?

4. נתונות הפונקציות הבאות:

$$y = -x + 1, y = -x + 4, y = 2x - 6, y = 2x + 4$$

הגרפים של הפונקציות כולאים מקבילית.

(א) מצא את שיעורי הקודקודים של המקבילית.

(ב) מצא תבניות לפונקציות המתאימות לאלכסוני המקבילית.

5. הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$h(x) = -x + 5, g(x) = 3x - 7, f(x) = 3x + 5$$

הם ישרים אשר עליהם מונחות שלוש צלעות של מקבילית. הנקודה $A(-1, 2)$ היא אחד מקודקודי המקבילית.

(א) מצא באופן אלגברי על איזו צלע נמצאת הנקודה A .

(ב) מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע הרביעית.

(ג) מצא את שיעורי שאר הקודקודים של המקבילית.

6. שלוש הנקודות: $A(0, 0)$, $B(1, 2)$, $C(3, 1)$

הן שלושה קודקודים של מקבילית.

מצא בדרך אלגברית את הקודקוד הרביעי של המקבילית.

שים לב: יש שלושה פתרונות.

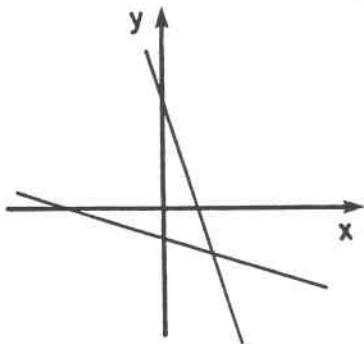
7. לפניך שרטוט הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = -3x + 3$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

כל גרף יוצר עם הצירים משולש ישר זווית.

הוכח כי שני המשולשים הנוצרים, חופפים.



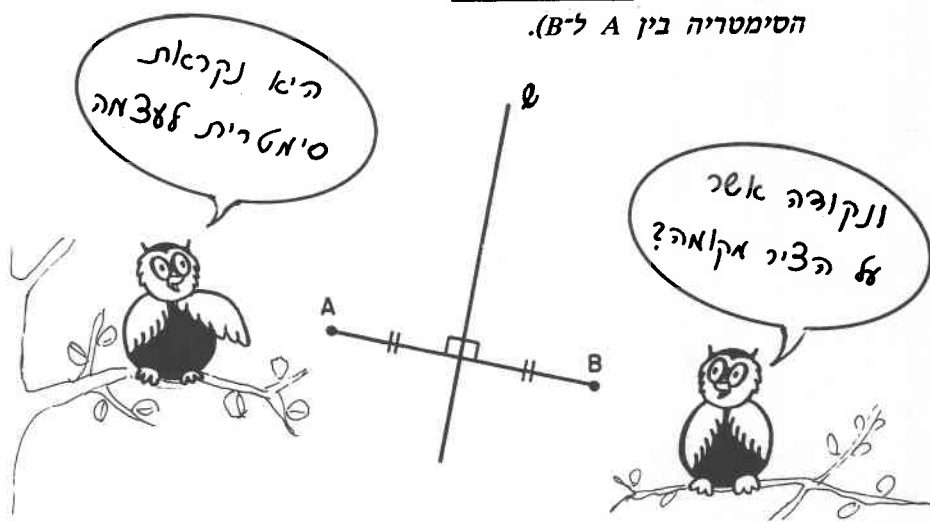
פרק ד: הפונקציה הריבועית

תכונות נוספות של פונקציה

סימטריה

הגדרה:

שתי נקודות A ו-B נקראות נקודות סימטריות לגבי ישר l, אם l הינו האנך האמצעי של הקטע AB. הישר l נקרא ציר הסימטריה של AB (או ציר הסימטריה בין A ל-B).



1. (א) סמן את נקודה A (-2, 5) במערכת צירים.

(ב) סמן נקודה B, סימטרית ל-A לגבי הישר $x = 1$

(ג) סמן נקודה C, סימטרית ל-B לגבי הישר $y = 1$

(ד) סמן נקודה D, סימטרית ל-C לגבי הישר $x = 2$

(ה) סמן נקודה E, סימטרית ל-D לגבי הישר $y = -1\frac{1}{2}$

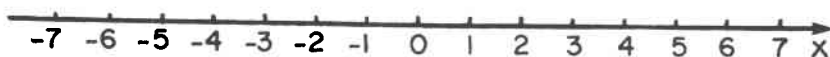
אם לא טעית תמצא כי E היא ראשית הצירים.

2. (א) סמן במערכת צירים את הנקודות $B(5, 4)$, $A(3, 4)$, שרטט את ציר הסימטריה של AB . מה משוואתו?

(ב) סמן באותה במערכת צירים את הנקודות $C(-1, -2)$, $D(4, -2)$. שרטט את ציר הסימטריה של CD . מה משוואתו?

(ג) סמן במערכת הצירים את הנקודה $E(-1, 4)$. שרטט את ציר הסימטריה של CE . מה משוואתו?

3. לפניך ציר מספרים.



מצא את שיעור נקודת האמצע בין כל זוג נקודות.

(א) $2, 6$ (ג) $-25, 3$

(ב) $-9, -4$ (ד) a, b

4. נתונות שתי נקודות $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$

מהי משוואת ציר הסימטריה של AB ?

שים לב! ל- A ו ל- B יש אותו שיעור y .



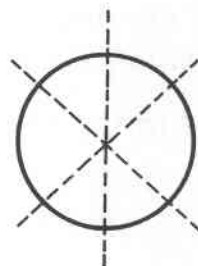
הגדרה:

קו נקרא סימטרי לגבי הישר d , אם עובר כל נקודה הנמצאת על הקו, הנקודה הסימטרית לה לגבי d , נמצאת גם היא על הקו.

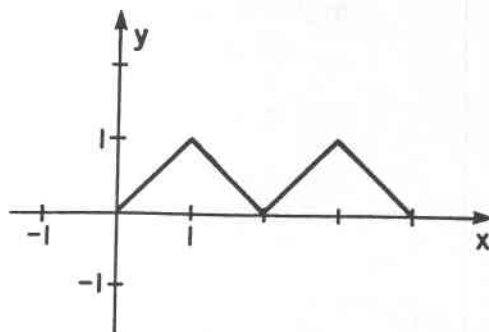
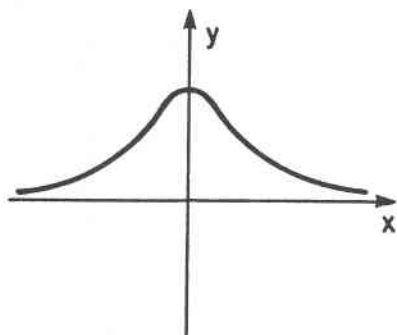
לדוגמא:

לעומת זאת, חצי מעגל הינו סימטרי לגבי ישר אחד בלבד.

מעגל הינו סימטרי לגבי כל ישר העובר דרך מרכז המעגל.



5. (א) מהם משוואות צירי הסימטריה של הגרפים הבאים:



(ב) f היא פונקציה שהגרף שלה סימטרי לגבי ישר מקביל לציר ה- y . נכון או לא נכון?

- לכל נקודה על הגרף של f (שאינה על ציר הסימטריה) יש נקודה נוספת על הגרף בעלת אותו שיעור y .

- כל שתי נקודות על הגרף בעלות אותו שיעור y הן סימטריות לגבי ציר הסימטריה של גרף הפונקציה.

6. לגרף הפונקציה $f(x) = (7 - x)(x + 3)$ יש ציר סימטריה מקביל לציר ה- y ומשוואתו $x = 2$.

(א) הנקודות $A(3, 24)$ ו- B הן שתי נקודות סימטריות על הגרף של f . מצא את שיעורי הנקודה B .

(ב) הנקודה C על הגרף של f מרוחקת 6 יחידות מציר הסימטריה ונמצאת משמאלו. הנקודה D סימטרית ל- C ונמצאת מימין לציר הסימטריה. מהם שיעורי הנקודות C ו- D ?

(ג) עבור שתי הנקודות E ו- F על הגרף של f מתקיים $f(x) = 0$. מצא את שיעוריהן. האם הן נקודות סימטריות לגבי הישר $x = 2$?

(ד) מצא את שיעורי הנקודה K על הגרף של f שעבורה $x = 2$. מהם שיעורי הנקודה הסימטרית ל- K ?

אם גרף סימטרי לגבי ישר מהמשפחה $x = a$, אז לכל נקודה $A(x_1, y_1)$ על הגרף (שאינה על ציר הסימטריה) יש נקודה נוספת $B(x_2, y_1)$ על הגרף. כלומר: לשתי נקודות סימטריות על הגרף יש אותו שיעור y .

משוואת ציר הסימטריה שבין כל שתי נקודות כאלה היא:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

וזוהי גם משוואת ציר הסימטריה של הגרף.

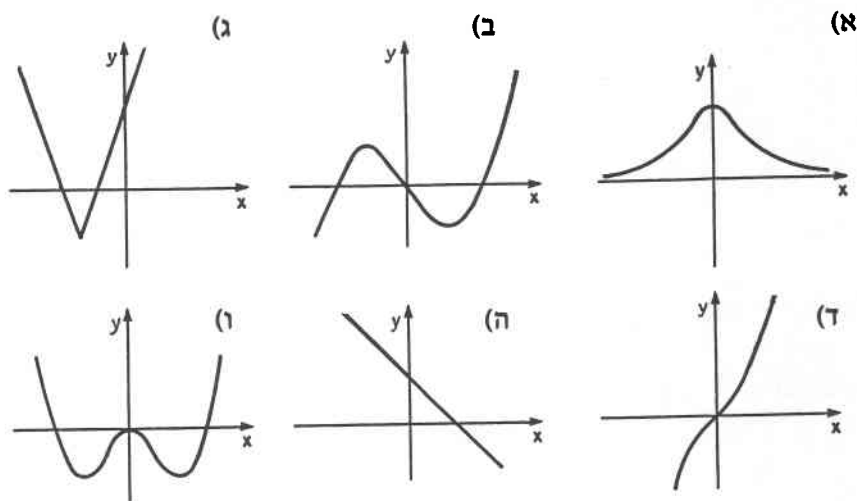
7. ציר ה- y הוא ציר הסימטריה של גרף הפונקציה $g(x) = |x^2 - 10|$.

(א) מצא שני זוגות של נקודות סימטריות על גרף הפונקציה.

(ב) עבור שתי נקודות A ו- B אשר נמצאות על הגרף של g מתקיים $g(x) = 6$ האם A ו- B הן נקודות סימטריות לגבי ציר ה- y ?

נקודות קיצון

8. לפניך מספר גרפים של פונקציות שתחומן R .



לאילו מהגרפים יש נקודה הכי "נמוכה" על הגרף (נקודת מינימום)?
ולאילו יש נקודה הכי "גבוהה" על הגרף (נקודת מקסימום)?

9. השלם את ההגדרה:

$K(x_k, y_k)$ על גרף של פונקציה נקראת נקודת מינימום, אם לכל נקודה (x, y) השייכת לגרף הפונקציה, מתקיים אי השוויון $_____ \geq _____$ (כלומר, y_k היא התמונה הקטנה ביותר בפונקציה), והיא נקראת נקודת מקסימום אם מתקיים $_____ \leq _____$

נקודה אשר היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום נקראת גם נקודת קיצון.

שים לב!

בלימודיך הבאים גם נקודות המפנה בגרף (ב) וגם ראשית הצירים בגרף (ו) תקראנה נקודות קיצון.

בשלב זה אנו קוראים נקודות קיצון רק לנקודות שהן מינימום או מקסימום.

נקודות או תכונות?

נתונה פונקציה בצורתה האלגברית. כיצד נוכל למצוא את גרף הפונקציה?

בפרק הקודם ראינו כי כדי לשרטט גרף של פונקציה לינארית מהצורה $y = ax + b$ מספיקות שתי נקודות שעל הגרף.

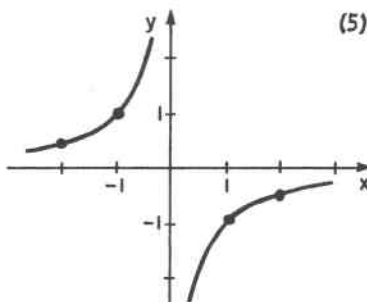
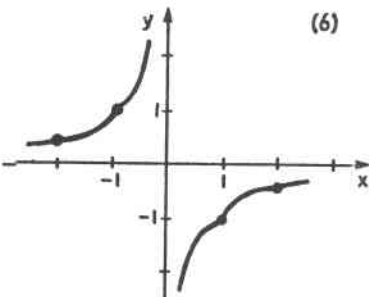
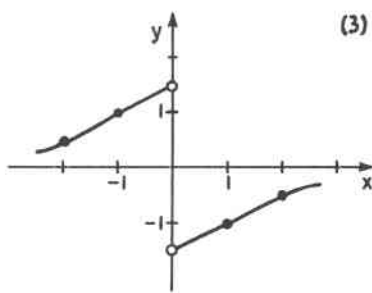
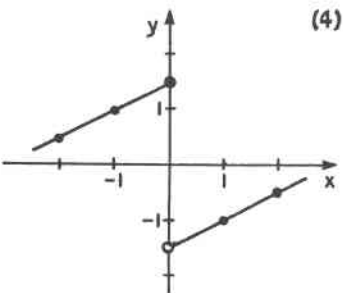
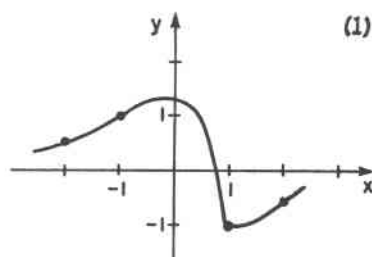
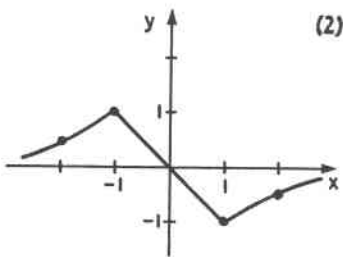
מה לגבי פונקציות אחרות שאינן לינאריות?

10. ניקח לדוגמא פונקציה שחוק ההתאמה שלה $f(x) = -\frac{1}{x}$.

(א) השלם ע"י הצבה:

$D(2, \text{---})$, $C(1, \text{---})$, $B(-1, \text{---})$, $A(-2, \text{---})$

ששת הגרפים הבאים עוברים דרך הנקודות A, B, C, D (בדוק).



(ב) התחום של f הוא הגדול ביותר, האפשרי. מהו תחום זה?

(ג) השתמש בתשובתך ל' (ב) כדי להחליט אלו מבין ששת הגרפים אינם מתארים את הפונקציה f .

(ד) אם ידוע לך כי גרף הפונקציה $y = -\frac{1}{x}$ סימטרי לגבי $y = x$, אילו מבין הגרפים שנשארו (אחרי ג) אינם מתארים את גרף הפונקציה?

בתרגיל הקודם ראינו כי בדרך כלל קשה לקבוע מהו הגרף האופיני של פונקציה על-ידי בחירת ערכים מקריים. כמו כן ראינו כי מידע על תכונות הפונקציה עוזר לקבוע את צורת הגרף.

נחפש, אם כן, דרכים אשר לפיהן אפשר לגלות את צורת הגרף של פונקציה על-ידי חקירת ההצגה האלגברית שלה.

11. נתון חוק ההתאמה: $g(x) = |x - 3|$

(א) תחום הפונקציה g הוא הגדול ביותר האפשרי. מהו?

(ב) $g(x) = 1$. מהו x ?

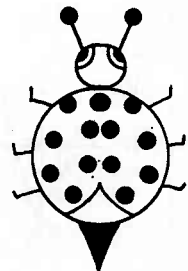
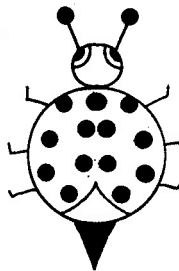
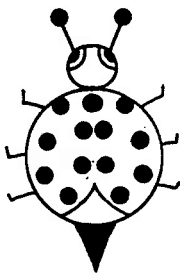
(ג) מצא שני מקורות נוספים שיש להם תמונות שוות.

(ד) ל- g יש נקודת מינימום. מצא אותה.

(ה) האם לדעתך יש לפונקציה ציר סימטריה? נמק.

(ו) באילו נקודות חותכת הפונקציה את הצירים?

(ז) השתמש בממצאך מ' (א) - (ו) וללא הצבת נקודות נוספות, תאר בגרף את הפונקציה g .



12. נתונה הפונקציה $g(x) = 3x^3 - 3$ שתחומה R .

(א) הראה כי לכל תמונה בפונקציה יש מקור יחיד.

הוכחה: (בדרך השלילה).

נניח כי ישנה תמונה y_1 שיש לה שני מקורות שונים x_1 ו- x_2 .

$$\text{לכן: } y_1 = 3x_1^3 - 3$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 3x_2^3 - 3$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

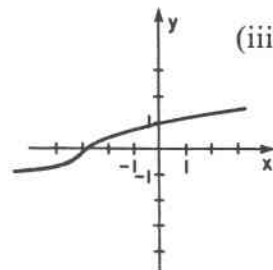
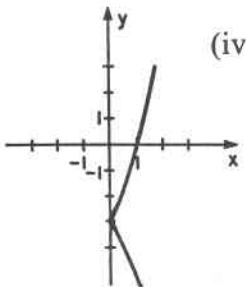
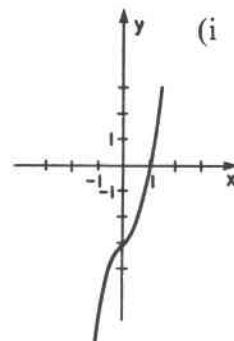
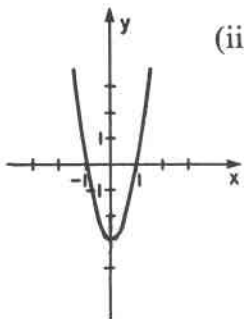
$$x_1 = x_2$$

(ב) האם ל g יש נקודת קיצון? נמק.

(ג) האם ל- g יש ציר סימטריה מהמשפחה $x = a$? נמק.

(ד) מצא את נקודות החיתוך של הגרף של g עם הצירים.

(ה) אילו מבין הגרפים הבאים אינם מתאימים להיות הגרף של g ? נמק, ללא חישובים נוספים.



תרגילים

סימטריה

1. (א) מצא את משוואת ציר הסימטריה שבין שתי הנקודות:

$$(2, 1) \text{ ו- } (-3, 2)$$

(ב) נתונות שתי נקודות בעלות אותו שיעור x :

$$D(x_1, y_2) \quad C(x_1, y_1)$$

מהי משוואת ציר הסימטריה של CD ?

2. שתי נקודות $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_1)$ סימטריות לגבי הישר $x = 7$.

(א) אם $x_1 = 2$, מהו x_2 ?

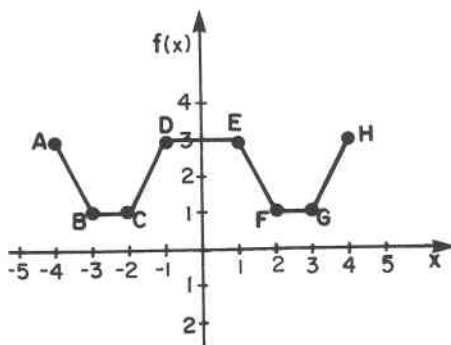
(ב) אם $x_1 = -3$, מהו x_2 ?

(ג) אם $x_1 = a$, מהו x_2 ?

(ד) אם $x_1 = 7$, מהו x_2 ?

3. (א) האם ישר מקביל לציר ה- x ($y = a$), יכול להיות ציר סימטריה לגרף של פונקציה? נמק, או הבא דוגמא.

(ב) האם ישר מקביל לציר ה- y ($x = b$), יכול להיות ציר סימטריה לגרף של פונקציה? נמק, או הבא דוגמא.



4. לפניך גרף סימטרי.

(א) מהי משוואת ציר הסימטריה?

(ב) מצא זוגות של נקודות סימטריות ורשום את שעוריהן.

5. לגרף הפונקציה $f(x) = |2x - 6|$ יש ציר סימטריה מקביל לציר y ומשוואתו $x = 3$.

(א) הנקודות $A(1, 4)$ ו- B הן שתי נקודות סימטריות על הגרף של f . מצא את שיעורי הנקודה B .

(ב) הנקודה C שעל הגרף של f מרוחקת 3 יחידות מציר הסימטריה. נמצאת מימינו. הנקודה D הסימטרית ל- C נמצאת משמאל לציר הסימטריה. מהם שיעורי הנקודות C ו- D ?

(ג) עבור שתי הנקודות E ו- F אשר נמצאות על הגרף של f מתקיים $f(x) = 2$.

האם הן נקודות סימטריות לגבי הישר $x = 3$?

(ד) מצא את שיעורי הנקודה K על הגרף של f שעבורה $x = 3$. האם ל- K יש נקודה סימטרית לה על הגרף?

פסק זמן

(ד) אמר a : אם כפולתנו נשריש, $(\sqrt{ab})$ תכף נצא מאותו עסק ביש. צעק b : מה אתך, מה פתאום? ברור שצריך לחצות את הסכום.

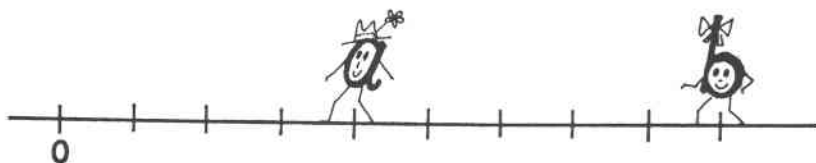
(ה) a ו- b זמן רב התווכחו, וכמעט על הפגישה ויתרו. וכדי למנוע סכסוך מוחלט אולי אתם תעזרו להם קצת?

(ו) האם יתכן כי מקום המפגש יהיה לפי שתי השיטות לפעמים זהה? ואם לא, האם תמיד אחד מן השניים יפסיד?

(א) שני מספרים טבעיים מוכרים a ו- b אשר על ציר המספרים, a אל האפס קרוב יותר ומימין ל- a , b מתגורר).

(ב) רצו להגיע לנקודת מפגש כדי לשוחח ולספר מה חדש, ואף אחד לא רצה ללכת יותר ואחד מהם לא רצה לוותר.

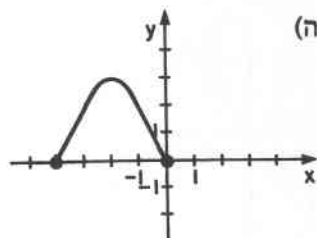
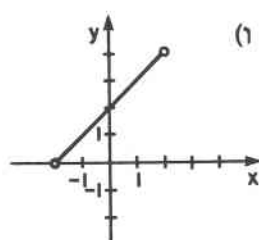
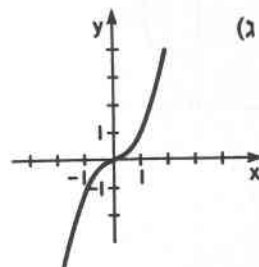
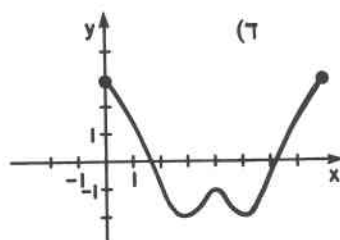
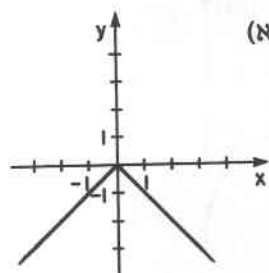
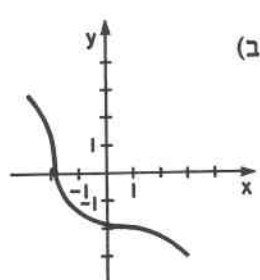
(ג) החליטו מיד ובלי פקפוק, ללכת אותו המרחק בדיוק. אבל הם כבר מזמן שכחו איך את נקודת המפגש יחשבו.



6. קפל דף מלבני לאורך. גזור מן הדף ליד קו הקיפול צורות כך שאחרי פתיחת הדף יתגלו "חורים" בצורות הבאות: מלבן, משולש, דלתון, טרפז, מחומש ומשושה.
מה משותף לכל הצורות שנוצרו?

7. כמה צירי סימטריה יש לריבוע? למחומש משוכלל?
למצולע משוכלל בעל n צלעות?

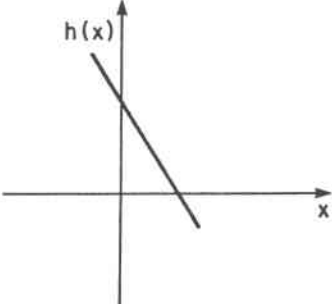
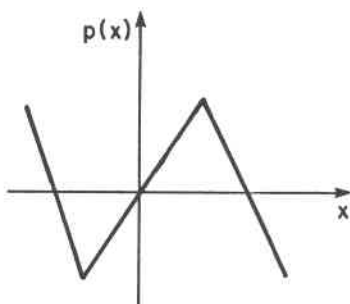
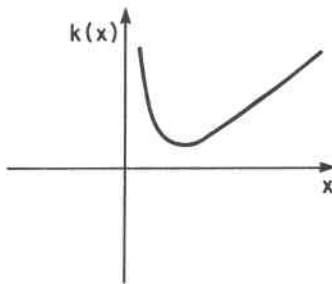
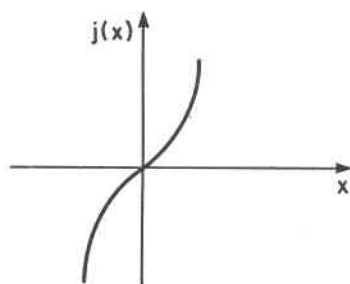
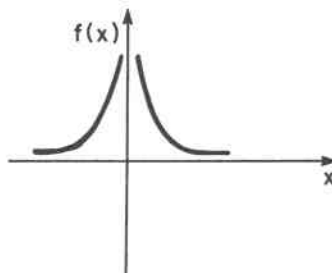
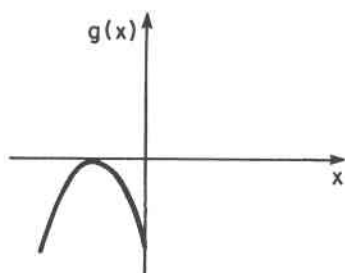
8. רשום את משוואת ציר הסימטריה של כל אחד מהגרפים הבאים, אם הוא קיים.



נקודות קיצון

9. לפניך מספר תכונות של פונקציות ומספר גרפים של פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$. מצא אילו תכונות מקיימת כל פונקציה או הגרף שלה.

- (א) יש לפונקציה נקודת קיצון (מינימום או מקסימום).
 (ב) לכל תמונה (או כמעט לכל תמונה) יש שני מקורות.
 (ג) גרף הפונקציה סימטרי לגבי ציר ה- y או לגבי ישר מקביל לציר ה- y .
 (ד) יש לפונקציה נקודות אפס.
 (ה) הפונקציה חיובית בכל תחומה.



נקודות או תכונות?

10. נתונות הפונקציות הבאות:

$$h(x) = \frac{6}{x} \quad k(x) = x^4 - 1 \quad g(x) = 2x + 3 \quad f(x) = |x|$$

(א) באילו מן הפונקציות יש לכל תמונה מקור יחיד? הוכח
(בדרך השלילה) או הבא דוגמא נגדית.

(ב) לאילו יש נקודת קיצון ומהי? נמק.

הערה: התרגילים 11-16 הם תרגילי הכנה להמשך הלימוד.

11. פרק לגורמים.

$$81a^2 - 16b^2 \quad (א) \quad m^2 - n^2$$

$$3a^2 - 3b^2 \quad (ב) \quad 8x - 8y$$

12. פ פ ש ט:

$$x \neq y \quad \frac{5x - 5y}{x - y} \quad (א)$$

$$m \neq n \quad \frac{m^2 - n^2}{m - n} \quad (ב)$$

13. פתור את תבניות הפסוק הבאות:

$$6x^2 + 3x = 0 \quad (א) \quad x(x - 2) = 0$$

$$(x - 3)(x - 1) = 0 \quad (ב) \quad 3x(x + 4) = 0$$

$$(x + 2)(2x - 8) = 0 \quad (ג) \quad x^2 - 5x = 0$$

14. פתור את התבניות הפסוק הבאות:

הדרכה: גרום לאגף ימין להתאפס, והמשך כמו בתרגיל הקודם.

$$x^2 + 7x + 3 = 3 \quad (\text{א})$$

$$(x + 3)(x + 2) = 6 \quad (\text{ב})$$

$$(x - 4)(x + 1) = -4 \quad (\text{ג})$$

15. פרק לגורמים:

$$(x + 3)(x - 3) + 5(x - 3) = \quad \text{דוגמא:}$$

$$(x - 3) [(x + 3) + 5] = (x - 3)(x + 8)$$

$$(x - m)(x + m) + 2(x + m) \quad (\text{א})$$

$$x^2 - a^2 - 7(x - a) \quad (\text{ב})$$

$$x^2 - b^2 + 2x - 2b \quad (\text{ג})$$

$$x^2 - c^2 - 3x + 3c \quad (\text{ד})$$

16. פתור את תבניות הפסוק (a ו-b פרמטרים)

$$(x + m)(x - m) + 3(x - m) = 0 \quad \text{דוגמא:}$$

$$(x - m) [(x + m) + 3] = 0$$

$$x - m = 0 \quad \text{או} \quad x + m + 3 = 0$$

$$x = m \quad \text{או} \quad x = -m - 3$$

$$x^2 - a^2 - 6(x + a) = 0 \quad (\text{א})$$

$$x^2 - b^2 = 3x + 3b \quad (\text{ב})$$

$$x^2 - 5m = m^2 - 5x \quad (\text{ג})$$

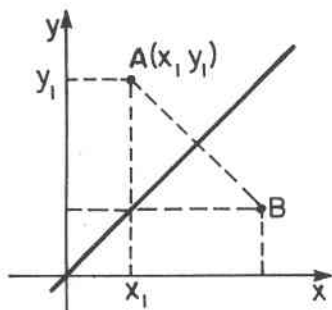
סמית ע"ס:

סימטריה קווית
נקודות קיצון





חקור וגלה



17. גרף סימטרי לגבי הישר $y = x$

I. הנקודה B סימטרית לנקודה

$A(x_1, y_1)$ לגבי הישר

שמשוואתו $y = x$.

(א) בטא את שיעורי הנקודה B

בעזרת x_1 ו y_1 .

(ב) שרטט שלוש פונקציות לינאריות

שהגרף שלהן סימטרי לגבי $y = x$.

(ג) מצא את משפחת הפונקציות הלינאריות שהגרף שלהן סימטרי

לגבי הישר $y = x$.

II. נתונה פונקציה $f: E \rightarrow F$.

(E הוא תחום הפונקציה ו F קבוצת התמונות).

גרף הפונקציה f סימטרי לגבי הישר $y = x$.

זכור לנו מהתרגיל הקודם כי אם הנקודה (x_1, y_1) נמצאת על גרף

הפונקציה, אז גם (y_1, x_1) נמצאת על גרף הפונקציה.

השתמש בתוצאה זו כדי לענות על שלוש השאלות הבאות:

(א) נתון כי $y_1 = f(x_1)$. מה תוכל לומר על $f(y_1)$?

(ב) האם יתכן שלשני מקורות שונים תתאים תמונה אחת?

(ג) מה תוכל לומר על E ו F?

III. ראינו בתרגיל הקודם כי אם גרף של פונקציה סימטרי לגבי הישר

$y = x$, אז:

$$f(x) = y \text{ כאשר } f(y) = x$$

בחר מבין הפונקציות הבאות את אלה שהגרף שלהן סימטרי לגבי הישר $y = x$. (תחום הפונקציות הוא התחום הגדול ביותר האפשרי).

$$(א) f(x) = x^2 \quad (ב) g(x) = \frac{1}{x} \quad (ג) h(x) = \frac{2x}{x-2}$$

מבחן תשובות

1. א) $y = -1$ ב) $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

2. א) 12 ב) 17 ג) $14 - a$ ד) 7

3. א) לא ב) כן

5. א) $B(5, 4)$ ב) $C(6, 6)$ ד) $D(0, 6)$

8. א) $x = 0$ ב) $y = x$ ד) $x = 4$ ה) $x = -2$

ו) $y = \pm x + 2$

9. א) k, g ב) k, g, f ג) g, f ד) p, h, j, g ה) k, f

10. א) h, g ב) k, f

11. א) $(m + n)(m - n)$ ד) $3(a + b)(a - b)$

12. א) 5 ב) $m + n$

13. א) $\{0, 2\}$ ב) $\{0, -4\}$ ג) $\{0, 5\}$ ד) $\{0, -\frac{1}{2}\}$ ה) $\{1, 3\}$ ו) $\{-2, 4\}$

14. א) $\{0, -7\}$ ב) $\{0, -5\}$ ג) $\{0, 3\}$

15. א) $(x + m)(x - m + 2)$ ב) $(x - a)(x + a - 7)$

ג) $(x - b)(x + b + 2)$ ד) $(x - c)(x + c - 3)$

16. א) $x = -a$ או $x = a + 6$ ב) $x = b + 3$ או $x = -b$

ג) $x = -m - 5$ או $x = m$

שלב I: כמה מקורות לכל תמונה?

מקרה פרטי

הגדרה:

פונקציה ריבועית היא פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
מהמשפחה $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

1. סמן את הפונקציות הריבועיות מבין הפונקציות הבאות ורשום מהו a מהו b ומהו c בכל מקרה?

$$f(x) = x(x - 2) \quad (\text{ד}) \qquad f(x) = x^2 - 2x + 5 \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (\text{ה}) \qquad f(x) = x - 2 \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = 5 - 2x^2 \quad (\text{ג})$$

מטרתנו, בשלבים הבאים של פרק זה, היא לחקור ולגלות את תכונות הפונקציה הריבועית והגרף שלה. נקודת המוצא היא התבנית $f(x) = ax^2 + bx + c$.

יוצאים מההנחה (שאיננו יכולים להוכיחה בשלב זה) כי גרף הפונקציה הריבועית הוא רציף, כלומר אפשר לשרטט אותו בלא להרים את העפרון מן הדף.

2. נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(א) $f(x) = 3$ מהו x ? הדרכה: פשט ופרק לגורמים, האם לכל תמונה יש מקור יחיד? נמק.

(ב) האם יתכן כי f היא פונקציה עולה?

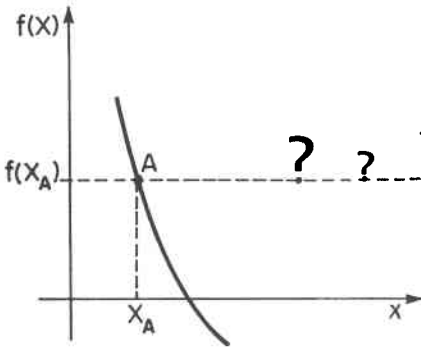
(ג) האם יתכן כי לגרף של f יש ציר סימטריה?

(ד) האם יתכן כי ל- f יש נקודת קיצון?

3. נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (משאלה 2).

$$f(0) = 3 \text{ כבר כי}$$

$$f(4) = 3 \text{ וגם}$$



ננסה לבדוק אם יש תמונות נוספות שיש להן יותר ממקור אחד

נבחר נקודה כלשהי A על גרף הפונקציה.

נסמן את המקור ש-A מייצגת ב- x_A

ואת התמונה ב- $f(x_A)$.

נבדוק, באופן אלגברי, אם לתמונה $f(x_A)$

יש מקורות נוספים.

באופן גרפי הבדיקה תברר, אם

הישר העובר דרך A והמקביל

לציר ה-x, חותך את גרף

הפונקציה יותר מפעם אחת.

(א) השלם: $f(x_A)$ תמונה של x_A בפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$f(x_A) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ לכן:}$$

נחפש x-ים נוספים אשר $f(x_A)$ תמונה שלהם

$$\underline{\hspace{2cm}} = x^2 - 4x + 3 \text{ כלומר:}$$

$$x^2 - 4x + 3 = x_A^2 - 4x_A + 3 \text{ מכאן:}$$

$$x^2 - x_A^2 - 4x + 4x_A = 0$$

(ב) פרק לגורמים והראה כי פתרון המשוואה הוא:

$$x = x_A \quad \text{או} \quad x = 4 - x_A$$

מצאנו כי הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ מקיימת את התכונה הבאה:
 אם A נקודה על גרף הפונקציה f, אז לתמונה $f(x_A)$ יש מקור פרט ל- x_A
 והוא $x_A - 4$.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ (מהשאלה הקודמת)

(א) $f(5) = 8$. בדוק!

(ב) השלם: הנקודה $A(5, \underline{\quad})$ נמצאת על גרף הפונקציה f.

- סמן את הנקודה A במערכת צירים.

(ג) לתמונה 8 יש מקור נוסף פרט ל-5. מהו?

הדרכה: העזר בתכונה שמצאנו לגבי הפונקציה.

(ד) השלם:

הנקודה $B(\underline{\quad}, 8)$ (השונה מ-A) נמצאת על גרף הפונקציה f.

- בדוק על ידי הצבה.

- סמן את הנקודה B במערכת הצירים ששרטטת.

(ה) העבר דרך A ישר מקביל לציר ה-x.

האם הנקודה B נמצאת עליו? נמק.

(ו) האם לתמונה 8 יש מקורות נוספים פרט ל-5 ול-1?

(ז) כמה נקודות חיתוך יש לישר העובר דרך A ומקביל לציר ה-x עם גרף הפונקציה f?

(ח) מצא זוג נוסף של מקורות שיש להם תמונות שוות.

הדרכה: העזר בתכונה שמצאנו לגבי הפונקציה

- כמה זוגות כאלה תוכל למצוא?

המשך



(ט) יש נקודה K על גרף הפונקציה עבורה $x_K = 4 - x_K$.
מצא את שיעוריה.

(י) כמה מקורות יש ל- $f(x_K)$?

(יא) כמה נקודות מפגש יש לישר העובר דרך K ומקביל לציר ה- x , עם
גרף הפונקציה f ?

(יב) התוכל למצוא תמונה נוספת שיש לה מקור יחיד?

(יג) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה f .

הדרכה: אל תציב נקודות נוספות, השתמש בממצאך מהסעיפים
הקודמים.

ראינו כי הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ מקיימת את
התכונה האלגברית הבאה:

- יש רק תמונה אחת ב- f שיש לה מקור יחיד.

לכל שאר התמונות של f יש שני מקורות

$$x_A \text{ ו- } x_B \text{ כך שמתקיים: } x_B = 4 - x_A$$

המשמעות הגרפית של תכונה זו:

- יש רק ישר אחד מהמקבילים לציר ה- x , אשר פוגש

את גרף הפונקציה פעם אחת בלבד. לכל שאר הישרים

המקבילים לציר ה- x אשר חותכים את גרף הפונקציה,

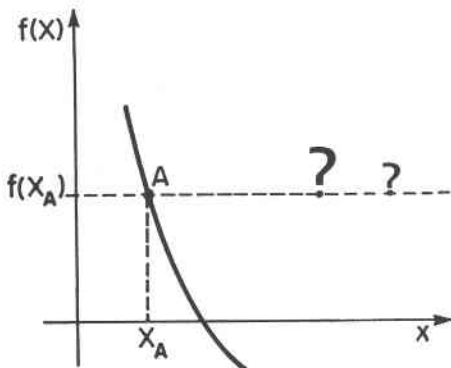
יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה.

המקרה הכללי

בתרגיל הבא נרצה לברר אם התכונות שמצאנו לגבי הפונקציה הריבועית $y = x^2 - 4x + 3$ קיימות בכל פונקציה ריבועית.

5. נתון חוק התאמה $f(x) = ax^2 + bx + c$ של פונקציה ריבועית כלשהי

(א) נבחר נקודה כלשהי $A[x_A, f(x_A)]$ על גרף הפונקציה ונבדוק אם יש ל- $f(x_A)$ יותר ממקור אחד.



השלם:

x_A תמונת $f(x_A)$

לכן: $f(x_A) = \underline{\hspace{2cm}}$

נחפש x 'ים נוספים אשר $f(x_A)$ תמונה שלהם

לכן: $f(x_A) = \underline{\hspace{2cm}}$

$$ax^2 + bx + c = ax_A^2 + bx_A + c \quad \text{מכאן:}$$

$$ax^2 - ax_A^2 + bx - bx_A = 0$$

$$a(\quad) + b(\quad) = 0$$

(ב) הראה (עלידי פירוק לגורמים) כי פתרון המשוואה הוא:

$$x = x_A \quad \text{או} \quad x = -\frac{b}{a} - x_A$$

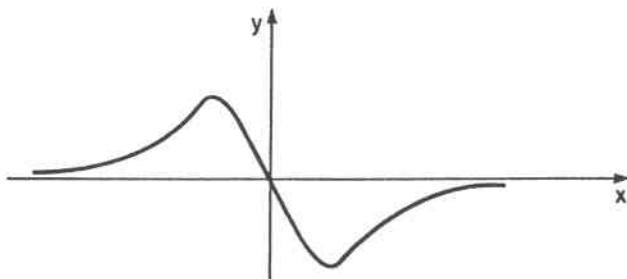
(ג) האם יש במשפחת הפונקציות הריבועיות פונקציה שבה לכל תמונה יש מקור יחיד?

לכמה תמונות יש יותר ממקור אחד בכל פונקציה ריבועית?

(ד) מצא מקור (הבע אותו באמצעות a ו- b) אשר לתמונתו אין מקור נוסף שונה ממנו. (רמז: $x = x_A$ לגבי שני הפתרונות).

(ה) כמה מקורות יש לכל תמונה בפונקציה ריבועית כלשהי?

6. אילו מן התכונות שידועות לנו עד כה לגבי הפונקציה הריבועית מקיים הגרף הבא? האם הוא יכול לשמש גרף של פונקציה ריבועית? נמק.



מצאנו כי כל פונקציה ריבועית מהצורה $f(x) = ax^2 + bx + c$ מקיימת את התכונה האלגברית הבאה:

יש רק תמונה אחת ב־f שיש לה מקור יחיד והוא $x_k = -\frac{b}{2a}$
 לכל שאר התמונות של f יש שני מקורות x_A ו־ x_B
 שמתקיים: $x_B = -\frac{b}{a} - x_A$

המשמעות הגרפית של תכונה זו:

- יש רק ישר אחד מהמקבילים לציר ה־x אשר פוגש את גרף הפונקציה פעם אחת בלבד. לכל שאר הישרים המקבילים לציר ה־x אשר חותכים את גרף הפונקציה, יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה.

הגדרה:

הנקודה על גרף הפונקציה הריבועית, אשר לתמונה שהיא מייצגת יש מקור יחיד, נקראת נקודת הקודקוד של גרף הפונקציה הריבועית.

★ נסה את כוחך

7. נמק מדוע נקודת הקודקוד חייבת להיות נקודת קיצון של הפונקציה הריבועית.

★ ★

תרגילים

מקרה פרטי

1. סמן את הפונקציות הריבועיות מבין הפונקציות הבאות:
לגבי כל פונקציה ריבועית רשום מהו a מהו b ומהו c ?

$$y = 16 - x^2 \quad (ז) \quad y = 2x - x^2 + 1 \quad (א)$$

$$y = 5x^2 \quad (ח) \quad y = \frac{x^2 + 5x + 2}{x - 5} \quad (ב)$$

$$y = (x + 1)^2 \quad (ט) \quad y = \frac{x^2 + 5x + 2}{5} \quad (ג)$$

$$y = \sqrt{2} x^2 - 3x \quad (י) \quad y = 2x(x - 3) \quad (ד)$$

$$y = (3 - x)^2 + (3 + x)^2 \quad (יא) \quad y = x - 3 \quad (ה)$$

$$y = \frac{x^4 - 4}{x^2 + 2} \quad (יב) \quad y = 2(4 - x)(x + 1) \quad (ו)$$

2. הראה כי כל חוק התאמה מהצורה $y = (px + q)(mx + n)$ כאשר $p \neq 0$ וגם $m \neq 0$ הוא חוק התאמה של פונקציה ריבועית. הבע את a , b ו c באמצעות p , q , m , n .

3. נתונה פונקציה ריבועית $y = x^2 + 8x + 1$

(א) הראה כי הקשר בין כל זוג מקורות x_A ו x_B שיש להם אותה תמונה, הוא $x_B = -8 - x_A$.

הדרכה: העזר בתרגיל 3 א' עמ' 212.

(ב) מצא את התמונות הבאות: $f(3)$, $f(-5)$, $f(-8)$, $f(-12)$

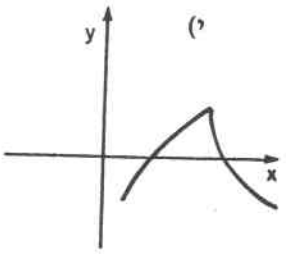
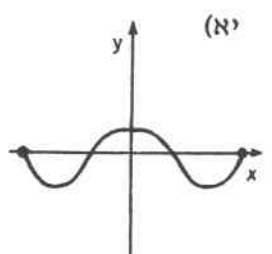
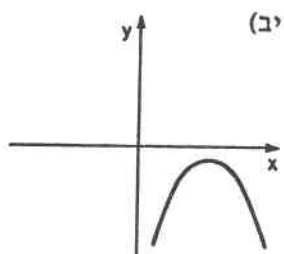
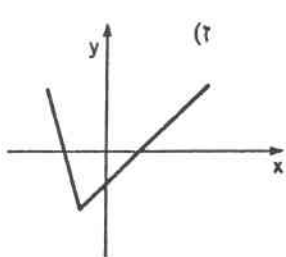
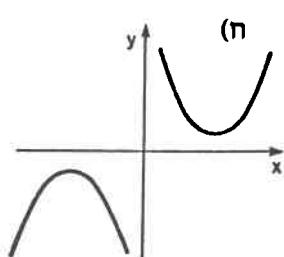
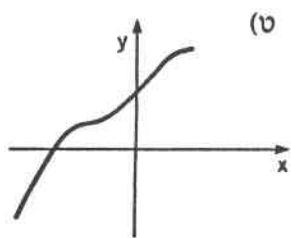
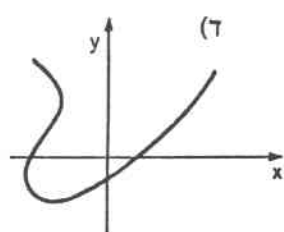
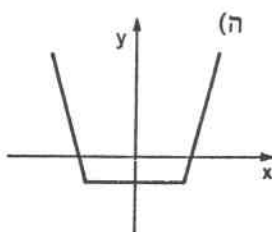
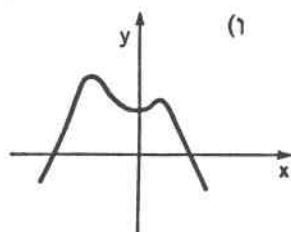
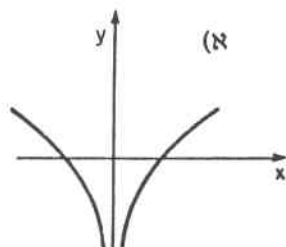
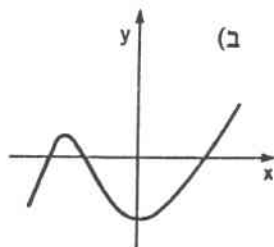
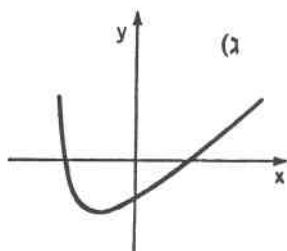
- מצא לכל תמונה מקור נוסף. (בדוק!).

(ג) מצא תמונה שיש לה מקור יחיד.

הדרכה: מצא קודם את המקור.

המקרה הכללי

4. השתמש בתכונות שמצאת לגבי הפונקציה הריבועית ומצא אילו מן הגרפים הבאים אינם יכולים לייצג גרף של פונקציה ריבועית. נמק.



5. 2 היא נקודת אפס של הפונקציה $y = -x^2 + 7x - 10$.

מצא לפונקציה נקודת אפס נוספת. בדוק!

הדרכה: השתמש בקשר $x_B = -\frac{b}{a} - x_A$.

6. נתונה פונקציה ריבועית $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$.

(א) חשב $f(1)$ ומצא מקור נוסף שיש לו אותה תמונה
(בדוק!) $f(1) = f(\quad)$

(ב) השלם על-פי (א) $A(1, \quad)$ $B(\quad, \quad)$ הן שתי נקודות הנמצאות
על הגרף של f ויש להן אותו שיעור y .
שרטט את הנקודות A ו- B במערכת צירים.

(ג) מצא זוג נוסף של נקודות C ו- D הנמצאות על הגרף של f ויש
להן אותו שיעור y . שרטט גם אותן באותה מערכת צירים.

(ד) מצא נקודה F על הגרף שאין לה בת זוג בעלת אותו שיעור y .
שרטט גם אותה במערכת הצירים

(ה) האם יתכן כי ל- f יש ציר סימטריה? נמק.



מבחר תשובות

a	b	c		a	b	c	.1
5	0	0	(ח	-1	2	1	(א
1	2	1	(ט	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	(ג
$\sqrt{2}$	-3	0	(י	2	-6	0	(ד
2	0	18	(יא	-2	6	8	(ו
1	0	-2	(יב	-1	0	16	(ז

$$c = qn \quad b = pn + qm \quad a = pm \quad .2$$

$$f(-5) = -14 = f(-3) \quad f(3) = 34 = f(-11) \quad .3$$

$$.4 \quad \text{א, ב, ד, ה, ו, ח, ט, יא.}$$

$$.5 \quad 5$$

$$.6 \quad \text{א) } f(1) = -1 = f(2)$$

$$\text{ב) } A(1, -1) \quad B(2, -1)$$

$$\text{ד) } E(1.5, -1.5)$$

שלב II: צורת הגרף

ציר סימטריה

1. נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x) = x^2 + 8x + 1$. ונתונות על הגרף שלה שתי נקודות A ו-B בעלות אותו שיעור y.

(א) מהו הקשר בין המקורות x_A ו- x_B ?

(ב) מהי משוואת ציר הסימטריה של הנקודות A ו-B?
(רמז: עמ' 198)

(ג) האם לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 8x + 1$ יש ציר סימטריה? אם כן, כתוב את משוואתו.

לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 + 8x + 1$ יש ציר סימטריה מקביל לציר ה-y. האם הדבר נכון לכל פונקציה ריבועית? נברר שאלה זו בתרגיל הבא.

2. נתון חוק התאמה של פונקציה ריבועית כלשהי:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

מצאנו כי כל שני מקורות בעלי אותה תמונה מקיימים את הקשר

$$x_B = -\frac{b}{a} - x_A$$

(א) מהי משוואת ציר הסימטריה בין שתי נקודות A ו-B שיש להן אותו שיעור y ושיעורי ה-x שלהן x_A ו- x_B ?

(ב) האם לגרף הפונקציה הריבועית יש ציר סימטריה? אם לא, נמק. אם כן, כתוב את משוואתו.

3. מהי משוואת ציר הסימטריה?

(א) $y = 2x^2 + 8x + 3$

(ב) $y = -x^2 + 10x - 2$

4. ענה לשאלות הבאות מבלי לערוך חישובים.

(א) האם תיתכן פונקציה

ריבועית המקיימת:

$$f(0) = f(2)$$

$$f(1) = f(3)$$

נמק.

(ב) האם תיתכן פונקציה ריבועית המקיימת:

$$f(0) = f(2)$$

$$f(-1) = f(3)$$

נמק.

(ג) האם תיתכן פונקציה ריבועית המקיימת:

$$f(0) = f(2) = f(4)$$

נמק.

קודקוד

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$

(א) מהי משוואת ציר הסימטריה של הגרף שלה?

(ב) כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר הסימטריה שלה? נמק.

(ג) מצא את שיעורי נקודת החיתוך K של הגרף עם ציר הסימטריה.

(ד) האם תוכל למצוא מקור נוסף שיש לו אותה תמונה כמו K ? נמק.

6. מצא את שיעורי נקודת הקודקוד של גרף הפונקציה $y = 4x^2 + 2x + 1$

7. מצא באופן כללי את שיעורי הקודקוד של גרף הפונקציה הריבועית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$.

הערה:

למציאת שיעור y של הקודקוד אינך חייב להציב בנוסחה שמצאת. תוכל למצוא אותו גם על ידי הצבה בפונקציה.

8. ענה לשאלות הבאות בלי לערוך חישובים.

האם תתכן פונקציה ריבועית המקיימת:

(א) נקודת הקודקוד $(2, 5)$ $f(4) = f(6) = 3$

$f(3) = f(7) = 1$

נמק.

(ב) נקודת הקודקוד $(3, -1)$. הנקודות $(0, 0)$, $(4, 1)$ נמצאות על גרף הפונקציה. נמק.

9. סמן נכון או לא נכון ונמק.

- (א) יש פונקציה ריבועית שעולה בתחום R .
- (ב) כל פונקציה ריבועית עולה ואחרי-כך יורדת או יורדת ואחרי-כך עולה.
- (ג) גרף הפונקציה הריבועית מורכב משני "ענפים" ההולכים ומתרחקים זה מזה.
- (ד) נקודת הקודקוד שעל הגרף של פונקציה ריבועית היא גם נקודת הקיצון של הפונקציה.
- (ה) לגרף הפונקציה הריבועית יש קטע המקביל לציר ה- x .
- (ו) נקודת הקודקוד של הפונקציה הריבועית משותפת לגרף ולציר הסימטריה שלו.
- (ז) כל פונקציה ריבועית היא חיובית בכל תחומה.
- (ח) הגרף של כל פונקציה ריבועית חותך את ציר ה- y .

- לגרף של פונקציה ריבועית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$

יש ציר סימטריה מהצורה $x = -\frac{b}{2a}$

- נקודת הקודקוד היא נקודת קיצון של גרף הפונקציה הריבועית והיא מחלקת את גרף הפונקציה לשני "ענפים" שהולכים ומתרחקים זה מזה.

- נקודת הקודקוד היא הנקודה היחידה המשותפת לגרף הפונקציה הריבועית ולציר הסימטריה שלו.

שיעוריה הם: $K\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

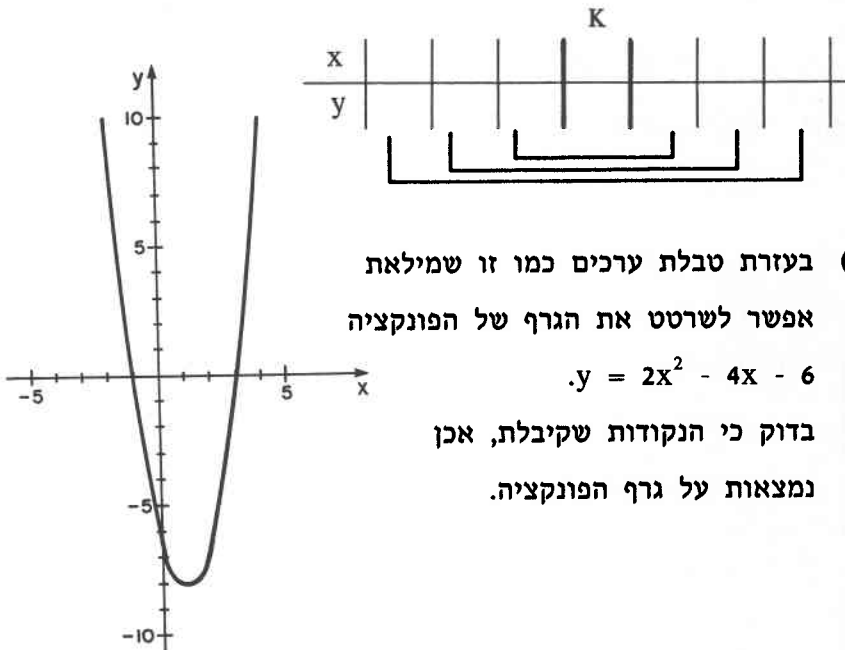
שרטוט הגרף

ניעזר באינפורמציה שמצאנו עד כה על גרף הפונקציה כדי לשרטט את הגרף.

10. נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 - 4x - 6$
נשרטט את הגרף שלה.

(א) השלם את שיעורי נקודת הקודקוד $K(\quad , \quad)$

(ב) בנה טבלת ערכים המורכבת מנקודת הקודקוד ומזוגות של נקודות סימטריות.



(ג) בעזרת טבלת ערכים כמו זו שמילאת אפשר לשרטט את הגרף של הפונקציה

$$y = 2x^2 - 4x - 6$$

בדוק כי הנקודות שקיבלת, אכן נמצאות על גרף הפונקציה.

הגדרה:

גרף של פונקציה ריבועית נקרא פרבולה.

11. נתונה הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 - 4x + 3$

שרטט את גרף הפונקציה, וענה בעזרתו על השאלות הבאות

(א) מהי קבוצת התמונות של הפונקציה?

(ב) עבור איזה x מקבלת הפונקציה ערך קיצוני?

(ג) חשב ערך זה. האם הוא מקסימום או מינימום?

(ד) מהן נקודות האפס של הפונקציה?

(ה) עבור אילו איברים בתחום הפונקציה חיובית?

12. (א) נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 - 5x + 1$

מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y ?

(ב) מצא באופן כללי את שיעורי נקודת החיתוך של פונקציה ריבועית

מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ עם ציר ה- y .

- כדי לשרטט גרף אופיני של פונקציה ריבועית מוצאים

תחילה את ציר הסימטריה ואחר בוחרים נקודות

סימטריות עבור טבלת הערכים.

- נקודת החיתוך של גרף פונקציה מהצורה

$y = ax^2 + bx + c$ עם ציר ה- y היא $(0, c)$



תרגילים

ציר סימטריה

1. פונקציה ריבועית f מקיימת $f(2) = f(4)$
השלם:

(א) $f(1) = f(\quad)$ (ג) $f(-4) = f(\quad)$

(ב) $f(0) = f(\quad)$ (ד) $f(a) = f(\quad)$

(ה) $f(3) = f(\quad)$

2. פונקציה ריבועית מקיימת $f(3) = f(7)$
מהי משוואת ציר הסימטריה שלה?

3. נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 - 8x + 3$

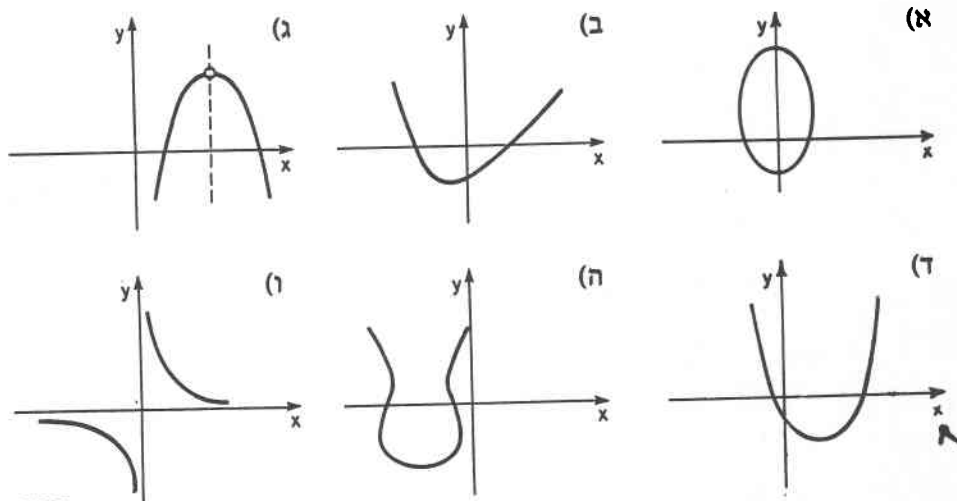
$g(x) = 2 - 2x^2 + 12x$

$h(x) = x^2 + x - 1$

(א) מהי משוואת ציר הסימטריה של כל אחת מהפונקציות.

(ב) מצא זוג נקודות סימטריות על הגרף של כל אחת מהפונקציות.

4. אילו מהגרפים הבאים אינם יכולים לתאר פונקציה ריבועית? נמק.



5. רשום פונקציה ריבועית שציר הסימטריה שלה הוא $x = 3$. כמה פונקציות ריבועיות כאלה תוכל למצוא?

6. נקודות האפס של פונקציה ריבועית הן $x = 1$ ו $x = 3$. מצא את משוואת ציר הסימטריה שלה.

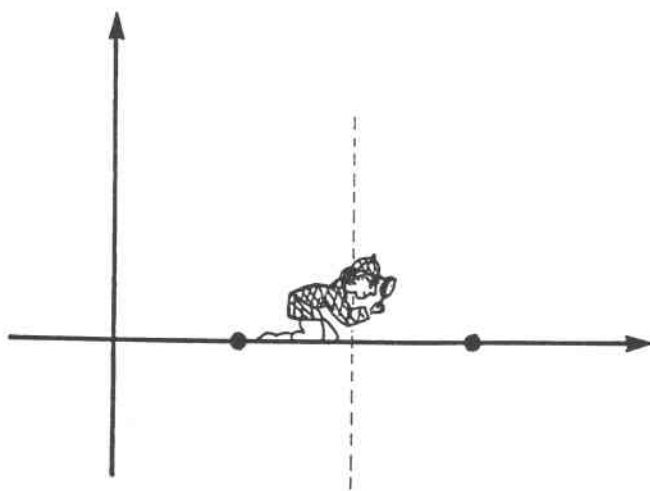
7. מצא את נקודות האפס ואת משוואת ציר הסימטריה לכל אחת מהפונקציות הריבועיות הבאות:

(א) $y = (x - 2)(x - 6)$

(ב) $y = (2x - 4)(x + 2)$

(ג) $y = (7 - x)(x + 3)$

8. ציר הסימטריה של פונקציה ריבועית היא $x = -4$. גרף הפונקציה עובר דרך ראשית הצירים $(0, 0)$. מצא נקודה נוספת על הגרף.



קודקוד

9. מצא את שיעורי הקודקוד של הפונקציות הריבועיות הבאות:
(אינך חייב להשתמש בנוסחה עבור שיעור y של הקודקוד). 

(א) $y = 2x^2 + 3x - 4$ (ב) $y = (x + 1)(x + 2)$

(ג) $y = 5x^2 + 3$ (ד) $y = 2x(5 - x)$

(ה) $y = -x^2 + 4x$ (ו) $y = 1 + \frac{1}{2}x^2 - x$

10. נתונה פונקציה ריבועית. נקודת הקודקוד שלה, $x = 2$.
הנקודות $(0, 1)$, $(-3, 4)$ נמצאות על גרף הפונקציה.
מצא עוד שתי נקודות השייכות לגרף הפונקציה.

11. נתונה פונקציה ריבועית. הנקודה $K(1, 3)$ היא קודקודה. ידוע כי
הנקודה $E(2, 5)$ נמצאת על גרף הפונקציה. הסבר מדוע הנקודות
הבאות אינן יכולות להימצא על גרף הפונקציה.

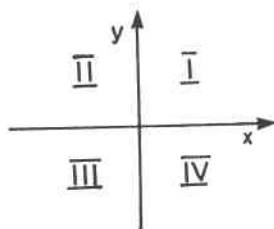
(א) $(2, 7)$ (ב) $(-2, 5)$ (ג) $(0, 4)$ (ד) $(-1, 3)$

12. באיזה רביע נמצא קודקוד הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:

(א) $y = (x + 4)(x - 2)$ (ב) $y = -x^2 + 2x + 2$

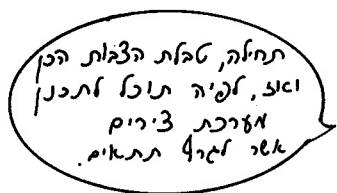
(ג) $y = (x - 5)(x - 3)$ (ד) $y = 2x^2 + 6x - 4$

(ה) $y = (5 - x)(x - 3)$ (ו) $y = x + 2x^2 + 3$



שרטוט הגרף

13. שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות:



(א) $y = 2x^2 + 2x - 4$

(ב) $y = -3x^2 - 6x + 9$

(ג) $y = x^2 - 4x + 4$

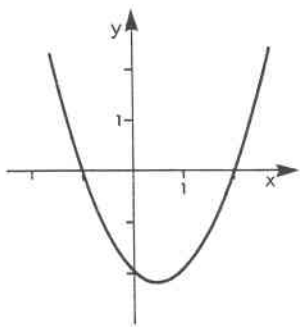
14. שרטט את הגרפים של הפונקציות הבאות ומצא מן הגרפים נקודות אפס ותחומי עלייה וירידה של כל פונקציה:

(א) $y = x^2 - 14x + 48$

(ב) $y = -x^2 + 4x + 5$

(ג) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2}$

15. לפניך גרף של פונקציה ריבועית מן המשפחה $y = x^2 + bx + c$ בה $a = 1$.



(א) קרא מן הגרף את ערכו של c .

(ב) מצא בעזרת הגרף את ערכו של b

(ג) רשום חוק התאמה לפונקציה שזהו הגרף שלה ובדוק על-ידי הצבה, אחת מן הנקודות של הגרף.

16. שרטט את גרף הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 8$ וענה בעזרתו על השאלות הבאות:

(א) מהן נקודות האפס של הפונקציה?

(ב) עבור אילו איברים בתחום הפונקציה חיובית? שלילית? עולה? יורדת?

(ג) שרטט באותה מערכת צירים את הישרים $y = 3$, $y = 1$, $y = -1$ כמה נקודות חיתוך יש לישרים אלו עם גרף הפונקציה?



חקור וגלה

17. ציר סימטריה מהמשפחה $x = a$

I. ענה לשאלות הבאות מבלי לערוך חישובים:

א) האם קיימת פונקציה ריבועית המקיימת:

$$f(x) = 3 \quad \text{רק כאשר } x = 2$$

$$\text{וגם } f(0) = f(4)$$

נמק את תשובתך.

ב) האם קיימת פונקציה ריבועית המקיימת:

$$f(x) = 3 \quad \text{אם } x = 0 \quad \text{או } x = 2$$

$$\text{וגם } f(4) = f(-1)$$

נמק את תשובתך.

II. נתונה הפונקציה: $y = f(x)$ המוגדרת על כל הממשיים כך שעבור

כל מספר x_1 השונה מ-1, קיים מספר x_2 השונה מ- x_1 המקיים

$$f(x_1) = f(x_2)$$

האם יש לפונקציה ציר סימטריה? אם לא נמק.

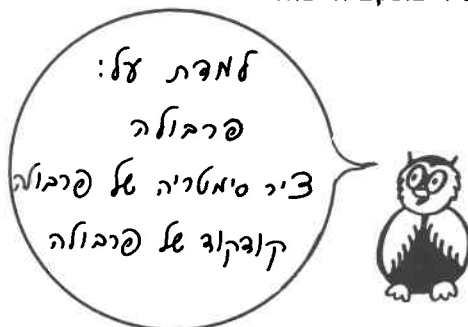
אם כן, מהי משוואתו?

III. הישרים $x = 0$ ו- $x = 1$ הם צירי סימטריה של גרף הפונקציה

$$y = f(x)$$

כמה צירי סימטריה בסך הכל יש לגרף הפונקציה.

שרטט גרף של פונקציה כזו.



למדת ע"ס:

פרבולה

ציר סימטריה של פרבולה

קובקוב של פרבולה

מבחר תשובות

1. א) $f(5)$ ב) $f(6)$

2. $x = 5$

3. א) $x = 4$ ב) $x = -3$ ג) $x = -0.5$ ד) $x = 0$

6. $x = 2$

7. א) $\{2, 6\}$ ב) $\{2, -2\}$ ג) $\{7, -3\}$ ד) $\{1, 0.5\}$

8. $(-8, 0)$

9. א) $(-\frac{3}{4}, -5\frac{1}{8})$ ב) $(0, 3)$ ג) $(2, 4)$ ד) $(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

ה) $(2.5, 12.5)$ ו) $(1, 0.5)$ ז) $(-1, -\frac{1}{4})$ ח) $(2.5, 12.5)$

12. א) III ב) IV ג) I ד) I ה) III ו) II

14. נקודות אפס עליה ירידה

א) $x < 7$ $x > 7$ $8, 6$

ב) $x > 2$ $x < 2$ $-1, 5$

ג) $x > 3$ $x < 3$ 3

16. א) $4, 2$

ב) חיובית: $2 < x < 4$ שלילית: $x > 4$ או $x < 2$

עולה: $x < 3$ יורדת: $x > 3$

שלב III: מינימום או מקסימום?

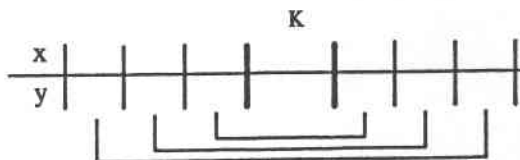
מקרה פרטי

1. נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 6x + 5$

(א) ציר הסימטריה של גרף הפונקציה הוא _____

(ב) שיעורי נקודת הקודקוד הם: $K(_, _)$.

(ג) השלם את טבלת הערכים לפי הפונקציה.

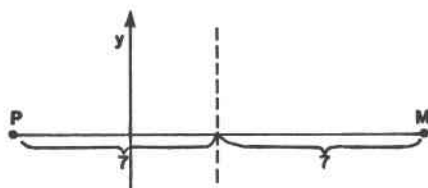


(ד) שרטט את גרף הפונקציה.

(ה) P ו- M הן שתי נקודות סימטריות על גרף הפונקציה במרחק 7

יחידות מציר הסימטריה.

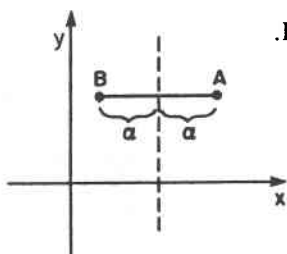
חשב את שיעוריהן.



2. (א) A ו- B הן שתי נקודות סימטריות על גרף הפונקציה

$y = x^2 - 6x + 5$ (מהשאלה הקודמת) במרחק α יחידות מציר הסימטריה.

הבע באמצעות α את שיעורי x של A ו- B.



$x_B = _$ $x_A = _$

הבע באמצעות α את שיעורי y של הנקודות A ו- B

(היעזר בהצבה).

$y_B = _$ $y_A = _$

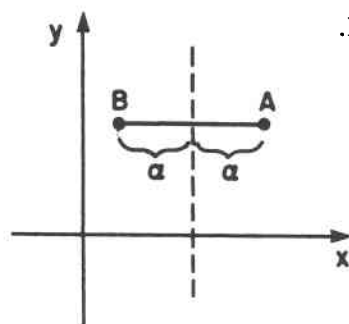
(ב) ראינו כי שיעור y של נקודה כלשהי הנמצאת על גרף הפונקציה ומרוחקת במרחק α מציר הסימטריה הוא $y = -4 + \alpha^2$. מצא לפי זה את שיעור y של הקודקוד.

(ג) מה קורה לשיעור y כאשר נתרקם מציר הסימטריה, כלומר כאשר נגדיל את α .

(ד) נמק באופן אלגברי מדוע נקודת הקודקוד היא נקודת מינימום.

המקרה הכללי

3. נתונה הפונקציה הריבועית (בצורתה הכללית) $y = ax^2 + bx + c$ שקודקודה $K(x_k, y_k)$.



(א) בטא את שיעורי x של שתי נקודות A ו- B המרוחקות מציר הסימטריה α יחידות בעזרת x_k ו- α .

(ב) בטא את שיעור y המשותף לשתי הנקודות על-ידי הצבה.

(ג) הראה כי אפשר לבטא את שיעור y הנ"ל כך:

$$y = y_k + a\alpha^2$$

רמז: זכור כי y_k מתקבל בהצבה של x_k בפונקציה.

(ד) מה קורה לשיעורי y כאשר מגדילים את α , כלומר כאשר מתרחקים מציר הסימטריה?

הבחן בין שני מקרים: $a > 0$, $a < 0$

(ה) מה תוכל לומר על נקודת הקודקוד $K(x_k, y_k)$ בכל אחד מהמקרים?

ראינו כי אפשר לבטא את שיעורי נקודה כלשהי,

$A(x, y)$ על גרף של פונקציה ריבועית מהצורה

$$y = ax^2 + bx + c \text{ באופן הבא:}$$

$$x = x_k \pm \alpha \text{ כאשר } y = y_k + a\alpha^2$$

אם $a > 0$, לפרבולה יש נקודת מינימום: $K(x_k, y_k)$

אם $a < 0$, לפרבולה יש נקודת מקסימום: $K(x_k, y_k)$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

(א) מצא את נקודת הקודקוד של הפונקציה וקבע אם היא נקודת מינימום או מקסימום.

(ב) הנקודה A נמצאת במרחק 8 יחידות מציר הסימטריה מימינו. מצא את שיעוריה.

האם A גבוהה או נמוכה מנקודת הקודקוד? בכמה יחידות?

(ג) חזור על (א) ר"ב עם הפונקציה

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2}$$

5. כמה נקודות חיתוך יש לישר מקביל לציר ה-x עם גרף הפונקציה הריבועית?

6. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 4x + 1$ (מתרגיל 4).

(א) מצא ישר מקביל לציר ה-x שאינו חותך את גרף הפונקציה. רשום את משוואתו.

(ב) מצא ישר מקביל לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה פעם אחת. רשום את משוואתו.

(ג) מצא ישר מקביל לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה פעמיים. רשום את משוואתו.

תרגילים

מקרה פרטי

1. נתונה הפונקציה: $y = -2x^2 - 4x + 4$.

(א) מצא את נקודת הקודקוד K.

(ב) A ו- B הן שתי נקודות סימטריות המרוחקות מציר הסימטריה מרחק של α יחידות.

השלם באמצעות α :

$$x_B = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_A = \underline{\hspace{2cm}}$$

(ג) הראה כי אפשר לבטא את שיעור y המשותף לשתי הנקודות A ו- B באמצעות α , כך: $y_A = y_B = 6 - 2\alpha^2$

(ד) השתמש בביטוי שמצאת עבור שיעור y של נקודה כלשהי על הגרף כדי למלא את הטבלה הבאה: (אל תציב בחוק ההתאמה

$$(y = -2x^2 - 4x + 4)$$

	K							
x				-1	0	1	2	
α				0			3	
y				6			-12	

דוגמא: $x_A = 2$

נחשב את y_A .

על ציר הסימטריה:

$$x_K = -1$$

המרחק של A מציר הסימטריה:

$$\alpha = 2 - (-1) = 3$$

$$y_A = 6 - 2 \cdot 3^2 = -12$$

(ה) האם K היא נקודת מינימום או מקסימום? נמק.

(ו) שרטט את גרף הפונקציה.

המקרה הכללי

2. נתונה הפונקציה $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 16$

(א) מצא את שיעורי נקודת הקודקוד.

(ב) מצא (ללא הצבה בפונקציה) שלושה זוגות של נקודות סימטריות על גרף הפונקציה במרחקים 1, 2, 3 יחידות מציר הסימטריה.

הדרכה: השתמש בתבנית $y_k + a\alpha^2$ הנותנת את שיעורי y של נקודות שמרחקן α מציר הסימטריה.

(ג) שרטט את גרף הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה $y = -2x^2 - 12x - 16$

(א) חשב את נקודת הקודקוד ורשום שיעוריה בטבלה.

(ב) השלם את הטבלה:

הדרכה: חשב את שיעורי y בטבלה לפי התבנית $y_k + a\alpha^2$

				K				
x								
α				0				
y								

(ג) שרטט את הגרף

4. (א) ידוע כי קודקודה של פונקציה ריבועית הוא הנקודה $K(4, 5)$. כמו כן ידוע כי $a = -1$. שרטט את גרף הפונקציה.

(ב) שרטט באותה דרך את גרף הפונקציה $y = x^2 - 10x + 21$

5. (א) התוכל לשרטט גרף של פונקציה ריבועית אם ידוע כי שיעור y של כל נקודה במרחק α מציר הסימטריה הוא $y = -3 + 2\alpha^2$? נמק.

(ב) השלם את הנתון החסר כרצונך ושרטט את גרף הפונקציה.
(ג) השווה (דמיון ושוני) בין גרפים שונים שיתקבלו לפי בחירת הנתון החסר.

6. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2 - 10x + 24$ משמאל לציר הסימטריה, ושיעור y שלה הוא 3.

(א) מצא את מרחקה מציר הסימטריה.

הדרכה: העזר בביטוי $y = y_k + a\alpha^2$.

(ב) מצא את שיעור x של A.

7. שיעורי y של פונקציה ריבועית מקיימים $y = 18 - 2\alpha^2$ כאשר α הוא המרחק של כל נקודה מציר הסימטריה.

(א) מה מרחק נקודות האפס מציר הסימטריה?
- התוכל למצוא את נקודות האפס? נמק.

(ב) A ו-B הן שתי נקודות סימטריות שמרחקן מציר הסימטריה הוא 2 יחידות. התוכל למצוא את שיעורי הנקודות A ו-B? נמק.

(ג) נתון גם כי ציר הסימטריה של הפונקציה הוא $x = 4$.
מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

(ד) הבע את הפונקציה בצורה $y = ax^2 + bx + c$.



יישום

8. קבע לגבי כל אחת מהפונקציות הריבועיות הבאות אם יש לה נקודת מינימום או נקודת מקסימום.

$$y = x - \frac{3 - x^2}{2} \quad (א) \quad y = 2x^2 + 3x - 4 \quad (ב)$$

$$y = (x - 1)^2 - (3x + 1)^2 \quad (ג) \quad y = 5x - x^2 \quad (ד)$$

$$y = 5 - x^2 - \frac{(x + 3)^2}{2} \quad (ה) \quad y = (1 - x)(1 + x) \quad (ו)$$

$$y = 2(x + 2)^2 + 3(3 - x)^2 \quad (ז) \quad y = \frac{x^2 + 1}{2} - \frac{x^2}{3} \quad (ח)$$

$$y = (2x - 1)(1 - 2x) \quad (ט) \quad y = (4 - 2x)^2 - 1 \quad (י)$$

9. א) שרטט גרף הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$

ב) מהו התחום שבו הפונקציה עולה? יורדת?

10. מהו התחום שבו הפונקציות הבאות עולות?
מצא בלי לשרטט.

$$y = (1 - x)(1 + x) \quad (א) \quad y = x^2 + 5x + 6 \quad (ב)$$

$$y = (x - 2)\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \quad (ג) \quad y = 6x - 3x^2 \quad (ד)$$

11. קבע לגבי כל אחת מן הפונקציות כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = 3$ עם גרף הפונקציה (אל תשרטט, השתמש בידיעותיך לגבי הקודקוד).

$$y = -x^2 - 4x + 10 \quad (א) \quad y = x^2 - 4x + 10 \quad (ב)$$

$$y = (x - 2)(x - 3) \quad (ג) \quad y = -x^2 + 2x + 2 \quad (ד)$$

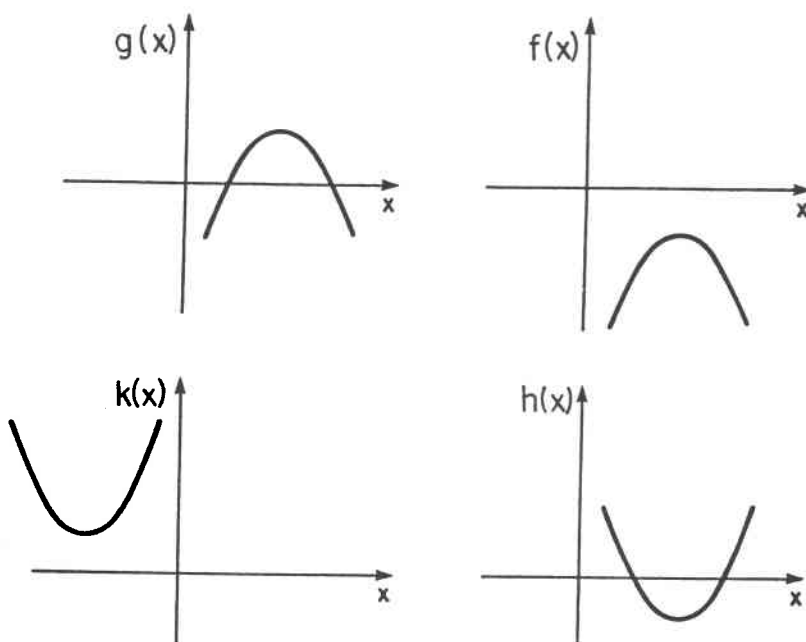
$$y = x^2 \quad (ה) \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\frac{1}{2} \quad (ו)$$

12. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 6x + 7$

(א) באיזה רביע נמצאת נקודת הקודקוד שלה?

(ב) אחד מבין הגרפים הבאים מתאים לגרף הפונקציה. מצא אותו.

- כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x ?



13. כמה נקודות חיתוך יש לגרף של כל פונקציה עם ציר ה- x ?
(אין צורך לשרטט מדויק כדי לקבוע)

(א) $y = -2x^2 + 12x - 18$

(ב) $y = -x^2 + 6x + 1$

(ג) $y = -5x^2 + x - 4$

(ד) $y = (x - 1)(x - 6)$

(ה) $y = 2x^2 + 4x + 10$

14. בכל סעיף נתונה נקודת הקודקוד של פונקציה ריבועית ונתון a .
החלט כמה נקודות חיתוך יש לפונקציה המתאימה עם ציר ה- x .

(א) $a = 1$ $K(2, 3)$ (ה) $a = 1$ $K(4, 0)$

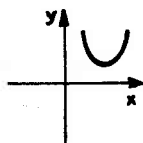
(ב) $a = 2$ $K(-2, 3)$ (ו) $a = -\frac{1}{2}$ $K(-2, 1)$

(ג) $a = 3$ $K(1, -2)$ (ז) $a = -1$ $K(4, -3)$

(ד) $a = -3$ $K(5, 1)$ (ח) $a = -2$ $K(-1, 0)$

- איזה נתון אפשר להשמיט?

15. שרטט "סקיצה" של גרף לפי התנאים הבאים, ורשום את מספר נקודות האפס של פונקציה המקיימת תנאים אלו.



(א) דוגמא: אם $a > 0$ וגם $y_k > 0$ אז אין נקודות אפס

(ב) אם $a > 0$ וגם $y_k = 0$ אז _____

(ג) אם $a > 0$ וגם $y_k < 0$ אז _____

(ד) אם $a < 0$ וגם $y_k > 0$ אז _____

(ה) אם $a < 0$ וגם $y_k = 0$ אז _____

(ו) אם $a < 0$ וגם $y_k < 0$ אז _____

- סכם בקצרה את הקשר בין הסימנים של a ו y_k לבין מספר נקודות האפס של הפונקציה הריבועית המתאימה.

מבחר תשובות

1. א) $K(-1, 6)$ ב) $x_A = -1 + \alpha$ $x_B = -1 - \alpha$ (ה) מקסימום.
2. א) $(6, -2)$
- ב) $(7, -1.5)$ $(5, -1.5)$ $(8, 0)$ $(4, 0)$ $(9, 2.5)$ $(3, 2.5)$
3. א) $(-3, 2)$
5. א) לא
6. א) $\alpha = 2$ ב) $x_A = 3$
7. א) 3 יחידות. לא. ב) לא. ג) $y = -14$
- ד) $y = -2x^2 + 16x - 14$
8. מינימום: א), ד), ה), ו), ט)
- מקסימום: ב), ג), ז), ח), י)
9. עולה: $\{x | x > 3\}$ יורדת: $\{x | x < 3\}$
10. א) $\{x | x > -2.5\}$ ב) $\{x | x < 1\}$ ג) $\{x | x < 0\}$
- ד) $\{x | x > -2\}$
11. א) אפס ב) אחת ג) אפס ד) שתיים ה) שתיים ו) שתיים.
12. א) רביעי, ב) $h(x)$, שתיים.
13. א) אחת ב) שתיים ג) אפס ד) שתיים ה) אפס.
14. א) אפס ב) אפס ג) שתיים ד) שתיים ה) אחת
- ו) שתיים ז) אפס ח) אחת
15. א) אפס ב) אחת ג) שתיים ד) שתיים ה) אחת ט) אפס.

שלב IV: נקודות אפס של פונקציה ריבועית

כמה נקודות אפס?

מצאנו כי עבור פונקציה ריבועית $y = ax^2 + bx + c$ שיעורי הקודקוד הם:

$$x_k = -\frac{b}{2a}$$

$$y_k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

1. נתונה פונקציה ריבועית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ שקודקודה $K(x_k, y_k)$.

כמה נקודות אפס יש לפונקציה בכל אחד מהמקרים הבאים:

(א) כאשר $y_k = 0$

(ב) כאשר הסימנים של a ו y_k שונים.

(ג) כאשר הסימנים של a ו y_k שווים.

2. הסתמך על התשובה לשאלה הקודמת והיעזר בנוסחה עבור y_k כדי להראות כי:

עבור פונקציה ריבועית $y = ax^2 + bx + c$

- אם $b^2 - 4ac > 0$ יש שתי נקודות אפס.

- אם $b^2 - 4ac = 0$ יש נקודת אפס אחת.

- אם $b^2 - 4ac < 0$ אין נקודות אפס.

3. כמה נקודות אפס יש לפונקציות הבאות?

(א) $y = x^2 + x + 1$ (ג) $y = (x - 4)^2$

(ב) $y = -2x^2 + 3x - 1$ (ד) $y = 5 - x(x - 2)$

חישוב נקודות האפס

בשלב הבא הקודמים של החקירה מצאנו כי שיעור y של נקודה על גרף הפונקציה המרוחקת α מציר הסימטריה הוא:

$$y = y_k + a\alpha^2$$

נחפש עתה את המרחק α של נקודות האפס מציר הסימטריה, ובעזרת מרחק זה, את נקודות האפס עצמן.

4. נתונה הפונקציה $y = 2x^2 - 4x - 6$

(א) כמה נקודות אפס יש לפונקציה?

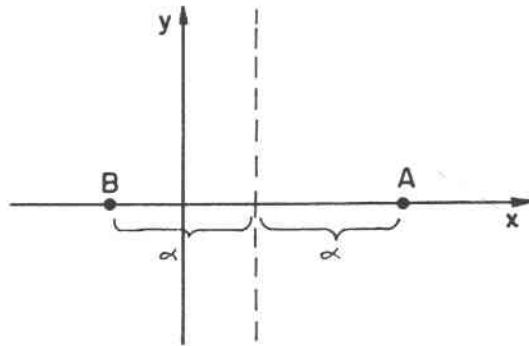
(ב) חשב את y_k .

(ג) הבע שיעור y של נקודה כלשהי על הגרף באמצעות מרחק α הסימטריה -

(ד) מהו שיעור y בנקודות האפס? הצב שיעור זה בביטוי שקיבלת בג-

(ה) חשב את המרחק α של נקודות האפס מציר הסימטריה.

(ו) חשב את נקודות האפס (בעזרת ציר הסימטריה ומרחק הנקודות ממנו - α).
בדוק ע"י הצבה.



5. נתונה פונקציה ריבועית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$.

(א) הוכח כי מרחק כל נקודת אפס מציר הסימטריה הוא:

$$\alpha = \sqrt{\frac{-y_k}{a}}$$

הדרכה: התחל מן הביטוי $y = y_k + a\alpha^2$ עבור נקודה כלשהי על הגרף והצב בו שיעור y של נקודות האפס.

(ב) הוכח כי:
$$\alpha = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

הדרכה: החלף את y_k בביטוי מתאים.

(ג) משוואת ציר הסימטריה היא $x = \frac{-b}{2a}$

היעזר בכך, ובביטוי שמצאת עבור α , כדי להוכיח כי:

נקודות האפס של פונקציה מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ מקיימות (אם הן קיימות):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ובקיצור כותבים:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6. מצא את נקודות האפס של כל אחת מהפונקציות (אם הן קיימות).

(א) $y = x^2 + 2x - 15$

(ב) $y = -2x^2 - 3x + 20$

(ג) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

(ד) $y = -3x^2 + 10x - 9$

תרגילים

כמה נקודות אפס?

1. כמה נקודות אפס יש לפונקציות הבאות?

(א) $y = (2x - 3)^2 + 8(x^2 - 1)$ (ה) $y = 5x^2 + 4$

(ב) $y = (3x + 1)^2$ (ו) $y = 4x - x^2$

(ג) $y = (2x - 3)(2x + 3)$ (ז) $y = -1 - (x - 4)^2$

(ד) $y = x^2 - 6$ (ח) $y = x - \frac{(3 + x)^2}{2}$

2. התבנית $b^2 - 4ac$ קובעת את מספר נקודות האפס.
רשום בטבלה בכל שורה אחד או יותר, משלושת הביטויים הבאים:

שתי נקודות אפס, נקודת אפס אחת, אין נקודות אפס.

התנאים	מספר נקודות האפס
(א) $a > 0$ $c > 0$	
(ב) $a > 0$ $c < 0$	
(ג) $a > 0$ $c = 0$	
(ד) $a < 0$ $c > 0$	
(ה) $a < 0$ $c < 0$	
(ו) $a < 0$ $c = 0$	

- למדת כי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר y היא $(c, 0)$. שרטט
לכל מקרה סקיצה או סקיצות של הגרף כדי להדגים באופן גרפי
את המסקנות שהסקת.

3. התאם לכל פונקציה את הגרף שלה בלי להציב נקודות ונמק.

$$h(x) = -x^2 + x - \frac{1}{4}$$

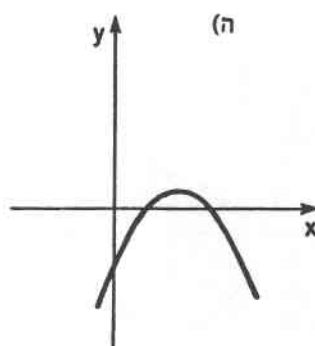
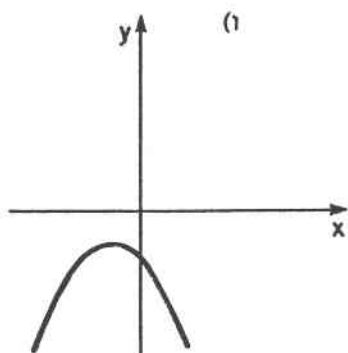
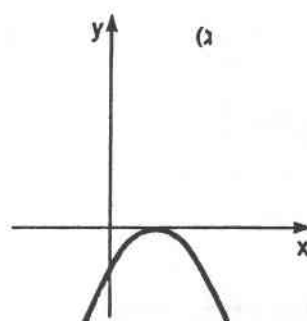
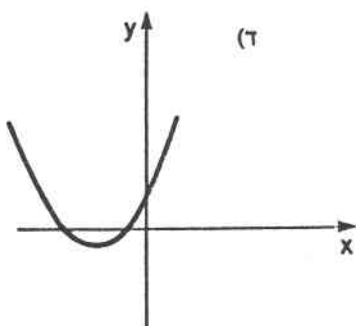
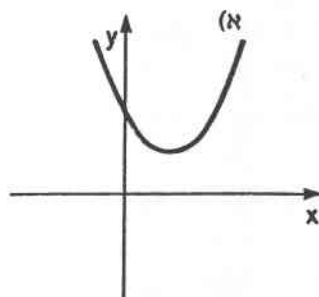
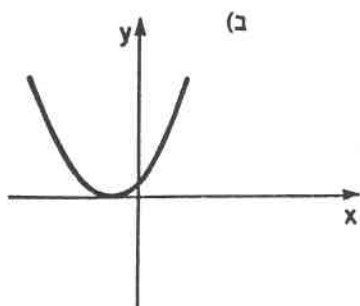
$$f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$j(x) = -x^2 + 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = x^2 + 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$k(x) = -x^2 - x - 1$$

$$p(x) = x^2 - x + 1$$



חישוב נקודות האפס

4. קבע האם לפונקציות הריבועיות הבאות נקודות אפס ואם כן מצא אותן.

(א) $y = 2x^2 - x - 15$ (ז) $y = x^2 - 9x + 14$ 

(ב) $y = 5x^2 + 3x - 14$ (ח) $y = x^2 - 19x - 150$

(ג) $y = x^2 + 8x + 25$ (ט) $y = 3x^2 - 5x - 12$

(ד) $y = 10x - 3 - 8x^2$ (י) $y = 6x^2 - 36x + 54$

(ה) $y = 5x(4x - 10)$ (יא) $y = 7x^2 + 15x - 100$

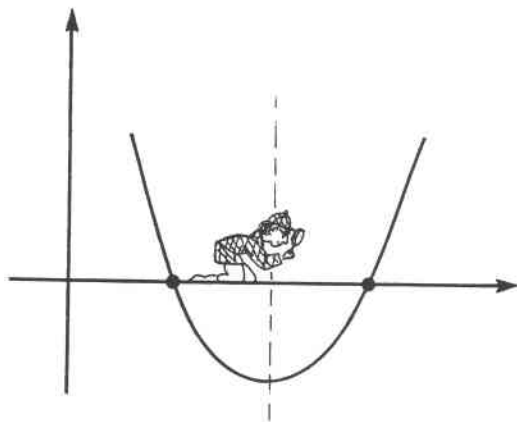
(ו) $y = (3x + 2)^2 + 2(x - 2)$ (יב) $y = -x(5x - 6) - 8(1 - x)$

5. x_1 ו x_2 הן נקודות האפס של פונקציה ריבועית.

(א) הבע את $x_1 + x_2$ באמצעות a , b ו c .

(ב) הבע את $\frac{x_1 + x_2}{2}$. הסבר.

6. מצא את מרחק נקודות האפס של כל אחת מהפונקציות הבאות, מציר הסימטריה שלה. 



(א) $y = x^2 + 5x - 24$

(ב) $y = 2x^2 - 11x + 9$

(ג) $y = -4x^2 + 12x - 9$

(ד) $y = (x - 4)(x + 6)$

(ה) $y = x^2 - 3x$

(ו) $y = x^2 - 25$

7. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 6x + 8$

מהן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישרים הבאים:

(א) $y = 0$ (ב) $y = 3$ (ג) $y = -1$ (ד) $y = -3$ (ה) $y = 8$

8. כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = 2$ עם הגרפים של הפונקציות הבאות? מהן? (ענה ללא שרטוט).



(א) $y = -x^2 - 4x + 2$ (ה) $y = 2x^2 - 16x + 32$

(ב) $y = -x^2 - 4x - 1$ (ו) $y = 2x^2 - 4x$

(ג) $y = -x^2 - 2x$ (ז) $y = -(x + 3)^2$

(ד) $y = x^2 - 2x + 3$ (ח) $y = (x - 3)^2$

9. נתונה הפונקציה: $y = x^2 - 2x - 3$

(א) חשב את נקודות האפס שלה וסמן אותן במערכת צירים.

(ב) שרטט "סקיצה" של הפונקציה ללא חישוב נקודות נוספות.

(ג) עבור אילו איברים בתחום הפונקציה שלילית?

10. חזור על סעיפי שאלה 9 עם הפונקציה

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$$

מבחן תשובות

1. (א) שתיים (ב) אחת (ג) שתיים (ד) שתיים
(ה) אפס (ו) שתיים (ז) אפס (ח) אפס.

2. (א) אפס, אחת או שתיים (ב) שתיים
(ג) אחת או שתיים (ד) שתיים
(ה) אפס אחת או שתיים (ו) אחת או שתיים

3. (א) p (ב) f (ג) h (ד) g (ה) j (ו) k

4. (א) 3, -2.5 (ב) 1.4, -2 (ג) אין (ד) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (ה) 0, $2\frac{1}{2}$
(ו) $0, -1\frac{5}{9}$ (ז) 2, 7 (ח) -6, 25 (ט) -1.3, 3 (י) 3
(יא) $2\frac{6}{7}, -5$ (יב) 2, 0.8

5. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

6. (א) 5.5 (ב) 1.75 (ג) 0 (ד) 5 (ה) 1.5 (ו) 5

7. (א) (2, 0) (ב) (4, 0) (ג) (1, 3) (ד) (5, 3)
(א) (3, -1) (ב) אין (ג) (6, 8) (ד) (0, 8)

8. (א) (-4, 2) (ב) (0, 2) (ג) (-1, 2) (ד) (-3, 2) (ה) אין
(א) (3, 2) (ב) (5, 2) (ג) $(1 + \sqrt{2}, 2)$ (ד) $(1 - \sqrt{2}, 2)$ (ה) אין
(א) $(3 + \sqrt{2}, 2)$ (ב) $(3 - \sqrt{2}, 2)$

9. (א) 3, -1 (ב) $\{x | -1 < x < 3\}$

10. (א) 6, 2 (ב) $\{x | x < 2 \text{ או } x > 6\}$

בעיות

בשלבם הקודמים למדנו את תכונות הגרף של פונקציה ריבועית. נשתמש בתכונות אלו כדי לפתור בעיות מתמטיות ובעיות מעשיות.

1. מקצה גגו של בית שגובהו 25 מ' נזרקה אבן כלפי מעלה והיא חזרה ונפלה על האדמה.

f היא פונקציה המתאימה למספר השניות (x) שחלפו מאז נזרקה האבן, את גובהה מעל פני האדמה.

חוק ההתאמה של f הוא: $f : x \rightarrow -5x^2 + 20x + 25$

(א) שרטט גרף של פונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שיש לה אותו חוק התאמה כמו f .

(ב) הדגש את החלק מן הגרף של g המתאים להיות הגרף של f (שים לב שהתחום יתאים לתוכן הבעיה).

(ג) אחרי כמה שניות הגיעה האבן לאדמה?

(ד) אחרי כמה שניות הגיעה האבן לגובהה המקסימלי? מהו גובה זה?

(ה) באיזה פרק זמן יהיה מרחק האבן מהארץ גדול מ-25 מ'?

(ו) במשך איזו שניה היתה התקדמות האבן הגדולה ביותר?

2. היקפו של מלבן 12 ס"מ.

(א) רשום פונקציה המתאימה לאורך אחת מצלעות המלבן את שטחו.

(ב) מהן שיעורי הנקודות המתארות מלבנים ששטחם 8 סמ"ר?

(ג) מצא את שיעורי קודקוד הפונקציה.

האם הקודקוד הוא מינימום או מקסימום?

מה משמעות השיעורים לגבי המלבן?

(ד) עליך להוסיב 12 אנשים סביב שולחן מלבני. איזה שולחן כדאי

לבחור כדי שתוכל להניח עליו כמה שיותר כלי הגשה?

תרגילים

1. סכום שני מספרים הוא 7.

(א) כתוב פונקציה המתאימה לאחד המספרים (x) את מכפלת שני המספרים. 

(ב) שרטט את גרף הפונקציה.

(ג) הנקודה $A(2.5, 11.25)$ נמצאת על הגרף. בדוק!
מה מתארים שעורי הנקודה A ?

(ד) אילו מהנקודות הבאות נמצאות על הגרף?

$E(8, -9)$, $D(0.5, 3.2)$, $C(-1, -8)$, $B(6.5, 3.25)$

(ה) עבור אילו מספרים תהיה המכפלה מקסימלית?

(ו) מהי המכפלה המקסימלית?

(ז) מהם שני המספרים אם המכפלה 12? אם המכפלה 18-?
האם יתכן כי המכפלה 15? נמק!

2. מספר אחד גדול ממספר אחר ב-6.

(א) כתוב פונקציה המתאימה למספר הקטן את מכפלת שני המספרים.

(ב) חשב את שיעורי נקודת הקודקוד. מה הם מתארים?

(ג) מהם המספרים שמכפלתם מינימלית?

(ד) מהי המכפלה המינימלית?

(ה) עבור אילו מספרים תהיה המכפלה 8-?

3. מהו המספר שאם נוסיף לו את ריבועו נקבל תוצאה קטנה ביותר?
(פתור בעזרת פונקציה ריבועית).

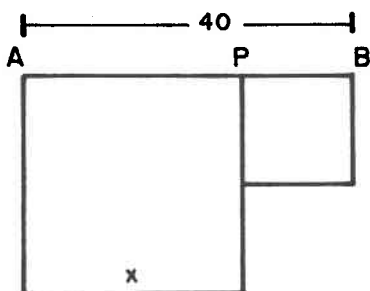
4. מהו המספר שאם נחסר ממנו את ריבועו נקבל תוצאה גדולה ביותר?
מהי התוצאה הגדולה ביותר?

5. מספר אחד קטן מן השני ב-2

(א) כתוב פונקציה המתאימה למספר הגדול את סכום ריבועי המספרים.

(ב) מהם המספרים עבורם סכום הריבועים הוא הקטן ביותר?
מהו סכום זה?

(ג) מהם המספרים עבורם סכום הריבועים הוא אפס? נמק.



6. על קטע AB שאורכו 40 ס"מ
מתנועת נקודה P מ-A ל-B
על הקטעים AP ו-BP בנו
ריבועים.

x מייצג את אורך הקטע AP.

(א) מצא תבנית לאורך הקטע PB.

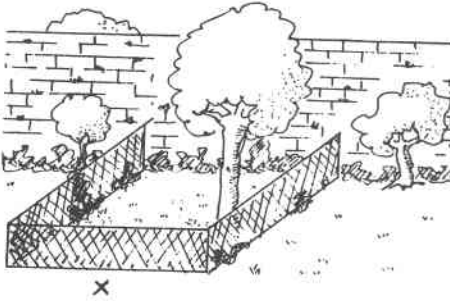
(ב) בטא את סכום שטחי שני הריבועים - y, כפונקציה של x.
מהו תחום הפונקציה?

(ג) מהו אורך הקטע AP, אם סכום שטחי הריבועים שווה ל-1000 סמ"ר?

(ד) מהו אורך הקטע AP, אם סכום שטחי הריבועים שווה ל-800 סמ"ר?

(ה) מהו אורך הקטע AP, אם סכום שטחי הריבועים הוא הקטן ביותר?

7. עבור חלקה מלבנית הצמודה לקיר נקנתה גדר באורך 30 מ'.
 (א) רשום פונקציה המתאימה לאורך החלקה x (ראה ציור), את שטח החלקה המגודרת.



(ב) מה צריך להיות אורך החלקה כדי ששטח החלקה המגודרת יהיה מקסימלי?

(ג) מהו שטח זה?

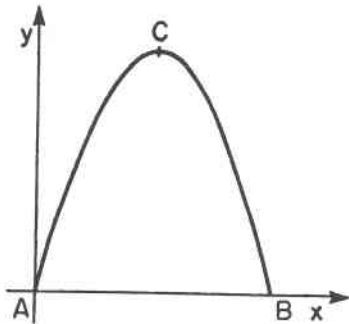
8. בבית ספר חקלאי קנו 200 מ' רשת תיל כדי להקיף בגדר חלקת אדמה בצורת מלבן בעל היקף 200 מ'.

(א) כתוב פונקציה שתחומה הוא הגדול ביותר האפשרי, המתאימה לאורך צלע המלבן x , את שטחו. מהו תחום הפונקציה?

(ב) מהו שטח החלקה כאשר $x = 60$? $x = 80$?

(ג) מהו השטח הגדול ביותר שיכול להיות לחלקה?

(ד) בשרטוט סקיצה של גרף הפונקציה מ- A . מצא את שיעורי הנקודות B , A ו- C .



(ה) עבור אילו ערכים של x יהיה שטח החלקה שווה ל-1600 מ"ר?

(ו) עבור אילו ערכים של x יהיה שטח החלקה גדול מ-1600? קטן מ-1600?

9. הלל ושי התחרו בגינה, כדורו של מי מהם יגיע לגובה רב יותר. מכיוון שהלל גדול יותר, ביקש שי לעמוד על הסולם שבגינה. x מייצג את מספר השניות מרגע הזריקה.



h פונקציה המתאימה לזמן x את גובה הכדור של הלל, ונתון כי

$$h(x) = 1 + 11x - 4.9x^2$$

s פונקציה המתאימה לזמן x את גובה הכדור של שי, ונתון כי

$$s(x) = 2 + 9.8x - 4.9x^2$$

(א) מאיזה גובה זרק שי את הכדור?

(ב) מי ניצח ובכמה?



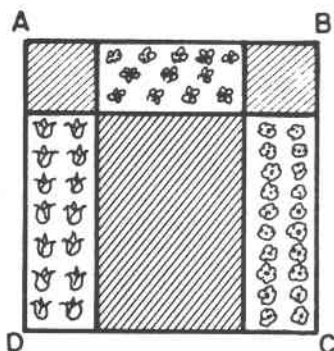
10. בית ספר קנה כרטיסים להצגה. לפי ההסכם עם מארגני ההצגה יעלה כל כרטיס 5 ש"ח, אם יבואו 100 או פחות מ-100 תלמידים להצגה. אם יבואו להצגה יותר מ-100 תלמידים תהיה הנחה על כל כרטיס: על כל תלמיד מעל ל-100 תלמידים תהיה הנחה של שתי אגורות לכל אחד מהכרטיסים. לדוגמא: אם יבואו 101 תלמידים יעלה כל אחד מהכרטיסים 4.98 ש"ח, אם יבואו 102 תלמידים יעלה כל כרטיס 4.96 ש"ח, וכו' בבית הספר 250 תלמידים.

(א) חשב מה תהיה הכנסתו הכוללת של התיאטרון מכרטיסי התלמידים, אם יבואו להצגה:

100 תלמידים? 150 תלמידים? כל התלמידים?

(ב) ידוע שבאו להצגה יותר ממאה תלמידים. כתוב פונקציה המתאימה למספר התלמידים שביקרו בהצגה (x) , את הכנסתם הכוללת של המארגנים (y) .

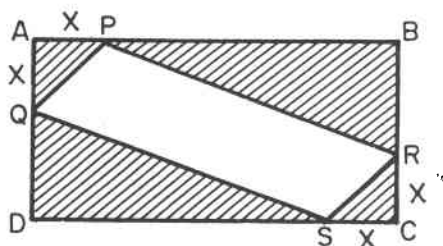
(ג) עבור איזה מספר של תלמידים ההכנסה תהיה מקסימלית?



11. לפניך שרטוט גינה שצורתה ריבוע בעל אורך צלע של 8 מ'. הגינה חולקה לכמה חלקים על-ידי ישרים באופן הבא: (ראה שרטוט).
בפינות הסמוכות לקודקודים A ו-B נמצאים שני ריבועים שווים, ואילו שאר השטח מחולק למלבנים. המלבן ששטחו מקווקו מיועד לדשא, ואילו המלבנים הבלתי מקווקים - לפרחים.

(א) סמן את צלעות הריבועים הקטנים שבפינות A ו-B של הגינה ב-x. כתוב פונקציה המתאימה לכל גודל של x את השטח המיועד לפרחים. שים לב לתחום הפונקציה.

(ב) מצא, בדרך אלגברית, את הערך של x שעבורו השטח המיועד לפרחים הוא הגדול ביותר.



12. נתון מלבן ABCD שבו אורך הצלע AB הוא 10 ס"מ, ואורך הצלע BC 6 ס"מ. על צלעות מלבן זה הוקצו:

$$AP = AQ = CR = CS = x$$

על-ידי חיבור הנקודות P, Q, R, ו-S קיבלו מקבילית PQSR (ראה שרטוט).

(א) מצא פונקציה המתאימה ל-x את שטח המקבילית PQSR. הדרכה: מצא את שטח המקבילית כהפרש בין שטחים. שים לב לתחום הפונקציה.

(ב) שרטט את גרף הפונקציה, ומצא בעזרתו עבור אלו ערכים של x יהיה שטח המקבילית הנ"ל קטן מ-24 סמ"ר.

(ג) חשב את הערך של x שעבורו יהיה שטח המקבילית PQSR מכסימלי.

(ד) מצא פונקציה המתאימה ל-x את סכום שטחי המשולשים ישרי הזווית שבפינות המלבן. חשב את הערך של x שעבורו יהיה סכום שטחים אלו מינימלי השווה עם תשובתך ל-ג) והסבר.

מבחן תשובות

1. (א) $y = -x^2 + 7x$ (ד) B ו-C (ה) 3.5, 3.5 (ו) 12.25

2. (א) $y = x^2 + 6x$ (ב) (-9, -3) (ג) -3, 3 (ד) -9 (ה) -2 ו-4 או -4 ו-1

4. המספר: $\frac{1}{2}$ התוצאה: $\frac{1}{4}$

(5) (א) $y = 2x^2 - 4x + 4$ המספרים: 1, -1. הסכום: 2

(6) (ב) $y = 2x^2 - 80x + 1600$ (ג) 10 ס"מ, 30 ס"מ
(ה) 20 ס"מ.

(7) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 15x$

(8) (א) $y = -x^2 + 100x$

(9) (ב) הלל נצח ב-27 ס"מ.

10. (א) 500 ש"ח; 600 ש"ח; 500 ש"ח.

(ב) $y = -0.02x^2 + 7x$

(ג) 175 תלמידים.

(11) (א) $f(x) = -4x^2 + 24x$ התחום: $\{x \mid 0 < x \leq 4\}$ (ב) $x = 3$

(12) (א) $f(x) = -2x^2 + 16x$ התחום: $\{x \mid 0 < x \leq 6\}$

(ג) $x = 4$ $\{x \mid 0 < x \leq 6\}$

שלב V: הפרמטרים של הפונקציה הריבועית

תפקידי הפרמטרים.

בשלב זה נברר כיצד משפיעים הפרמטרים של הפונקציה הריבועית מהצורה $y = ax^2 + bx + c$ על גרף הפונקציה. חלק ממידע זה כבר מצאנו.

1. מה תפקידו של c לגבי גרף הפונקציה?
(הדרכה: הצב $x = 0$)

2. כיצד משפיע סימנו של a על גרף של פונקציה ריבועית?

ל- a תפקיד נוסף בקביעת צורת הגרף. נברר אותו בתרגילים הבאים.

3. ראינו כי שיעורי נקודה כלשהי על גרף הפונקציה הם:

$$x = x_k \pm \alpha$$

$$y = y_k + a\alpha^2$$

כאשר (x_k, y_k) היא נקודת הקודקוד, ו- α היא מרחק הנקודה מציר הסימטריה.

$y = y_k + a(x - x_k)^2$

 הראה כי אפשר לבטא את y כך:

שים לב! התבנית מתארת למעשה את חוק ההתאמה של הפונקציה.

4. נתונה פונקציה ריבועית שקודקודה בנקודה $(2, 3)$ ונתון כי $a = 4$. רשום את חוק ההתאמה שלה. (העזר בביטוי שבמסגרת בשאלה הקודמת).

5. (א) נתונה פונקציה ריבועית $y = 2x^2 - 4x + 1$.

הבע את חוק ההתאמה שלה בעזרת שיעורי קודקודה.

(ב) נתונה פונקציה ריבועית $y = -3(x - 1)^2 + 4$

הבע את חוק ההתאמה שלה בצורה $y = ax^2 + bx + c$

6. נתונות ארבע פונקציות ריבועיות.

הקודקוד של ארבעתן היא הנקודה (3, 1).

בראשונה $a = 2$ בשניה $a = 1$ בשלישית $a = \frac{1}{2}$ וברביעית $a = -1$

(א) כתוב את ארבע הפונקציות בצורה $y = y_k + a(x - x_k)^2$.

(ב) שרטט את הגרפים של הפונקציות במערכת צירים אחת.

(ג) רשום כיצד משפיע הפרמטר a על גרף הפונקציה הריבועית.

7. נתונות שלוש פונקציות ריבועיות לגבי שלושתן $a = -2$

בראשונה הקודקוד (5, 3) בשניה הקודקוד (-1, 0)

ובשלישית הקודקוד (3, -4).

(א) כתוב את שלוש הפונקציות בצורה $y = y_k + a(x - x_k)^2$.

(ב) שרטט את הגרפים של הפונקציות במערכת צירים אחת שבה אורך

יחידה על כל ציר, ס"מ אחד.

(ג) מה תוכל לומר על פרבולות המתאימות לפונקציות ריבועיות שונות

שלכולן אותו פרמטר a ?

- כל פונקציה ריבועית מהצורה: $y = ax^2 + bx + c$

ניתנת להבעה בצורה: $y = y_k + a(x - x_k)^2$

ולהיפך. כאשר $K(x_k, y_k)$ נקודת הקודקוד של הגרף.

$$x_k = -\frac{b}{2a} \quad y_k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

- תפקידי הפרמטרים a, b, c

- גרף הפונקציה הריבועית, חותך את ציר y בנקודה $(0, c)$

- כאשר $a > 0$ יש לגרף נקודת מינימום אחת (הקודקוד)

כאשר $a < 0$ יש לגרף נקודת מקסימום אחת (הקודקוד).

a קובע גם את צורת הגרף (עליה וירידה "תלולות" או "מתונות").

- a ו- b קובעים ביחד את משוואת ציר הסימטריה.

משפחות של פרבולות

8. העתק על נייר שקוף את הפרבולות מעמ' 263 ו"שרטט" בעזרתן מספר פונקציות מכל אחת מהמשפחות הבאות:
 - לכל משפחה תן תיאור מילולי של תכונות משותפות לגרפים שלה.

$$y = ax^2 \quad (\text{א})$$

$$y = x^2 + c \quad (\text{ב})$$

$$y = -2(x - n)^2 \quad (\text{ג})$$

$$y = x^2 + bx + 2 \quad (\text{ד})$$

9. השלם את הטבלה הבאה:
 השתמש בשרטוטי הפרבולות שהעתקת כדי להדגים מספר גרפים מן המשפחה בכל פעם.

תבנית למשפחה	פונקציה פרטית	התכונה	
$y = 2x^2 + c$	$y = 2x^2 + 5$		(א)
$y = a (x - 1)^2$			(ב)
		הקודקוד בנקודה (2, 3)	(ג)
		הקודקוד בראשית הצירים	(ד)
		ציר y הוא ציר הסימטריה	(ה)
$y = 2x^2 + bx$			(ו)

10. נתונה משפחה של פונקציות ריבועיות שקודקודן בנקודה (2, 5).

- (א) כמה פונקציות במשפחה זו? רשום תבנית למשפחה.
- (ב) לכמה פונקציות מן המשפחה יש מינימום? רשום תבנית למשפחה חלקית זו.
- (ג) כמה פונקציות מן המשפחה, הגרפים שלהן עוברים דרך הנקודה (10, 1)? רשום חוק התאמה.

11. הנקודות 1 ו-5 הן שתי נקודות אפס של פונקציה ריבועית.

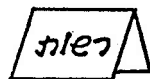
- (א) התוכל לרשום את חוק ההתאמה שלה? נמק.
- (ב) נתון עוד כי $y_k = 2$. רשום חוק התאמה.

12. נתונות שתי נקודות (1, 2) , (1, 8).

- כמה פונקציות ריבועיות יש שהגרף שלהן עובר דרך הנקודות?
- כמה מן הפונקציות הריבועיות מקיימות גם $y_k = 4$?
- רשום חוק התאמה.

13. נכון או לא נכון?

- (א) נקודת הקודקוד קובעת את הפרבולה.
- (ב) כאשר לשתי פונקציות ריבועיות יש אותו פרמטר a , הגרף של האחת יכול להתקבל מהגרף של השנייה, על ידי הזזת הפרבולה.
- (ג) אם לשתי פונקציות ריבועיות יש אותן נקודות אפס, אז יש להן גם אותו ציר סימטריה.
- (ד) אם לשתי פונקציות ריבועיות יש אותן נקודות אפס, אז הן שוות.



כמה נתונים ואילו קובעים פרבולה?

14. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $f(x) = 2x^2 + 3x + c$.

בדוק אם יש במשפחה זו פונקציה יחידה לפי כל אחד מהנתונים הבאים.
אם כן, רשום את חוק ההתאמה שלה. אם יש יותר מפונקציה אחת
או שאין פונקציה מתאימה, נמק.

הנתאי	חוק ההתאמה
הגרף חותך את ציר y בנקודה $(0, -1)$	
ציר הסימטריה הוא $x = -1\frac{1}{2}$	
שיעור y של הקודקוד הוא $y_k = -4$	
נקודות האפס שלה $x_1 = 0, x_2 = 3$	
אחת מנקודות האפס שלה היא 1	

15. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $f(x) = ax^2 + bx + 1$. בדוק
אם יש במשפחה זו פונקציה יחידה לפי כל אחד מהנתונים הבאים.
אם כן, רשום את חוק ההתאמה שלה.
אם יש יותר מפונקציה אחת רשום תבנית של חוק התאמה לתת-
משפחה.

הנתאי	חוק ההתאמה
ציר הסימטריה הוא $x = -1$	
נקודת הקודקוד $(-1, 4)$	
הגרף עובר דרך הנקודה $(2, 1)$	
הגרף עובר דרך הנקודות $(2, 1)$, $(-1, 2)$	
הגרף חותך את ציר ה- y בנקודה $(0, 4)$	

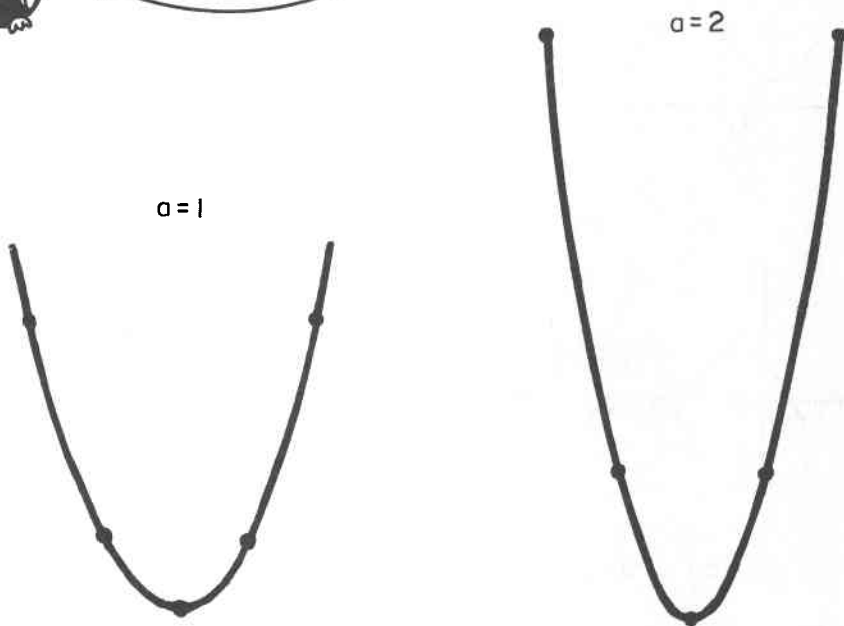
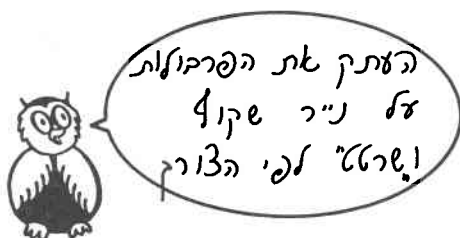
16. נסה למצוא קשר בין מספר הפרמטרים למספר הנתונים הדרושים כדי לקבוע את הפונקציה.
שים לב! נקודת הקודקוד מהווה שני נתונים: שיעוריה, והעובדה שהיא קודקוד.

17. נתונות שלוש נקודות: $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(-1, -8)$.
 מצא פונקציה ריבועית שהגרף שלה עובר דרכן.

הדרכה: ידוע כי הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$ המבוקשת,
 מקיימת: $f(1) = 2$, $f(3) = 4$, $f(-1) = -8$.

לכן עליך לפתור מערכת של שלוש משוואות בשלושה משתנים a , b , c .

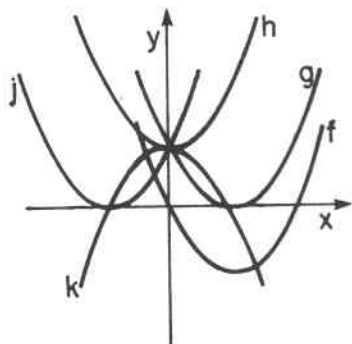
18. האם כל שלוש נקודות קובעות גרף של פונקציה ריבועית? נמק.



תרגילים

תפקידי הפרמטרים

1. התאם גרף לפונקציה



(א) $y = x^2 - 2x + 1$

(ב) $y = 1 - x^2$

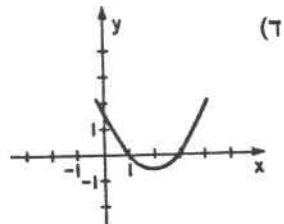
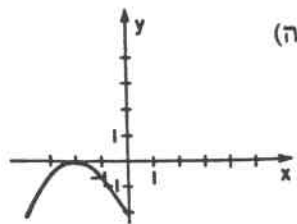
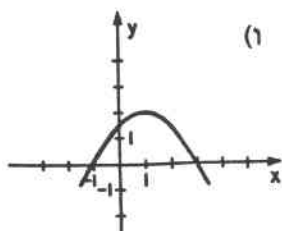
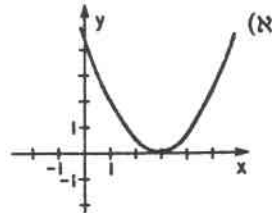
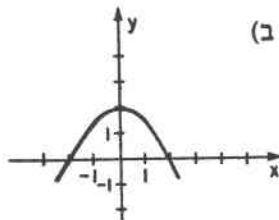
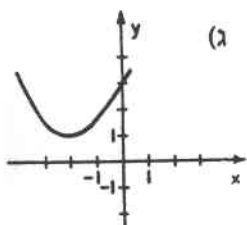
(ג) $y = x^2 - 2x$

(ד) $y = 1 + x^2$

(ה) $y = (x + 1)^2$

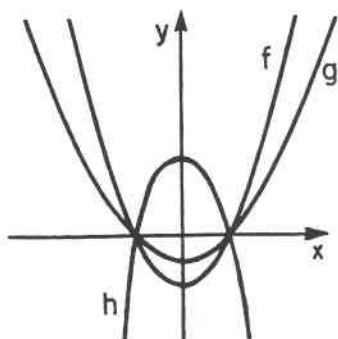
2. רשום חוק התאמה לפונקציות הבאות, בצורה $y = y_k + a(x - x_k)^2$

שים לב! כל אחת מן הפונקציות מתקבלת מהפונקציה $y = \frac{1}{2}x^2$ על ידי שיקוף בציר x ו/או מהזזה אופקית.



פשט כל חוק התאמה לצורה $y = ax^2 + bx + c$ ובדוק לפי c אם החוק שרשמת נכון.

3. בשרטוט שלפניך שלושה גרפים של פונקציות ריבועיות.



$$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

$$h(x) = a_3x^2 + b_3x + c_3$$

(א) סדר את המספרים $0, a_1, a_2, a_3$ לפי סדר עולה.

(ב) סדר את המספרים $0, c_1, c_2, c_3$ לפי סדר עולה.

(ג) מהו לדעתך הסדר בין המספרים $0, b_1, b_2, b_3$?

4. העתק על נייר שקוף את שתי הפרבולות מעמ' 263 "שרטט" (כלומר, הנח במערכת הצירים מעמ' 320) את הגרפים של הפונקציות $y = x^2$, $y = 2x^2$. "שרטט" בעזרת הפרבולות את הגרפים של הפונקציות הבאות ומצא באופן גרפי את נקודות האפס, אם הן קיימות.

(א) $y = 1 + (x - 2)^2$ (ה) $y = (x + 3)^2$

(ב) $y = 4 - (x - 1)^2$ (ו) $y = -1 + (x + 4)^2$

(ג) $y = 2(x - 3)^2$ (ז) $y = 1 - 2x^2$

(ד) $y = 2 - 2(x - 3)^2$ (ח) $y = -1 - 2x^2$

משפחות של פרבולות

5. (א) מה משותף לכל הגרפים של המשפחה $y = 3x^2 + 6x + c$?
 (ב) מצא, מתוך משפחה זו, פונקציה אשר הגרף שלה עובר דרך הנקודה $(2, 30)$.
6. (א) במה דומים הגרפים של המשפחה $y = x^2 + bx + c$?
 (ב) מצא פונקציה ריבועית השייכת למשפחה זו שקודקודה בנקודה $(0, 1)$.
7. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $y = ax^2 - 4x + c$.
 מצא פונקציה ריבועית מן המשפחה שקודקודה הוא $(3, 1)$.
 - בדוק האם גרף הפונקציה שמצאת עובר דרך הנקודה $E(2, 5)$.
8. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות מהצורה:

$$y = ax^2 + 2x + 1$$

 (א) עבור אילו ערכים של a יש לפונקציה השייכת למשפחה, שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ?
 (ב) עבור אילו ערכים של a יש פונקציה השייכת לאותה משפחה עם נקודת מפגש אחת עם ציר ה- x ?
 (ג) עבור אילו ערכים של a כל ערכי הפונקציה חיוביים ?



פסק זמן

באלף תשע מאות שלושים וארבע
 היה מספר שנותיו של סבא
 כשתי הספרות האחרונות של שנת הולדתו.
 ולמרבה ההפתעה, כך קרה לנכדתו.

9. נתונה משפחת הפונקציות מהצורה $y = x^2 + bx$.
התוכל למצוא פרבולה מן המשפחה שקודקודה ברביע ה-I?

10. (א) רשום חוק התאמה למשפחת הפונקציות הריבועיות שציר הסימטריה שלהן הוא $x = 4$. כמה פרמטרים בחוק שרשמת?

(ב) במה שונים הגרפים של הפונקציות מן המשפחה אם ידוע שיש להם אותו קודקוד?

(ג) במה שונים הגרפים של הפונקציות מן המשפחה אם ידוע כי $a = -5$?

11. השלם את הטבלה הבאה על-ידי הוספת "שווה" או "שונה" במשבצת המתאימה.
"שווה" - אם בכל הפונקציות מאותה משפחה (הכתובה משמאל) ה"נתון" המתאים שווה, "שונה" - אם אין הוא שווה בכולן.

חיתוך עם ציר ה-y	חיתוך עם ציר ה-x	תלילות הגרף	ציר הסימטריה	הקודקוד	נתונים המשפחה
					$y = ax^2$ $a \neq 0$
					$y = a(x - 3)^2$ $a \neq 0$
					$y = 2x^2 + mx$
					$y = px^2 + px + 3$ $p \neq 0$
שווה	שווה	שווה	שווה	שווה	תן דוגמה למשפחה המקיימת

כמה נתונים ואילו קובעים פרבולה?

12. מצא, אם אפשר, פונקציה ריבועית לפי התנאים הבאים:

חוק ההתאמה	התנאי	
	הגרף עובר דרך הנקודות (0, 4), (-1, 7), (1, 7)	(א)
	הגרף עובר דרך הנקודות (0, 5), (-1, 2), (3, 2)	(ב)
	הגרף עובר דרך הנקודות (2, 2), (1, -4), (1, 4)	(ג)
	נקודות האפס $x_1 = 4$ $x_2 = 6$ ו- $y_k = 3$	(ד)
	הגרף עובר דרך ראשית הצירים ונקודת הקודקוד (2, 8)	(ה)
	את הגרף $y = -4x^2$ הזיזו במקביל לצירים כך שהקודקוד החדש בנקודה (2, 1)	(ו)

13. שרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות הבאות. שים לב לתחום של כל פונקציה הרשום על ידה.

(א) $y = 4 - (x - 4)^2$ $\{x | 2 < x < 6\}$

(ב) $y = -1 - (x + 5)^2$ $\{x | -7 < x < -3\}$

(ג) $y = -x^2 - 1$ $\{x | -2 < x < 2\}$

(ד) $y = x + 2$ $\{x | -2 < x < 0\}$

(ה) $y = 3x - 13$ $\{x | 3 < x < 4\}$

(ו) $y = 4$ $\{x | -2 < x < -1\}$

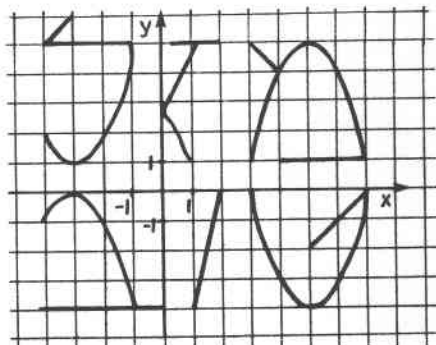
(ז) $y = -5$ $\{x | -1 < x < 2\}$

(ח) $y = -2x + 2$ $\{x | -1 < x < 1\}$

(ט) $y = -5 + (x - 4)^2$ $\{x | 2 < x < 6\}$

(י) $y = -x - 3$ $\{x | -2 < x < -1\}$

14. במערכת הצירים שלפניך משורטטת ברכה המורכבת מפרבולות וישרים. רשום את כל הפונקציות שאילו הגרפים שלהן. אל תשכח תחום מתאים שים לב! כל הפרבולות הן מהמשפחה $a = \mp 1$



מבחן תשובות

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \quad (\text{ב}) \quad y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 \quad (\text{א}) \quad .2$$

$$y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1 \quad (\text{ג})$$

$$y = 3x^2 + 6x + 6 \quad (\text{ב}) \quad .5$$

$$y = x^2 - 2x + 1 \quad (\text{ב}) \quad .6$$

$$y = 2x^2 - 4x + 5 \quad .7$$

$$a > 1 \quad (\text{ג}) \quad a = 1 \quad (\text{ב}) \quad a \neq 0 \quad \text{וגם} \quad a < 1 \quad (\text{א}) \quad .8$$

.9 לא.

$$y = ax^2 - 8ax + c \quad (\text{א}) \quad .10$$

$$y = 3x^2 + 4 \quad (\text{א}) \quad .12$$

$$y = -x^2 + 2x + 5 \quad (\text{ב})$$

$$y = -3x^2 + 30x - 72 \quad (\text{ד})$$

$$y = -2x^2 + 8x \quad (\text{ה})$$

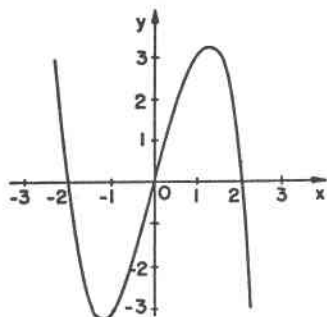
$$y = -4(x - 2)^2 + 1 \quad (\text{ו})$$

פרק ה: תבניות פסוק ריבועיות

משוואות ריבועיות

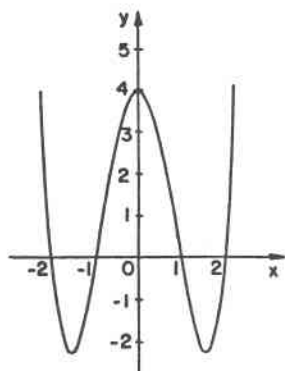
פתרון משוואה ריבועית

1. בכל סעיף נתונים משוואה וגרף של פונקציה.
העזר בגרף הפונקציה כדי למצוא את קבוצת האמת של המשוואה.
(בדוק על ידי הצבה).



(א) גרף הפונקציה: $y = 4x - x^3$

המשוואה: $4x - x^3 = 0$



(ב) גרף הפונקציה: $y = x^4 - 5x^2 + 4$

המשוואה: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

הגדרה:

משוואה ריבועית היא משוואה מהצורה

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ כאשר } a \neq 0$$

2. (א) מצא את נקודות האפס של הפונקציה $y = x^2 + 3x - 4$

(ב) מהי קבוצת האמת של המשוואה $x^2 + 3x - 4 = 0$?

**מספר השייך לקבוצת האמת של משוואה נקרא גם
שורש המשוואה**

3. פתור את המשוואות הריבועיות בדרך אלגברית:

**הדרכה: העזר בנוסחה למציאת נקודות האפס של
פונקציה ריבועית.**

$$(א) \quad x^2 - x - 20 = 0$$

$$(ב) \quad 2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(ג) \quad 2x^2 + 8x + 8 = 0$$

$$(ד) \quad x^2 - 6x + 12 = 0$$

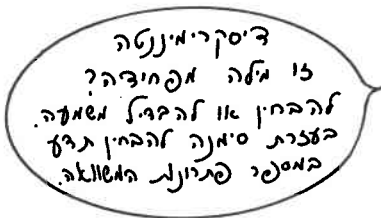
4. העזר בנוסחה למציאת שורשי המשוואה הריבועית ומצא מהו התנאי
שעל a , b ו- c לקיים כדי שלמשוואה $ax^2 + bx + c = 0$

(א) לא יהיה כל פתרון.

(ב) יהיו שני פתרונות שונים.

(ג) יהיה פתרון יחיד.

**לתבנית $b^2 - 4ac$ קוראים הדיסקרימיננטה של
המשוואה הריבועית ומסמנים אותה ב- Δ (דלתא).**



5. (א) כמה פתרונות יש למשוואה הריבועית: $x^2 - 6x + 9 = 0$?

(ב) רשום משוואה ריבועית שיש לה שני פתרונות.

(ג) רשום משוואה ריבועית שאין לה פתרון.



מחשבון לעזרת הפתרון

פתרון משוואה ריבועית מהצורה $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$
 שקול למציאת נקודות האפס של פונקציה מהצורה $ax^2 + bx + c = y$

הנוסחה למציאת הפתרון היא:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה שני פתרונות שונים אם $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

פתרון אחד, אם $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

אין פתרון ממשי, אם $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

לעיתים הפתרונות של משוואה ריבועית הם מספרים אי רציונליים.

דוגמא: $2x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 41$. בדוק!

כלומר: קבוצת האמת היא: $\left\{ \frac{3 + \sqrt{41}}{4}, \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \right\}$

ובקיצור: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$

אפשר למצוא בעזרת מחשבון קירוב רציונלי לשורש

ואז נרשום את קבוצת האמת: $\{2.35, -0.85\}$

ובדרך אחרת הפתרונות הם: $x_1 = 2.35$ $x_2 = -0.85$



שים לב!
 ציגלנו את התוצאה
 רק בסיום החישוב
 ולא במהלכו.

6. פתור את המשוואות הבאות:

(א) $x^2 + x + 1 = 0$

(ב) $2x^2 + 5x - 2 = 0$

(ג) $5x^2 - 22 = 0$

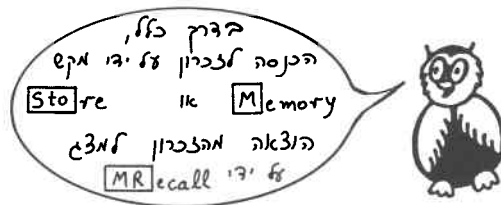
7. נתונה המשוואה $2x^2 - 9x - 180 = 0$

(א) $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-180)$

רשום סדרת לחיצות מתאימה:

	=
	1521

(ב) חשב $\sqrt{\Delta}$ והכנס את התוצאה לזכרון המחשבון.



(ג) פתרון אחד למשוואה הוא $\frac{\sqrt{\Delta} - b}{2a}$

העזר במחשבון ובזכרון ורשום סדרת לחיצות מתאימה

	=
	12

(ד) פתרון שני למשוואה הוא $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

העזר במחשבון ובזכרון ורשום סדרת לחיצות מתאימה

	=
	-7.5

8. פתור בעזרת מחשבון:

$$2x^2 - 3.1x + 5 = 0 \quad (\text{א})$$

$$0.1x^2 + 3x - 4.2 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$x^2 - 47x + 420 = 0 \quad (\text{ג})$$

9. אורך מלבן גדול ב־7 ס"מ מרוחבו. שטח המלבן 638 סמ"ר

(א) רשום תבנית פסוק מתאימה.

(ב) מצא קבוצת אמת לתבנית.

(ג) מהי קבוצת ההצבה המתאימה לתוכן הבעיה (תחום הייעוד)?

(ד) מהן צלעות המלבן?

★ נסה את כוחך

10. לפניך דרך נוספת קצרה יותר לפתרון משוואה ריבועית בעזרת המחשבון.

$$x^2 - 13x - 770 = 0$$

נתונה המשוואה:

(א) חשב את $x_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - b}{2a}$ והכנס את $\sqrt{\Delta}$ לזכרון תוך כדי החישוב.

(ב) הסבר מדוע סדרת הלחיצות הרשומה נותנת את הפתרון השני למשוואה.

x_1	-	MR	÷	a	=
					x_2

פתרון משוואה ריבועית

1. מצא את קבוצת האמת של כל אחת מתבניות הפסוק הבאות:

$$(א) \quad 2x^2 + 7x + 3 = 0 \quad (ו) \quad 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$(ב) \quad x^2 + 9x + 20 = 0 \quad (ז) \quad x^2 - x - 20 = 0$$

$$(ג) \quad x^2 + x - 20 = 0 \quad (ח) \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(ד) \quad 2x^2 + 5x + 3 = 0 \quad (ט) \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(ה) \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad (י) \quad x^2 - 6x + 10 = 0$$

2. מצא את מספר הפתרונות של כל אחת מהמשוואות הבאות בלי לחשבם.

$$(א) \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (ד) \quad 4x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(ב) \quad 4x^2 - 2 + 3x = 0 \quad (ה) \quad (x - 2)^2 = 0$$

$$(ג) \quad 3 + 6x + 3x^2 = 0 \quad (ו) \quad 5x^2 + 4x + 1 = 0$$

3. נתונה משפחת המשוואות $3x^2 + 3x + c = 0$

(א) רשום משוואה מן המשפחה שיש לה שני פתרונות.

(ב) רשום משוואה מן המשפחה שיש לה פתרון אחד.

(ג) רשום משוואה מן המשפחה שאין לה פתרון.

4. פתור את המשוואות הבאות:

שים לב! במשוואות אלה אין צורך להשתמש בנוסחה הכללית.

דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$

השלם: $(x + \square)^2 = 0$ ומצא את קבוצת האמת.

(ז) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

(א) $x^2 - 100 = 0$

(ח) $(x + 4)^2 = 9$

(ב) $400 - x^2 = 0$

(ט) $(x - 3)^2 - 4 = 0$

(ג) $x^2 - 10 = 0$

(י) $-3(x - 3)^2 - 1 = 0$

(ד) $2x(x - 5) = 0$

(יא) $2(x - \sqrt{3})^2 = 0$

(ה) $3x^2 - 5x = 0$

(יב) $x^2 + 64 = 0$

(ו) $(2x + 3)^2 = 0$



(ג) הסכימו כולן להצעה
ומי זכה? מובן לאה.
"אין זו חוכמה" אמרו כולן
"את חישבת זאת כבר מזמן"

(א) יום אחד הציעה לאה
הצעה לחברותיה:
"קחו אתן המחשבון,
אני נייר ועפרון."

(ד) אמרה לאה: "בחרנה אתן,
עד איזה מספר נסכם".
וכך התחרו פעמים רבות
ולא עלה בידן לזכות.

(ב) נעשה נא תחרות
מי ביתר מהירות
מסכם המספרים השלמים
מאחד ועד שלושים."

**התוכלו תלמידים לגלות
את הסוד?**



מחשבון לעזרת הפתרון

5. פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^2 + x - 2 = 0 \quad (\text{א})$$

$$x^2 + \sqrt{8}x - 2 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$2x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (\text{ג})$$

$$x^2 + \sqrt{8}x + 2 = 0 \quad (\text{ד})$$

6. מצא את קבוצת האמת של תבניות הפסוק הבאות (פשט תחילה):

$$\frac{x+2}{3} + \frac{x(x+1)}{6} = -1\frac{2}{3} \quad (\text{יא})$$

$$(x+3)^2 = 4 \quad (\text{יב})$$

$$(x+3)(x+4) = 72 \quad (\text{יג})$$

$$(x+6)(x+2) = -4 \quad (\text{יד})$$

$$(x-3)^2 = x+3 \quad (\text{טו})$$

$$(2x-1)(x-1) = 13-5x \quad (\text{טז})$$

$$(3x+4)(x-1) = 2x^2+2 \quad (\text{יז})$$

$$4 + \frac{2x^2-2x}{3} = 0 \quad (\text{יח})$$

$$(x+1)(x+2) = x^2+3x+2 \quad (\text{יט})$$

$$3x^2-2x+9 = 2x(x-4) \quad (\text{כ})$$

$$x(x+5) - 6 = 0 \quad (\text{א})$$

$$x(x+1) + 5(x+\frac{1}{2}) = 0 \quad (\text{ב})$$

$$x(6x-13) + 2(5x-1) = 0 \quad (\text{ג})$$

$$x(3x-5) - (3x-5) = 0 \quad (\text{ד})$$

$$2x(x+1) - 5 = -3.5 \quad (\text{ה})$$

$$4(x-2.5) = x(x-7) \quad (\text{ו})$$

$$\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} = 0 \quad (\text{ז})$$

$$x + \frac{x^2+x}{2} = 2 \quad (\text{ח})$$

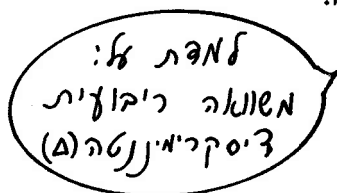
$$\frac{x(x+5)}{2} - 2x + 4 = 0 \quad (\text{ט})$$

$$x(\frac{x}{4} - \frac{2}{5}) - \frac{1}{5} = 0 \quad (\text{י})$$

בבעיות הבאות מצא את קבוצת האמת של התבנית המתאימה ובדוק אילו מאיברי קבוצת האמת מתאימים לתוכן הבעיה.
אל תשכח לרשום תשובה לבעיה.

7. נתונים שני מספרים עוקבים. סכום ריבועיהם שווה ל- 61 מצא את המספרים.
8. מחצית ההיקף של מלבן הוא 15 ס"מ שטח המלבן 50 סמ"ר. מהם אורכי צלעותיו?
9. המספר המתאים להיקף ריבוע במ' שווה לפעמיים המספר המבטא את שטח הריבוע במ"ר. מצא את אורך צלעו.
10. האח הבכור נולד שנתיים לפני אחיו הצעיר. סכום הריבועים של גילי האחים שווה למכפלת סכום הגילים ב- $2\frac{1}{2}$. מצא את סכום גילי האחים
11. גיל האח הבכור שווה לריבוע גיל האח הצעיר. בעוד 3 שנים יהיה גיל האח הבכור כפול מגיל האח הצעיר. מצא את גיל האחים.
12. גיל האב כפול מגיל הבן. בעוד 4 שנים יהיה ריבוע גיל האב גדול פי 100 מגיל הבן לפני 2 שנים. מצא את גיל האב וגיל הבן.
13. בסיום בית הספר החליטו תלמידי כיתה י"ב להחליף ביניהם תמונות, כמה תלמידים בכיתה אם הוחלפו בסך הכל 870 תמונות?
14. במשחקי שחמט שחקן כל שחקן עם כל אחד מן השחקנים האחרים, כמה שחקנים היו אם הם שחקו בסך הכל 36 משחקים.
שים לב! אל תספור משחק אחד פעמיים.
15. כמה צלעות למצולע אשר יש לו 65 אלכסונים?

16. דני אוהב להשתעשע במספרים.
יום אחד מצא חמישה מספרים שלמים עוקבים אשר סכום הריבועים של שלושת המספרים הראשונים שווה לסכום הריבועים של שני המספרים האחרונים.
מהם המספרים שמצא דני?
17. אורך היתר במשולש ישר זווית הוא 15 ס"מ.
אורכו של אחד הניצבים גדול פי $1\frac{1}{3}$ מאורך הניצב השני.
מצא את היקף המשולש.
18. המרחק בין צמרות שני ברושים גדול פי 1.25 מן המרחק בין גזעיהם, אחד הברושים גבוה מן השני ב-1.5 מ'
מהו המרחק בין גזעי הברושים?
19. ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי, גדולה ב-2 מספרת יחידותיו.
מכפלת ספרותיו של המספר גדולה ב-7 מסכום ספרותיו. מהו המספר?
20. ספרת העשרות במספר תלת ספרתי גדולה מספרת המאות באחד וקטנה מספרת האחדות באחד. מכפלת המספר הנ"ל (בעל שלוש הספרות) בסכום ספרותיו, שווה ל-738. מצא את המספר.
21. בתחילת השנה היה מחיר טון ברזל 2000 ש"ח לאחר שמחיר הברזל עלה פעמיים ובכל פעם באותו אחוז, הגיע מחיר טון ברזל ל-2420 ש"ח. מצא בכמה אחוזים עלה מחיר הברזל בכל פעם?
22. בתנאים רגילים מקבלים ריבית על הפקדת חסכון בבנק. הרווח מצטרף לקרן כל שנה וגם עליו מחשבים ריבית. מהו אחוז הריבית אם מקרן של 2500 ש"ח קבלו בסוף שנתיים 2704 ש"ח.



מבחן תשובות

1. (א) $\{-3, -\frac{1}{2}\}$ (ב) $\{-5, -4\}$ (ג) $\{-5, 4\}$ (ד) $\{-1.5, -1\}$ (ה) $\{-\frac{1}{2}, 3\}$
- (ו) $\{-3, \frac{1}{2}\}$ (ז) $\{-4, 5\}$ (ח) $\{4\}$ (ט) $\{1, 1.5\}$ (י) $\{\}$
2. (א) 2 (ב) 2 (ג) 1 (ד) 0 (ה) 1 (ו) 0
4. (א) $\{-10, 10\}$ (ב) $\{-20, 20\}$ (ג) $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$ (ד) $\{0, 5\}$
- (ה) $\{0, \frac{5}{3}\}$ (ו) $\{-1.5\}$ (ז) $\{-\frac{1}{2}\}$ (ח) $\{-1, -7\}$
- (ט) $\{1, 5\}$ (י) $\{\}$ (יא) $\{\sqrt{3}\}$ (יב) $\{\}$
5. (א) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ (ב) $x_{1,2} = \frac{-\sqrt{8} \pm 4}{2} = -\sqrt{2} \pm 2$
- (ג) $\{\}$ (ד) $x = \frac{-\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$
6. (א) $\{-6, 1\}$ (ב) $x_{1,2} = -3 \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$
- (ג) $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$ (ד) $\{1, \frac{5}{3}\}$
- (ה) $\{0.5, -1.5\}$ (ו) $\{10, 1\}$ (ז) $\{\}$ (ח) $\{-4, 1\}$ (ט) $\{\}$
- (י) $\{2, -0.4\}$ (יא) $\{\}$ (יב) $\{-5, -1\}$ (יג) $\{5, -12\}$ (יד) $\{-4\}$
- (טו) $\{1, 6\}$ (טז) $\{-3, 2\}$ (יז) $\{-3, 2\}$ (יח) $\{\}$ (יט) R (כ) $\{-3\}$
7. 5 ר" 6 או 6 ר" 5 .8 5 ס"מ ר" 10 ס"מ .9 2 מ'
10. 3 שנים ושנה אחת .11 9 שנים ר" 3 שנים .12 36 שנה ר" 18 שנה
13. 30 תלמידים .14 9 שחקנים .15 13 צלעות
16. -2, -1, 0, 1, 2 או 10, 11, 12, 13, 14.
17. 36 ס"מ .18 2 מ' .19 53 .20 123 .21 10% .22 4%

תבניות פסוק מורכבות

1. פתור את שתי המשוואות

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = 3 \quad \text{(ב)} \quad x^2 + 5x + 6 = 3(x + 3) \quad \text{(א)}$$

- האם המשוואות שקולות?

- מהי קבוצת ההצבה של משוואה (ב)?

- מהי קבוצת האמת של כל אחת מהמשוואות?

$$\frac{x^2 + 12x + 26}{x + 2} = 3 \quad \text{נתונה משוואה:} \quad 2.$$

(א) מהי קבוצת ההצבה של המשוואה?

(ב) השלם את מהלך הפתרון:

$$x^2 + 12x + 26 = 3(x + 2) \quad \text{וגם} \quad x \neq -2$$

$$(x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ או } x = \underline{\hspace{2cm}}) \quad \text{וגם} \quad x \neq -2$$

קבוצת האמת:

3. מחיר השכרת טיולית לטיול היא 800 ש"ח.

תלמידי כיתה ט' התבקשו לחלק את הסכום ביניהם באופן שווה. ביום

הטיול נעדרו 8 תלמידים לכן היה על כל תלמיד להוסיף 5 ש"ח.

כמה תלמידים בכתה ט'?

תרגילים

1. מצא את קבוצת האמת של כל תבנית מתבניות הפסוק הבאות:

$$\frac{x^2 + 16x}{x + 1} = 12 \quad (\text{ט}) \quad \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1} = 0 \quad (\text{א})$$

$$\frac{x^2 - 3x}{x} = 0 \quad (\text{י}) \quad \frac{(x + 3)^2 - 4}{x + 1} = 0 \quad (\text{ב})$$

$$\frac{x(3x - 5) - 1}{x - 2} = 3 \quad (\text{יא}) \quad \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 2 \quad (\text{ג})$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x} = 0 \quad (\text{יב}) \quad \frac{x^2 + 5x - 36}{x + 9} = 0 \quad (\text{ד})$$

$$\frac{(x + 4)(x + 1)}{x + 5} = 0 \quad (\text{יג}) \quad \frac{(x - 3)x}{x - 3} = 3 \quad (\text{ה})$$

$$\frac{3x^2 + 5x - 20}{x} = 1 \quad (\text{יד}) \quad \frac{2x + 4}{x + 2} = 4 \quad (\text{ו})$$

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 4} = 0 \quad (\text{טו}) \quad \frac{x^2 + 2x}{x + 2} = 3 \quad (\text{ז})$$

$$\frac{x^2 - 3x + 10}{x - 4} = 0 \quad (\text{טז}) \quad \frac{x^2 + 4x}{x + 4} = -2 \quad (\text{ח})$$

$$\frac{120}{x} = \frac{100}{x+30} + 4 \quad \text{דוגמא:}$$

נכפול ב $x(x+30)$ את שני אגפי המשוואה:

$$120(x+30) = 100x + 4x(x+30) \quad \text{וגם } x \neq 0 \text{ וגם } x \neq -30$$

המשך לפתור.

קבוצת האמת: $\{20, -45\}$

$$\frac{120}{20} = \frac{100}{50} + 4 \quad \leftarrow 20 \quad \text{בדיקה:}$$

$$6 = 2 + 4$$

$$\frac{120}{-45} = \frac{100}{-15} + 4 \quad \leftarrow -45$$

$$-2\frac{2}{3} = -6\frac{2}{3} + 4$$

$$\frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1 \quad (\text{ג}) \quad \frac{x-6}{3x-10} = \frac{x-1}{2x-11} \quad (\text{א})$$

$$\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = \frac{10}{3} \quad (\text{ד}) \quad \frac{x}{x+4} + \frac{x}{x-4} = 5\frac{5}{9} \quad (\text{ב})$$

3. משקל כל המזון של כיתה בטיול שנתי הוא 96 ק"ג. כל אחד

מהתלמידים נשא משקל שווה.

כאשר התחילה העליה על ההר, נתקשו שמונה מן התלמידים בהליכה

ואז פרקו מהם את משאם. כך נאלץ כל אחד מהתלמידים הנותרים

לסחוב ב 1 ק"ג יותר מבתחילה.

כמה תלמידים היו בכיתה?

4. בית מלאכה לחייטות קיבל הזמנה למספר חליפות.

לשם ביצוע ההזמנה ניקנו 75 מ' בד משני מינים. מחירו של 1 מ' בד

ממין אחד היה נמוך ב- 7.5 ש"ח ממחירו של 1 מ' בד מהמין השני.

בעד הבד הזול שילמו 1500 ש"ח בסה"כ ובעד היקר 1575 ש"ח.

כמה מטרים בד ניקנו מכל מין?

5. קבוצת תלמידים קנתה בערב סיום שנת הלימודים 28 כרטיסים לתיאטרון. הכרטיסים היו משני סוגים, זולים ויקרים. מחיר כל הכרטיסים הזולים 99 ש"ח והיקרים 80 ש"ח. המחיר הכולל של 3 כרטיסים יקרים היה ב- 2 ש"ח גבוה ממחירם הכולל של 4 כרטיסים זולים.

(א) כמה כרטיסים מכל סוג קנו התלמידים הנ"ל?

(ב) מה היה מחיר כרטיס מכל סוג?

6. חלקת אדמה בבית ספר חקלאי נתנה יבול של 7200 ק"ג תפוחי אדמה, ואילו חלקה שניה, ששטחה גדול ב- 300 מ"ר מהראשונה, נתנה 6000 ק"ג בלבד. מ- 1 מ"ר של החלקה הראשונה אספו ב- 2 ק"ג תפוחי אדמה יותר מאשר מ- 1 מ"ר של החלקה השניה בממוצע. מצא את שטחה של כל אחת מהחלקות ואת כמות תפוחי האדמה (בק"ג) שאספו מ- 1 מ"ר בכל אחת מהחלקות.

7. המרחק בין תחנות A ו B הוא 160 ק"מ. בשעה 07.00 בבוקר יצאה מ A ל B רכבת משא, ובשעה 08.00 בבוקר - רכבת נוסעים מתחנה C ל B. התחנה C נמצאת בין A ל B במרחק 40 ק"מ מ A.

מהירותה של רכבת הנוסעים גדולה ב-30 ק"מ לשעה מזו של רכבת המשא (מהירויות הרכבות אינן משתנות משעה לשעה), והיא מגיעה ל B 20 דקות לפני רכבת המשא.

מהי מהירותה של רכבת המשא?

8. רוכב אופניים יצא ממקום מגוריו אל העיר הנמצאת במרחק של 30 ק"מ משם. לאחר שעה נסיעה במהירות קבועה התברר לו כי אם ימשיך באותה מהירות יאחר ב- $\frac{1}{4}$ שעה. לכן הגדיל את מהירותו ב 5 ק"מ לשעה והגיע לעיר במועד ללא איחור. מה היתה מהירותו של רוכב האופניים בתחילה (בשעה הראשונה לנסיעתו)?

9. שתי ערים שוכבות לחופו של נהר אחד. המרחק בין הערים בדרך הנהר הוא 80 ק"מ. אוניה עוברת מרחק זה הלך וחזור ב 8 שעות ו 20 דקות. חשב את מהירות האוניה במים עומדים אם מהירות זרם המים בנהר היא 4 קמ"ש.

מבחר תשובות

1. (א) 1.5 (ב) -5 (ג) 2 (ד) 4 (ה) $\{ \}$ (ו) $\{ \}$ (ז) 3

(ח) -2 (ט) $\{ \}$ (י) 3 (יא) $\{ \frac{5}{3}, 1 \}$ (יב) $\{ 1, 2 \}$

(יג) $\{-4, -1\}$

2. (א) $\{-14, 4\}$ (ב) $\{-5, 5\}$ (ג) $\{0.76, 5.24\}$ (ד) $\{-6, 6\}$

3. 32

4. 40 מ' בד זול ו-35 בד יקר.

5. (א) 18 כרטיסים זולים ו-10 כרטיסים יקרים
(ב) כרטיס זול: 5.5 ש"ח כרטיס יקר: 8 ש"ח.

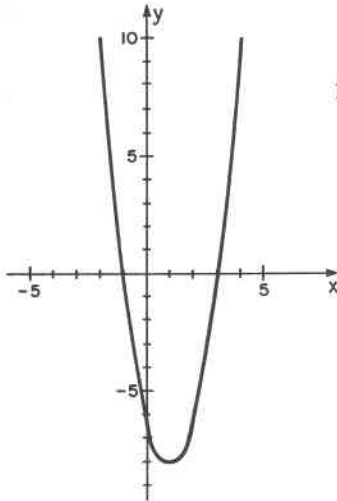
6. שטח: חלקה א' - 1200 מ"ר חלקה ב' - 1500 מ"ר
כמות תפוחי האדמה: 6 ק"ג למ"ר בחלקה א' ו-4 למ"ר בחלקה ב'.

7. 60 קמ"ש

8. 15 קמ"ש

9. 20 קמ"ש.

אי שוויון ריבועי



1. לפניך גרף הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

(א) סמן $<$ או $>$ או $=$ (ללא הצבה)

$$f(1) \text{ ______ } 0$$

$$f(-1) \text{ ______ } 0$$

$$f(0) \text{ ______ } 0$$

$$f(5) \text{ ______ } 0$$

(ב) נתון כי $f(x) < 0$ מהו x ?

(ג) מצא את קבוצת האמת של התבנית $2x^2 - 4x - 6 > 0$

2. נתונה פונקציה ריבועית $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

נקודות האפס שלה $x_1 = 2$ $x_2 = 4$ (בדוק). שרטט סקיצה של גרף הפונקציה, והתאם בעזרתו לכל תבנית פסוק את קבוצת האמת שלה.

$$A = \{2, 4\} \quad \text{(א) } -x^2 + 6x - 8 > 0$$

$$B = \{x \mid x < 2 \text{ או } x > 4\} \quad \text{(ב) } -x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$C = \{x \mid 2 < x < 4\} \quad \text{(ג) } -x^2 + 6x - 8 \geq 0$$

$$D = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\} \quad \text{(ד) } -x^2 + 6x - 8 < 0$$

3. נתונה פונקציה ריבועית $y = x^2 + 3x - 4$. עבור אילו מאיברי התחום הפונקציה חיובית?

4. מצא את קבוצת האמת של התבניות הבאות:

$$\text{(א) } 2x^2 + 7x - 4 < 0 \quad \text{(ב) } 2x^2 + 7x - 4 \geq 0$$

5. מצא את קבוצת האמת של התבניות הבאות:

$$\text{(א) } -x^2 + x - 1 < 0 \quad \text{(ג) } -x^2 + x - 1 \leq 0$$

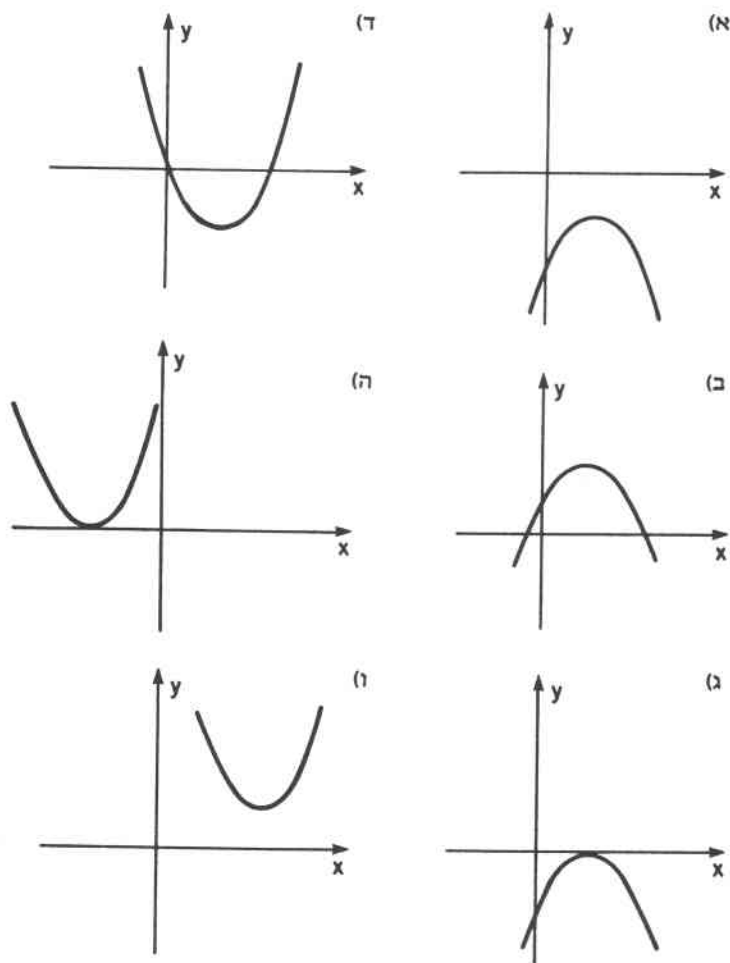
$$\text{(ב) } -x^2 + x - 1 > 0 \quad \text{(ד) } -x^2 + x - 1 \geq 0$$

6. כל אחד מהגרפים הבאים מתאר פונקציה מהצורה

$$y = ax^2 + bx + c$$

רשום את הפתרון של אי השוויון:

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{לגבי כל גרף}$$



כדי לפתור תבנית פסוק שהיא אי שוויון ריבועי, משרטטים על פי a ועל פי נקודות האפס (אם הן קיימות) סקיצה של גרף הפונקציה, וקוראים מן הסקיצה את קבוצת האמת.

1. מצא את קבוצת האמת של כל אחת מתבניות הפסוק הבאות:

$$(א) \quad x^2 - 5x + 4 \leq 0 \quad (ז) \quad 2x^2 - 3x - 3 \geq -2x$$

$$(ב) \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0 \quad (ח) \quad 11 - (x - 4)^2 > (x + 7)(x - 2)$$

$$(ג) \quad -2x^2 - 5x + 7 \geq 0 \quad (ט) \quad \frac{(x - 3)(x - 2)}{2} < 2$$

$$(ד) \quad -x^2 + x + 12 \leq 0 \quad (י) \quad (x - 5)^2 + (x + 3)^2 \leq 16x - 8$$

$$(ה) \quad x^2 + 3x + 4 > 0 \quad (יא) \quad [3(x + 2) + 2(x - 1)]^2 - 1 = 0$$

$$(ו) \quad x^2 + 2(x - 5) = 5 \quad (יב) \quad \frac{(2x - 1)^2}{-4} < 9$$

2. נתונה תבנית הפסוק הבאה $x^2 - 4 \geq 0$

נתבונן בדרך הפתרון הבאה: $x^2 - 4 \geq 0$

$$x^2 \geq 4$$

$$x \geq \pm 2$$

$$x \geq 2 \quad \text{לכן}$$

קבוצת האמת: $\{x \mid x \geq 2\}$

(א) הדרך הנ"ל שגויה. היכן השגיאה?

(ב) הצג דרך פתרון נכונה.

3. פתור את תבניות הפסוק

$$(א) \quad x^2 < 3 \quad (ב) \quad 2x^2 \geq 5$$

4. מה תוכל לומר על שני מספרים שלמים עוקבים אשר סכום ריבועיהם קטן מ 205?

5. מהו התחום בו נמצא מספר אשר ריבועו גדול ממנו ביותר מ 72?

6. בחורש 5000 עצים, כל שנה גדל מספר העצים ב-P אחוזים. באיזה תחום צריך להמצא P על מנת שמספר העצים לאחר שנתיים יהיה גדול מ 7200 עצים?

7. ירקן קנה תפוחי עץ ושילם תמורתם 100 ש"ח. 10 ק"ג התקלקלו, ואת השאר מכר ברווח של 1 ש"ח לק"ג. ברווח של הירקן מתפוחי העץ ניתן לקנות למעלה מ-10 ק"ג נוספים, מה תוכל לומר על מספר הקילוגרמים של תפוחי עץ שקנה הירקן?

8. באיזה תחום חייב להימצא מספר חיובי כך שהסכום שלו עם המספר ההופכי לו יהיה קטן מ-2?

9. התחום של כל אחת מהפונקציות הבאות הוא הגדול ביותר האפשרי. מצא את התחום של כל פונקציה.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (\text{א})$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{ג})$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} \quad (\text{ד})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \quad (\text{ה})$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2} \quad (\text{ו})$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \quad (\text{ז})$$

מבחן תשובות

1. (א) $\{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$ (ב) $\{x \mid x \leq -3 \text{ או } x \geq 1\}$

(ג) $\{x \mid -3.5 \leq x \leq 1\}$ (ד) $\{x \mid x \leq -3 \text{ או } x \geq 4\}$

(ה) R (ו) $\{3, -5\}$

(ז) $\{x \mid x \leq -1 \text{ או } x \geq 1.5\}$ (ח) $\{x \mid -1.5 \leq x < 3\}$

(ט) $\left\{x \mid \frac{5 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right\}$ (י) $\{x \mid 3 \leq x \leq 7\}$

(יב) R

(יא) $\{-1, -0.6\}$

3. (א) $\{x \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

(ב) $\{x \mid x \leq -\sqrt{2.5} \text{ או } x \geq \sqrt{2.5}\}$

4. $\{x \mid -10 \leq x \leq 9, -x \text{ שלם}\}$

5. $\{x \mid x < -8 \text{ או } x > 9\}$

6. $P > 20\%$

7. הירקן קנה למעלה מ-50 ק"ג תפוחים.

8. אין מספר חיובי כזה.

9. (א) $\{x \mid x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\}$ (ב) $\{\text{כל המספרים}\}$

(ג) $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ (ד) $\{x \mid -1 \leq x \leq -2 \text{ או } x \leq -2\}$

(ה) $\{x \mid -1 < x < -2 \text{ או } x < -2\}$ (ו) $\{0\}$ (ז) $\{\text{כל המספרים}\}$

משוואות פרמטריות

1. לפניך משפחת משוואות: $2x^2 - 3mx - 2m^2 = 0$

(א) הצב $m = 2$ ומצא את שורשי המשוואה המתקבלת.

(ב) הצב $m = 3$ ומצא את שורשי המשוואה המתקבלת.

(ג) נבטא את שורשי משפחת המשוואות באמצעות הפרמטר m .

$$x = \frac{3m \pm \sqrt{\quad}}{4} \quad \text{השלם:}$$

$$x_1 = \quad \quad \quad x_2 = \quad \quad \quad$$

(ד) הראה כי הפתרונות שמצאת ב (א) וב) מתקבלים על ידי הצבה ב (ג).

2. נתונה משפחת המשוואות $x^2 + kx + (k - 1) = 0$

(א) הבע את שורשי משפחת המשוואות באמצעות הפרמטר k

$$\pm\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \pm\sqrt{(a + b)^2} = \pm(a + b) \quad \text{שים לב!}$$

(ב) אחד השורשים שהתקבל ב (א) אינו תלוי ב- k . הסבר משמעות תוצאת זו. מה תוכל לומר בהקשר לכך על משפחת הפונקציות

$$y = x^2 + kx + (k - 1)$$

(ג) מצא משוואה מן המשפחה שיש לה פתרון אחד בלבד. מהו הפתרון?

3. לפניך משפחת המשוואות: $x^2 + (2 - 2m)x + 6m - 11 = 0$

(א) כדי שלמשוואה יהיה פתרון יחיד צריך להתקיים $\Delta = 0$. מצא עבור אילו ערכים של m מתקיים תנאי זה?

(ב) הצב במקום m את המספרים שמצאת ומצא את הפתרון היחיד של שתי המשוואות שהתקבלו.

(ג) מצא עבור אילו ערכים של m יהיו למשוואה שני פתרונות. הדרכה: מצא פתרון של אי השוויון $\Delta > 0$ על ידי שרטוט סקיצה של הפונקציה שמצאת עבור הדיסקרימיננטה.

תרגילים

1. בטא את שורשי המשוואות הפרמטריות הבאות בעזרת הפרמטר

$$x^2 - 4ax + 3a^2 = 0 \quad (\text{א})$$

$$x^2 - 13mx + 36m^2 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$6x^2 + 5bx + b^2 = 0 \quad (\text{ג})$$

$$2x^2 + (m + 2)x + m = 0 \quad (\text{ד})$$

$$9x^2 - (9n + 3)x + 2n^2 + 3n - 2 = 0 \quad (\text{ה})$$

$$4x^2 - (4c - 2)x + c^2 - c = 0 \quad (\text{ו})$$

2. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר יש למשוואה פתרון יחיד, ומצא, אם אפשר, את הפתרון.

הדרכה: הצג תנאי לגבי Δ .

$$x^2 + 2ax + 2a^2 - 1 = 0 \quad (\text{א})$$

$$3x^2 - 3ax + a^2 - 1 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$ax^2 + (2 - 4a)x + 1 = 0 \quad (\text{ג})$$

$$(2a + 1)x^2 + (5a + 2)x + 4a + 1 = 0 \quad (\text{ד})$$

$$(a + 1)x^2 - (2a + 1)x + a = 0 \quad (\text{ה})$$

3. הבא את המשוואות הפרמטריות הבאות לצורה $ax^2 + bx + c = 0$

$$(א) \quad x^2 - 3kx + 2k^2 - 2x - 2k - 35 = 0$$

$$(ב) \quad (x + 40)(x - 3) = kx$$

$$(ג) \quad \frac{6x + 2}{x^2 + x + 1} = m$$

$$(ד) \quad x \neq \pm 1 \quad \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1} = a$$

4. הוכח כי למשוואה $x^2 - 4x = p^2 + 2px$ אין פתרון יחיד עבור שום ערך של p .

5. נתונה משפחת המשוואות $mx^2 + 2x - m = 0$, $m \neq 0$

(א) הוכח כי עבור כל ערך של m יש למשוואה שני שורשים ממשיים.

(ב) הוכח כי אחד השורשים הוא הנגדי להופכי של השורש השני.

6. (א) עבור איזו ערך של m יש למשוואה

$$x^2 - 2x + 2m^2 = 3mx + 3m + 35$$

פתרון יחיד.

(ב) הוכח כי עבור כל ערך של m יש למשוואה הנ"ל פתרונות ממשיים.

7. אורכי הצלעות של מלבן הן שורשי המשוואה הריבועית

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

(א) הבע את שטח המלבן ואת היקפו באמצעות a , b ו- c .

(ב) הבע את קוטר המעגל החוסם את המלבן באמצעות a , b ו- c .

$$\text{דמז:} \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

מבחר תשובות

1. (א) $3a, a$ (ב) $4m, 9m$ (ג) $-\frac{b}{2}, -\frac{b}{3}$

(ד) $-\frac{m}{2}, -1$ (ה) $\frac{2n-1}{3}, \frac{n+2}{3}$ (ו) $\frac{c}{2}, \frac{c-1}{2}$

2. (א) $a = \pm 1$ (ב) $a = \pm 2$ (ג) $a = \frac{1}{4}, a = 1$ (ד) $a = 0, a = -\frac{4}{7}$

(ה) אין פתרון יחיד עבור אף ערך של a .

3. (א) $x^2 - (3k + 2)x + (2k^2 - 2k - 35) = 0$

(ב) $x^2 + (37 - k)x - 120 = 0$

(ג) $mx^2 + (m - 6)x + (x - 2) = 0$

(ד) $ax^2 - (a + 2)x + 1 = 0$

6. (א) $m = -12$

7. (א) השטח: $\frac{c}{a}$ ההיקף $-\frac{2b}{a}$

(ב) $\sqrt{\frac{b^2 - 2ac}{a}}$

זוגות של פונקציות

1. לפניך הגרפים של הפונקציות

$$f(x) = (x - 3)^3$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 3$$

(א) קרא מן הגרף את הפתרונות

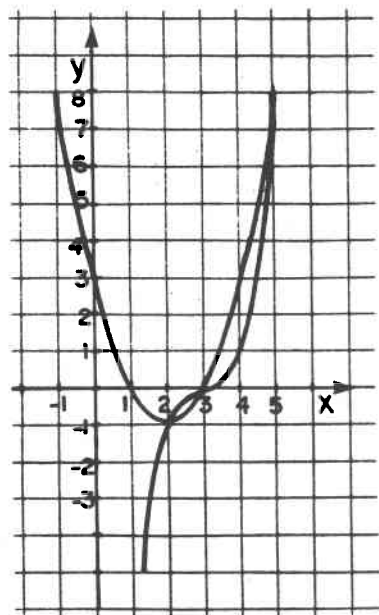
של המשוואות הבאות:

$$g(x) = 0$$

$$g(x) = 3$$

$$f(x) = 8$$

$$f(x) = g(x)$$



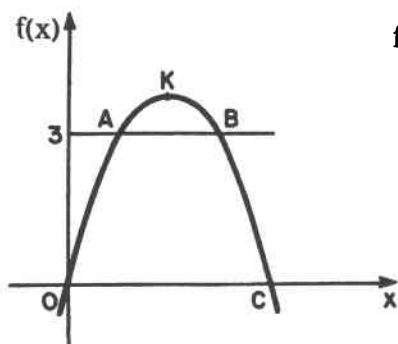
(ב) רשום בעזרת תבניות מספר את תבניות הפסוק שפתרת, ובדוק על ידי הצבה את פתרונותיך.

2. מצא נקודות משותפות (אם ישנן) לגרפים של הפונקציות הבאות:

(א) $g(x) = x + 2$ $f(x) = x^2$

(ב) $g(x) = 2x - 16$ $f(x) = x^2 - 6x$

(ג) $g(x) = 2x^2 + 3$ $f(x) = x^2 + 2x$



3. נתון גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 4x$

AB מקביל לציר x.

מצא את שיעורי הנקודות

K, C, B, A

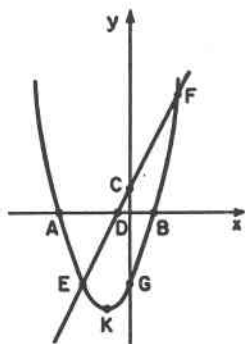
4. נתונים הגרפים של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$

$$g(x) = 4x + 2$$

מצא את שיעורי הנקודות

A , B , C , D , E , F , G , K



הגדרה:

אם קיימת רק נקודת מפגש אחת לגרפים של שתי פונקציות האחת קווית והשנייה ריבועית, הישר נקרא משיק לפרבולה.

5. (א) בדוק אם הישר $y = 5x + 1$ משיק לפרבולה $y = x^2 + 3x + 2$ אם כן מהי נקודת ההשקה?

(ב) מצא את הישר מן המשפחה $y = 2x + n$, המשיק לפרבולה $y = x^2 + 4x + 4$.

(ג) מצא את הישר מן המשפחה $y = c$, המשיק לפרבולה $y = x^2 + 2x - 3$.

תרגילים

1. מצא נקודות המשותפות לגרפים של הפונקציות הבאות:

(א) $g(x) = x + 2$, $f(x) = x^2 + 6x + 8$

(ב) $g(x) = -10$, $f(x) = x^2 - 7x$

(ג) $f(x) = 5x - 11$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(ד) $g(x) = -8x + 9$, $f(x) = -2x^2 + 3x$

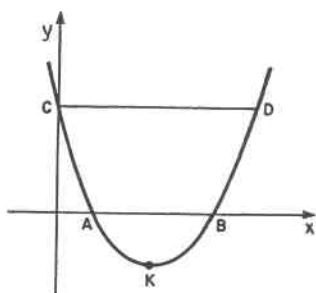
(ה) $g(x) = x^2 + 2$, $f(x) = 4 - x^2$

(ו) $g(x) = -x^2$, $f(x) = -2x^2 + 3x - 2$

(ז) $g(x) = -2x^2 + 2x$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$

(ח) $g(x) = x^2 - 5x + 4$, $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

(ט) $g(x) = -4x^2 + 16$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$

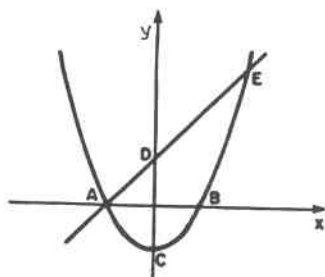


2. נתון גרף הפונקציה

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

מצא את שיעורי הנקודות:

A, B, C, D, K



3. נתונים הגרפים של הפונקציות:

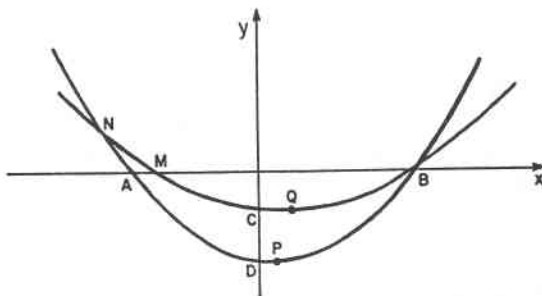
$$g(x) = x + 1 \quad f(x) = x^2 - 1$$

מצא את שיעורי הנקודות:

A, B, C, D, E

4. (א) נתונים הגרפים של הפונקציות $f(x) = 2x^2 - x - 15$ ו- $g(x) = x^2 - x - 6$. (P ו Q נקודות הקודקוד) זהה את הגרף המתאים לכל אחת מהן.

(ב) מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, D, M, N, P, Q.

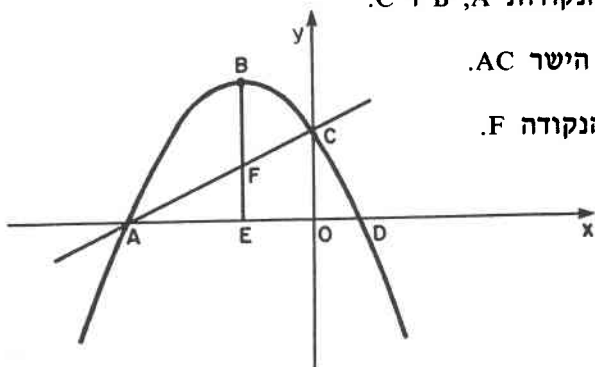


5. נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

(א) חשב את שיעורי הנקודות A, B ו C.

(ב) מצא את משוואת הישר AC.

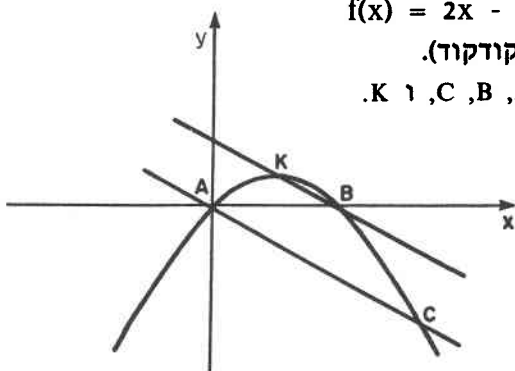
(ג) מצא את שיעורי הנקודה F.



6. נתון הגרף של הפונקציה $f(x) = 2x - x^2$

AC מקביל ל BK (K הוא הקודקוד).

מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, K.



7. ישר חותך את גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 5x + 6$

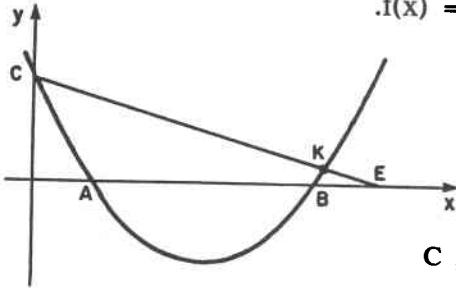
בשתי נקודות A ו-B. נתון כי $x_A = 1$, $x_B = 5$.

(א) רשום פונקציה $g(x)$ שהישר AB הוא הגרף שלה.

(ב) עבור אלו ערכים של x $f(x) > g(x)$?

(ג) עבור אלו ערכים של x $g(x) > f(x)$?

8. נתון גרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 5$.



(א) מצא את שיעורי הנקודות A, B, C

(ב) הישר CE חותך את ציר x בנקודה $x = 6$

כתוב משוואת הישר CE בצורה $y = ax + b$

(ג) פתור את אי השוויון

$$x^2 - 6x + 5 < ax + b$$

9. בשרטוט גרפים של הפונקציות:

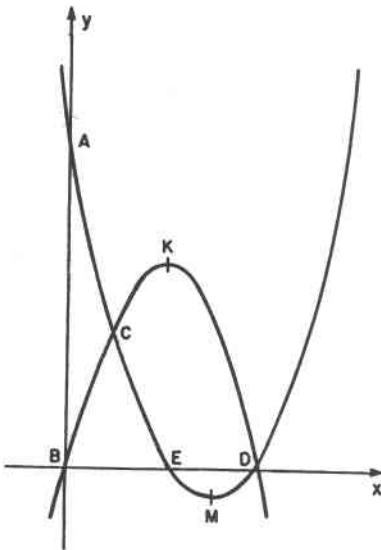
$$f(x) = -x^2 + 4x$$

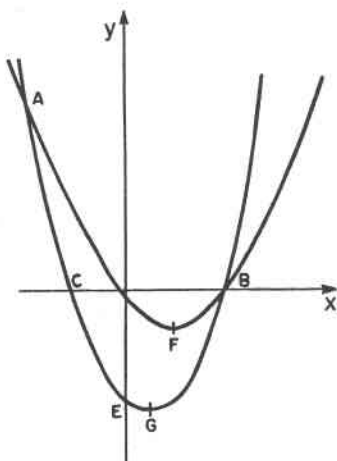
$$g(x) = x^2 - 6x + 8$$

(א) מצא את שיעורי הנקודות המסומנות בשרטוט

(ב) פתור את אי השוויון

$$f(x) < g(x)$$





10. בשרטוט גרפים של פונקציות:

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

$$g(x) = x^2 - 2x$$

(א) מצא את שיעורי הנקודות המסומנות בשרטוט

(ב) מצא את קבוצת האמת של כל אחת מתבניות הפסוק הבאות:

i. $g(x) > 0$

ii. $f(x) \leq 0$

iii. $g(x) \geq f(x)$

11. בדוק האם הישר בכל אחד מהמקרים משיק לפרבולה. אם כן, מצא את נקודת ההשקה.

(א) $f(x) = x^2 - 5x$, $g(x) = x - 9$

(ב) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x - 1$

(ג) $f(x) = x^2 - 8x + 15$, $g(x) = 2x - 10$

12. כמה נקודות משותפות יש לגרפים של כל זוג פונקציות?

(א) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -2x^2$

(ב) $f(x) = x^2 + 5x + 6$, $g(x) = x + 3$

(ג) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = 4$

(ד) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $g(x) = -x^2 + x$

מבחר תשובות

1. א) $(-2, 0)$ $(-3, -1)$ ב) $(5, -10)$ $(2, -10)$
 ג) $(2, -1)$ $(7, 24)$ ד) $(4.5, -27)$ $(1, 1)$
 ה) $(-1, 3)$ $(1, 3)$ ו) $(2, -4)$ $(1, -1)$
 ז) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ $(1, 0)$ ח) $(\frac{5}{3}, -\frac{14}{9})$ $(1, 0)$
2. A(1, 0), B(5, 0), C(0, 5), D(6, 5), K(3, -4)
3. A(-1, 0), B(1, 0), C(0, -1), D(0, 1), E(2, 3)
4. א) $(-2.5, 0)$ B(3, 0) C(0, -6) D(0, -15)
 M(-2, 0) N(-3, 6) P($\frac{1}{4}, -15\frac{1}{8}$) Q($\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}$)
5. א) $(-4, 0)$ B(-1.5, 6.25) C(0, 4)
 ב) $y = x + 4$ ג) F(-1.5, 2.5)
6. A(0, 0) B(2, 0) C(3, -3) K(1, 1)
7. א) $y = x + 1$ ב) $\{x \mid x > 5 \text{ או } x < 1\}$ ג) $\{x \mid 1 < x < 5\}$
8. א) $(1, 0)$ B(5, 0) C(0, 5) ב) $y = -\frac{5}{6}x + 5$
 ג) $\{x \mid 0 < x < 5\frac{1}{6}\}$
9. א) $(0, 8)$ B(0, 0) C(1, 3) D(4, 0) E(2, 0) M(3, -1) K(2, 4)
 ב) $\{x \mid x < 1 \text{ או } x > 4\}$
11. א) $(3, -6)$ ב) לא ג) $(5, 0)$
12. א) אין ב) שתיים ג) אחת ד) אין.

מן הפתרונות אל המשוואה הריבועית

1. מצא בין הפונקציות הבאות זוגות של פונקציות בעלות אותן נקודות אפס

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 \quad (\text{ד}) \quad f(x) = x^2 + 5x + 6 \quad (\text{א})$$

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (\text{ה}) \quad f(x) = (x + 3)(x - 2) \quad (\text{ב})$$

$$f(x) = (x - 3)^2 \quad (\text{ו}) \quad f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad (\text{ג})$$

2. (א) מצא את נקודות האפס של הפונקציה $f(x) = 2(x + 1)(x - 4)$

(ב) מצא פונקציה נוספת שיש לה אותן נקודות אפס.

3. (א) נתונה משפחת הפונקציות $g(x) = a(x - 1)(x - 3)$

מהן התכונות המשותפות לכל הפונקציות מן המשפחה.

- שרטט סקיצה של שתי פונקציות מן המשפחה.

(ב) רשום משפחה של פונקציות כך שנקודות האפס של כל פונקציה

מן המשפחה הן 5 ו-7.

4. הראה כי כל פונקציה מהצורה $y = a(x - p)(x - q)$ היא פונקציה

ריבועית. מהן נקודות האפס שלה?

5. מצא לכל אחד מהמקרים הבאים משוואה ריבועית שפתרונותיהם הם:

$$6 \quad (\text{ד}) \quad 3, 4 \quad (\text{א})$$

$$-2, 0 \quad (\text{ה}) \quad -5, -2 \quad (\text{ב})$$

$$0, 3 \quad (\text{ו}) \quad -4, 2.5 \quad (\text{ג})$$

6. מצאנו כי אפשר להביע משפחה של פונקציות אשר נקודות האפס שלהן x_1 ו x_2 בצורה הבאה:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(א) הבא את $f(x)$ לצורה: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(ב) הבע את a , b ו c באמצעות a , x_1 ו x_2 .

(ג) בטא את $x_1 + x_2$ ואת $x_1 \cdot x_2$ בעזרת a , b ו c .

7. רשום את המשוואות הבאות כמכפלה.

הדרכה: היעזר בתכונות הפתרונות שמצאת או פתור תחילה כל משוואה.

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (\text{א})$$

$$(x + 3)(x + 7) = 0 \quad x^2 + 12x + 35 = 0 \quad (\text{ב})$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0 \quad x^2 - 2x - 15 = 0 \quad (\text{ג})$$

-אם נתונים פתרונות של משוואה x_1 ו x_2 , אפשר להרכיב משוואה שאלה הם פתרונותיה באופן הבא:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

-כאשר a מספר שונה מאפס.

-הקשר בין שורשי משוואה ריבועית x_1 ו x_2 לבין הפרמטרים הוא: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

תרגילים

1. כל אחד מזוגות המספרים הוא זוג שורשים של משוואה ריבועית. מצא משוואה ריבועית מתאימה.

(א) 2, 15 (ג) 0, -3

(ב) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ (ד) $\sqrt{7}, -\sqrt{7}$

2. אחד משורשי המשוואה הריבועית $2x^2 - 14x + c = 0$ גדול פי 2.5 מן השני. מצא את c.

3. אחד משורשי המשוואה הריבועית $3x^2 - 6x + c = 0$ הוא אפס. מצא את השורש השני.

4. מצא פונקציה ריבועית החותכת את ציר ה-x בנקודות $x = 3$ ו- $x = -1$ ואת ציר ה-y בנקודה $y = 6$.

5. מצא פונקציה ריבועית החותכת את ציר ה-x בנקודות $x = 2$ ו- $x = 5$, ועוברת דרך הנקודה (1, 3).

6. מצא, מבלי לחשב, את סימני השורשים של המשוואות הריבועיות הבאות:

(א) $x^2 + 5x - 7 = 0$ (ה) $-2x^2 - 5x + 1 = 0$

(ב) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (ו) $(x - 4)(x + 1) = 0$

(ג) $-x^2 + 2x - 1 = 0$ (ז) $-4(x - 2)(x - 1) = 0$

(ד) $x^2 - 6 = 0$ (ח) $-(x + 5)^2 = 0$

7. נתונה משוואה מהצורה $x^2 + bx + c = 0$ מהם התנאים שצריכים לקיים b ו- c כדי ש:

- (א) שני השורשים יהיו בעלי אותו סימן.
 (ב) שני השורשים יהיו שליליים.
 (ג) שני השורשים יהיו מנוגדי סימן והגדול שביניהם יהיה חיובי.

8. פרק לגורמים

(א) $x^2 - 12x + 35 = 0$ דוגמא: $(x - 7)(x - 5) = 0$

(ב) $x^2 - 2x - 3 = 0$

(ג) $x^2 - 2x = 0$

(ד) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(ה) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(ו) $x^2 + 2x - 15 = 0$

9. העזר בפרוק לגורמים כדי לצמצם את השברים האלגבריים הבאים (הנח כי המכנה שונה מאפס).

(ד) $\frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 1}$

(א) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - a - 30}$

(ה) $\frac{a^2 - 18a + 81}{a^2 - 81}$

(ב) $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 5a + 4}$

(ו) $\frac{m^2 - 6m}{m^2 + m}$

(ג) $\frac{m^2 + 9m + 20}{m^2 + 3m - 4}$

10. מצא את קבוצת האמת של תבניות הפסוק הבאות:

$$\frac{-3}{x^2 - 16} = \frac{x}{x + 4} \quad \text{דוגמא:}$$

$$\frac{-3}{(x-4)(x+4)} = \frac{x}{x+4} \cdot \frac{1}{(x-4)(x+4)}$$

$$x \neq -4 \text{ וגם } x \neq 4 \quad -3 = x(x-4).$$

קבוצת האמת: $\{1, 3\}$

$$\frac{14}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} = 1 \quad (\text{א})$$

$$\frac{1}{x - 3} + \frac{2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x}{x - 2} \quad (\text{ב})$$

$$\frac{5}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3}{x - 1} = 2 \quad (\text{ג})$$

$$\frac{3}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2} = -1 \quad (\text{ד})$$

$$\frac{x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x}{2x + 6} \quad (\text{ה})$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x + 1} \quad (\text{ו})$$

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 2 \quad (\text{ז})$$

$$\frac{9 - x^2}{x - 3} = 1 \quad (\text{ח})$$

$$\frac{5}{4x^2 - 9} - \frac{1}{2x - 3} = 0 \quad (\text{ט})$$

$$\frac{2}{x^2 - 6x + 9} = 3 - \frac{x}{x - 3} \quad (\text{י})$$

מבחר תשובות

1. $x^2 + 3x = 0$ (ג) $x^2 - 17x + 30 = 0$ (א)

$x^2 - 7 = 0$ (ד) $25x^2 - 35x + 12 = 0$ (ב)

3. $x_2 = 2$

2. $c = 10$

4. $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

5. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3.5x - 5$

6. (א) סימנים מנוגדים (ה) סימנים מנוגדים

(ב) שניהם חיוביים. (ו) סימנים מנוגדים

(ג) שניהם חיוביים (ז) שניהם חיוביים

(ד) סימנים מנוגדים (ח) שלילי.

7. (א) $c > 0$ (ב) $c > 0$ וגם $b > 0$ (ג) $c < 0$ וגם $b < 0$

9. (א) $\frac{a-5}{a-6}$ (ב) $\frac{a-1}{a-4}$ (ג) $\frac{m+5}{m-1}$

(ד) $\frac{a+1}{a-1}$ (ה) $\frac{a-9}{a+9}$ (ו) $\frac{m-6}{m+1}$

10. (א) $\{-5, 4\}$ (ב) $\{0, 4\}$ (ג) $\{-\frac{3}{2}, 2\}$ (ד) $\{ \}$

(ה) $\{2\}$ (ו) $\{2\}$ (ז) $\{4\}$ (ח) $\{-4\}$

(ט) $\{1\}$ (י) $\{2.5, 5\}$

תבניות פסוק לקבוצות של נקודות

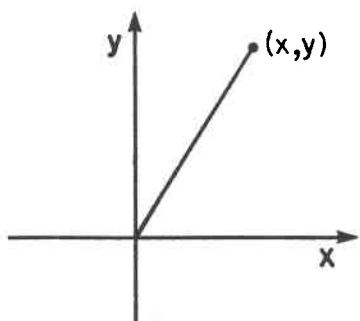
מעגל שמרכזו בראשית הצירים

1. (א) שרטט במערכת צירים את הנקודה $A(3, 4)$.
מהו מרחקה של A מראשית הצירים? באילו יחידות נמדד מרחק זה?
רמז: משפט פיתגורס.

(ב) שרטט במערכת הצירים עוד 11 נקודות אשר יש להן אותו מרחק מראשית הצירים כמו ל- A .

(ג) מהו הגרף של כל הנקודות אשר יש להן אותו מרחק מראשית הצירים?

2. הנקודה (x, y) מרוחקת מראשית הצירים מרחק של 7 יחידות.



(א) מהו הקשר בין שיעוריה?

(ב) כמה נקודות מקיימות קשר כזה?

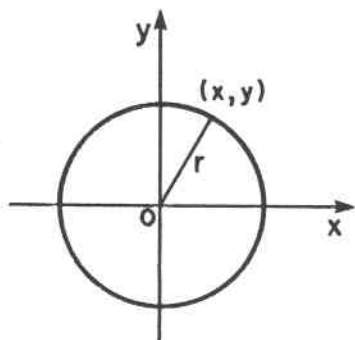
(ג) מצא נקודה ששיעורה הראשון 2 ומרחקה 7 מראשית הצירים.

(ד) מצא נקודה ששיעורה השני 5 ומרחקה 7 מראשית הצירים.

(ה) מצא שתי נקודות על ציר ה- x שמרחקן 7 מראשית הצירים.
האם הן מקיימות את הקשר שמצאת ב- (א)?

אוסף כל הנקודות המקיימות תבנית פסוק הוא גרף של תבנית הפסוק.
הגרף של תבנית הפסוק $x^2 + y^2 = 49$ (מתרגיל 2) הוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים ומחוגו 7 יחידות.

3. רשום תבנית למשפחת המעגלים שמרכזם בראשית הצירים ורדיוסם r .

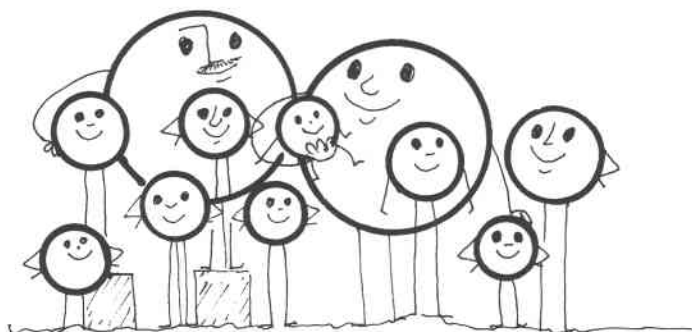


4. לפניך משוואת מעגל: $x^2 + y^2 = 100$.

- (א) מהו אורך הרדיוס?
 (ב) אילו מן הנקודות הבאות נמצאות בתוך המעגל? אילו מחוץ למעגל? ואילו עליו?

$E(7, -7)$ $D(9, -1)$ $C(6, -8)$ $B(-2, 7)$ $A(1, 10)$

- (ג) רשום תבנית פסוק לאוסף כל הנקודות הנמצאות בתוך המעגל.



משוואה כללית של מעגל

5. (א) מצא שיעורי 12 נקודות הנמצאות על מעגל שמרכזו $M(1, 2)$ ורדיוסו 5 יחידות.

(ב) מה צריכה לקיים נקודה A כדי שתהיה גם היא על אותו מעגל?

התכונה המשותפת לכל הנקודות על המעגל היא מרחקן מנקודת המרכז, לכן נלמד תחילה כיצד למצוא מרחק בין נקודות במערכת הצירים.

6. מצא את המרחק בין זוגות הנקודות הבאות:

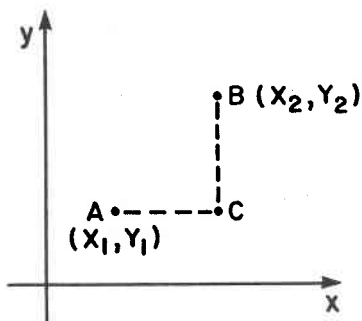
(א) $A(5, 2)$ $B(5, 8)$ (ד) $A(5, -2)$ $B(-6, -2)$

(ב) $A(-1, -2)$ $B(-1, 3)$ (ה) $A(a, b)$ $B(a, c)$

(ג) $A(-2, 1)$ $B(-7, 1)$ (ו) $A(a, b)$ $B(c, b)$

7. (א) שרטט במערכת צירים את הנקודות $A(3, 1)$ $B(6, 5)$ ומצא בעזרת משפט פיתגורס את המרחק ביניהן.

(ב) מצא את המרחק בין הנקודות $A(-3, 8)$ ו- $B(6, -4)$.



8. נתונות הנקודות $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

BC מקביל לציר y

AC מקביל לציר x

(א) רשום את שיעורי הנקודה C.

(ב) רשום תבניות מתאימות

לאורך BC, לאורך AC ובעזרת משפט פיתגורס, לאורך AB.

(ג) חשב באמצעות התבנית שמצאת לאורך AB את המרחק בין הנקודות $A(-3, 8)$ $B(6, -4)$. והשווה עם התשובה של תרגיל 7 ב).

התבנית לחישוב מרחק בין שתי נקודות כלשהן במישור

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ היא:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \quad \text{או}$$

9. (x, y) היא נקודה על מעגל שמרכזו בנקודה $M(1, 2)$ ורדיוסו 5 יחידות (מתרגיל 5).

(א) הבע באופן מתמטי: המרחק של (x, y) מ- $(1, 2)$ הוא 5.

(ב) קבלת תבנית פסוק. העלה את שני האגפים בריבוע.

(ג) אם לא טעית, הנקודה $(-1, 5)$ שייכת לקבוצת האמת של התבנית. הצב ובדוק.

(ד) מהו הגרף של תבנית הפסוק שקבלת? נמק.

10. מצא משוואת כל אחד מהמעגלים הבאים. על כל מעגל מצא נקודה ובדוק אותה על ידי הצבה.

(א) המרכז $(0, 2)$ והרדיוס 10.

(ב) המרכז $(-4, -3)$ והרדיוס 5.

(ג) המרכז $(-1, 3)$ והרדיוס 4.

11. רשום את הצורה הכללית של משוואת מעגל שמרכזו בנקודה (m, n) ורדיוסו r .

משוואת מעגל שמרכזו בנקודה (m, n) ורדיוסו r היא:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

תרגילים

מעגל שמרכזו בראשית הצירים

1. מצא משוואת מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו.
(א) 1 (ב) 7 (ג) $\sqrt{2}$
2. מהו הרדיוס של כל אחד מהמעגלים הבאים:
(א) $x^2 + y^2 = 12 \frac{1}{4}$ (ב) $x^2 + y^2 = 5$
מצא על כל אחד מהמעגלים את כל הנקודות ששיעורן הראשון -2.
3. מצא מעגל שמרכזו בראשית הצירים והוא עובר דרך הנקודה (-2, -4).
מצא על אותו מעגל עוד שמונה נקודות.
4. (א) שרטט את המעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 4$.
(ב) שרטט את הגרף של תבנית הפסוק $x^2 + y^2 \geq 4$.

משוואה כללית של מעגל

5. מצא משוואת מעגל שמרכזו בנקודה (-2, 2) ורדיוסו 13 יחידות.
(א) מיין את הנקודות הבאות לשלוש קבוצות:
נקודות על המעגל, נקודות בתוך המעגל, נקודות מחוץ למעגל.
A(5, 15) B(-3, -14) C(8, 8) D(0, 0) E(0, 13) F(13, 0)
- (ב) מצא שתי נקודות על המעגל אשר שיעור ה־x שלהן הוא 7.

6. קבע לכל משוואת מעגל נתונה מהו המרכז ומהו הרדיוס?

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 36 \quad (\text{א})$$

$$(x - 7)^2 + y^2 = 1 \quad (\text{ב})$$

$$x^2 + (y + 2)^2 = 8 \quad (\text{ג})$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 = 100 \quad (\text{ד})$$

$$x^2 + y^2 - 8y = 36 \quad (\text{ה})$$

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y = -4 \quad (\text{ו})$$

7. מצא משוואת מעגל הנמצא ברביע הראשון ומשיק לשני צירי השיעורים בנקודות $(0, 4)$, $(4, 0)$.

8. מצא את משפחת המעגלים שמרכזם על ציר y ורדיוסם 7 יחידות.

9. את המעגל $x^2 + y^2 = 5$ הזיזו כך שמרכזו התלכד עם הנקודה $(-1, 4)$. מהי משוואת המעגל החדש?

10. שרטט במערכת צירים אחת את הגרפים של התבניות הבאות:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \quad (\text{א})$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \quad \text{בתחום } -2 \leq x \leq 2 \quad (\text{ב})$$

$$x^2 + y^2 = 5 \quad (\text{ג})$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \quad (\text{ד})$$

מבחן תשובות

1. א) $x^2 + y^2 = 1$ ב) $x^2 + y^2 = 49$ ג) $x^2 + y^2 = 2$

2. א) 3.5 ב) $\sqrt{5}$

5. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 13^2$

א) על המעגל: B, בתוך המעגל: C, D ו-F, מחוץ למעגל: B.

ב) (7, 10) ו- (7, -14)

6. א) המרכז ב (3, 1) והרדיוס 6

ב) המרכז ב (7, 0) והרדיוס 1

ג) המרכז ב (0, -2) והרדיוס $\sqrt{8}$

ד) המרכז ב (-1, 2) והרדיוס 10

ה) המרכז ב (0, 4) והרדיוס $\sqrt{52}$

ו) המרכז ב (-3, 1) והרדיוס $\sqrt{6}$

7. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

8. $x^2 + (y - b)^2 = 49$

9. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$

תבניות נוספות לקבוצות של נקודות

1. נתונות הנקודות $A(-3, -3)$ $B(1, 5)$.

(א) סמן אותן במערכת צירים.

(ב) הנקודה (2, -3) נמצאת במרחק שווה מ-A ומ-B. בדוק.

(ג) נסה למצוא נקודות נוספות המרוחקות באותה מידה מ-A ומ-B.

(ד) היכן נמצאות כל הנקודות המרוחקות במרחק שווה מ-A ומ-B?

ה) (x, y) מייצגים שיעורים של נקודה הנמצאת במרחק שווה מ־ A ומ־ B השלם $\sqrt{\quad} = \sqrt{\quad}$

העלה בריבוע והמשך לפשט.

(ו) מצא עוד שתי נקודות המרוחקות באותה מידה מ-A ומ-B.

(ז) בסעיף ה) קיבלת ממשואת ישר. מהו שיפועו?

(ח) מהו שיפוע הישר AB? אם לא טעית, מכפלת השיפועים 1-.

(ט) מהו הקשר בין הישר שאת משוואתו מצאת לבין הקטע AB?

2. מצא את משוואת האנך האמצעי לקטע המחבר את הנקודות

$A(-3, 1)$ ו- $B(3, -1)$ (העזר בשאלה הקודמת)

★ נסה את כוחך

3. נתונות הנקודות $E(m, n)$ ו- $F(c, d)$

(א) מהו שיפוע הישר העובר דרך שתי הנקודות?

(ב) (x, y) מייצגים שיעורי נקודה כלשהי המרוחקת במרחק שווה מ- E ומ- F השלם: $\sqrt{\quad} = \sqrt{\quad}$

והבא לצורה $y = ax + b$

(ג) מהו שיפוע הישר שהתקבל?

(ד) הראה כי מכפלת השיפועים מ"א (רג) היא 1-.

4. א) לפניך נקודה A וישר K.



מצא שלוש נקודות שמרחקן

מהנקודה A שווה למרחקן

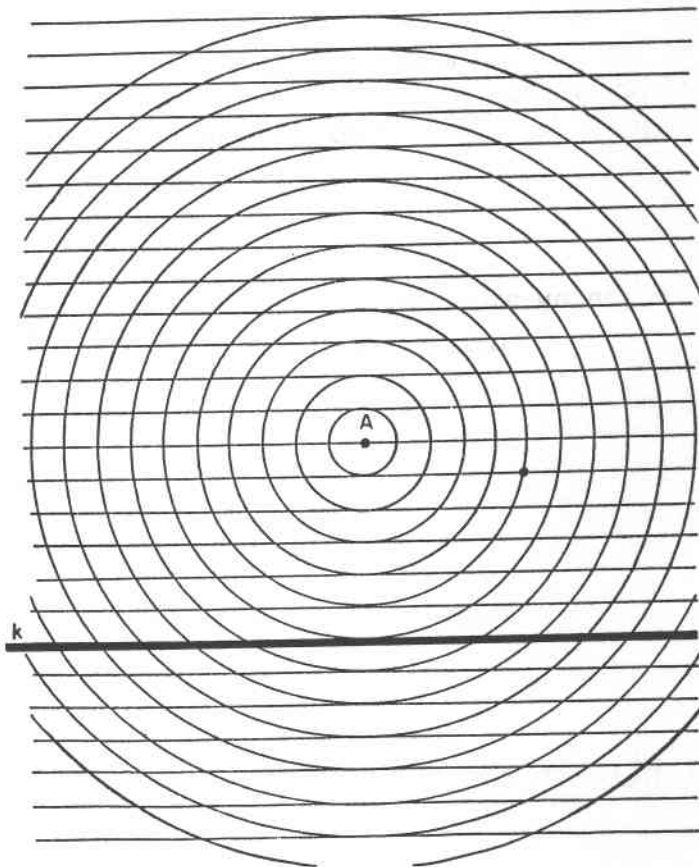
מהישר K.

ב) היעזר במעגלים ובישרים שבשרטוט כדי לסמן נקודות שמרחקן

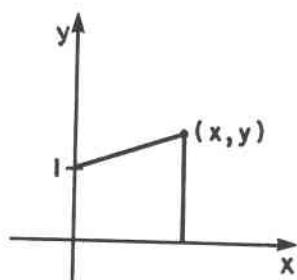
מהנקודה A שווה למרחקן מהישר K.

(נקודה אחת סומנה לדוגמא).

חבר את הנקודות שסימנת. איזה צורה התקבלה?



5. (א) רשום תבנית למרחק נקודה ששיעורה (x, y) מהנקודה $(0, 1)$.
(ראה שרטוט).

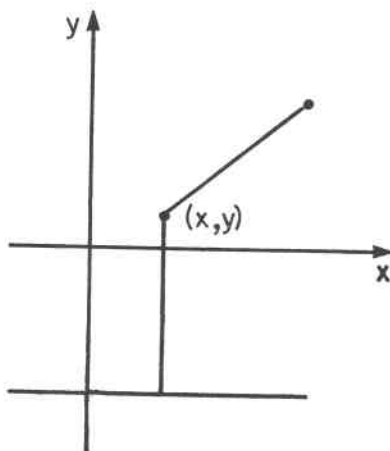


(ב) רשום תבנית שתייצג את מרחק הנקודה מציר ה- x .

(ג) (x, y) מייצגים שיעורים של נקודה שמרחקה מציר ה- x שווה למרחקה מהנקודה ששיעוריה $(0, 1)$.
רשום תבנית פסוק מתאימה.
פשט את התבנית עד לצורה $y =$

(ד) מה צורת הגרף המתאר את תבנית הפסוק שמצאת?

6. (א) רשום תבנית לאוסף כל הנקודות (x, y) שמרחקן מהישר $y = -1$ שווה למרחקן מהנקודה $(2, 1)$.
הבא את התבנית לצורה $y =$



(ב) אם לא טעית קבלת משוואה של פרבולה מהו קודקודה?

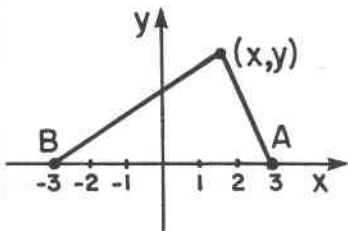
★ נסה את כוחך

7. לפניך במערכת צירים הנקודות $A(3, 0)$ ו- $B(-3, 0)$

(x, y) מייצגים שיעורי נקודה אשר

סכום המרחקים שלה מ-A ומ-B שווה

ל-10 יחידות.



(א) מצא תבנית פסוק מתאימה.

$$\sqrt{\quad} + \sqrt{\quad} = 10$$

(ב) חסר אחד השורשים משני האגפים
והעלה בריבוע.

שים לב! עליך להשתמש בנוסחה: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 5 + \frac{3}{5}x \quad \text{(ג) המשך לפשט עד שתגיע ל-}$$
$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 5 - \frac{3}{5}x$$

(ד) העלה בריבוע שנית ופשט. עד לצורה $16x^2 + 25y^2 = 400$

(ה) גרף המשוואה סימטרי לגבי ציר ה- x ולגבי ציר ה- y . נמק. התוכל לשער מהו הגרף?

מצא על ציר ה-y נקודה הנמצאת על גרף המשוואה שמצאת. האם היא מקיימת את התכונה שהתחלת ממנה?

★ ★

8. היעזר במעגלים שבשרטוט כדי לסמן נקודות שסכום המרחקים שלהן

מהנקודה A ומהנקודה B הוא 10 יחידות.

חבר את הנקודות שסימנת. איזו צורה קיבלת?

