גרפים פאונים ומפות

מאת: ד"ר עמוס אלטשולר

סקירה*

פתח דבר

בעקבות פניות רבות של מורים לחומר העשרה המיועד לתלמידי בית הספר התיכון וכתוב בעברית, החלטנו להציג ב"שבבים" את החוברת "גרפים פאונים ומפות" מאת ד"ר עמוס אלטשולר. החוברת פורסמה בהוצאת המרכז הישראלי להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט - המחלקה להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית בירושלים.

ההקדמה לחוברת מסבירה יפה למי היא מיועדת ומה היתה המוטיבציה לכתיבתה:
"פרקים רבים במתמטיקה שהבנתם היא בתחום השגתו של תלמיד בית הספר התיכון, אינם יכולים למצוא את מקומם - מחוסר זמן - בתכנית הלימודים. כך אין התלמיד זוכה להכיר פרקי מתמטיקה רבים שהיו עשויים לגרות את יצר הסקרנות והחשיבה שלו, אותו יצר המדרבן את האדם לפתור חידות.

פרקים אלה מקומם יכירם בחוגי לימודים מטעם בית הספר עבור תלמידים המעוניינים. אולם דא עקא, שכמעט אין בדפוס, בלשון העברית, חומר מתאים לכך. חוברת זו באה למלא במקצת חלל ריק זה. היא עשויה במתכונת ובהיקף המתאימים לחוג, ואפשר לעבור על כולה במשך 12-10 פגישות של החוג, בתנאי שהתלמידים יפתרו בבית את התרגילים המצורפים - שהרי אי אפשר ללמוד חומר מתמטי בלא שהדבר ילווה בפתירת תרגילים.

כדי לקרוע אשנב רחב ככל האפשר לתורת הגרפים במסגרת המצומצמת שקבענו לעצמנו, העדפנו לדון בנושאים רבים ומגוונים בלא לנסות למצות באופן מעמיק אף אחד מהם. המורה המעונין להרחיב אחדים מהנושאים יותר מכפי המצוי בחוברת זו, יוכל למצוא ספרות ענפה בשפות זרות".

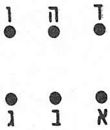
המחבר מעיר כי אין מניחים ידיעת כל חומר מתמטי וכדי להימנע מהשימוש באינדוקציה מתמטית נוסחו הדברים פה ושם בצורה בלתי מדויקת - ניסוח שמאחוריו מסתתרת האינדוקציה. מורה העובד עם תלמידים המכירים שיטת הוכחה זו יוכל לנסח את הדברים במדויק.

---

* באדיבותה של הוצאת המרכז להוראת המדעים באוניברסיטה העברית בירושלים, ניתנה הרשות להציג כאן מובאות מן החוברת.

בפרק המבוא מוצגות מספר בעיות המאפיינות את הנושאים בהן דנה החוברת:

"בציור 1, א-ב-ג הם בתי ספר, ד-ה-ו הם פנימיות. יש לסלול כביש מכל בית ספר לכל פנימיה, וכדי להימנע מתאונות דרכים רוצים לבצע את הסלילה כך שכבישים לא יחתכו זה את זה. מצד שני אין התקציב המצומצם מאפשר בנית גשרים. האם המשימה אפשרית?".

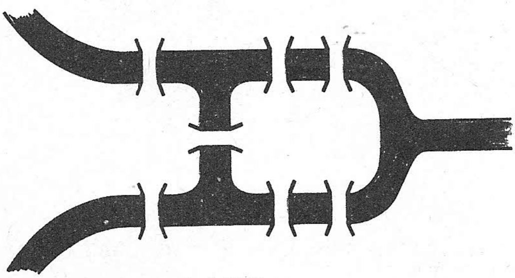


ציור 1

"האם קיים פאון (גוף בדומה לתיבה, מנסרה פירמידה וכו') שיש לו בדיוק 7 מקצועות?"

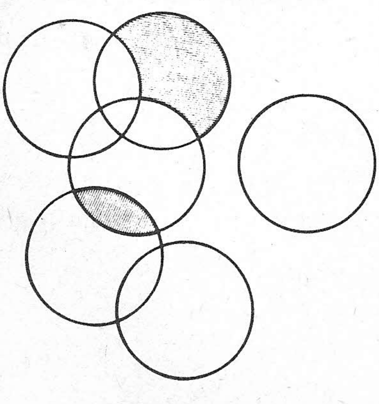
האם אפשר לשרטט מצולע בן n צלעות יחד עם כל אלכסוניו במשיכת קולמוס אחת? (כלומר, מבלי להרים את העיפרון מהנייר ומבלי לחזור פעמיים על אותה צלע)".

"הנהר העובר בעיר קניגסברג אשר בפרוסיה המזרחית מתפצל שם לשתי זרועות ויוצר אגב כך אי. האי והגדות מחוברים זה לזה על ידי שבעה גשרים, כמתואר בציור 2. האם אפשר לערוך טיול שבמהלכו עוברים על כל הגשרים - על כל גשר בדיוק פעם אחת - ובסופו חוזרים לנקודת המוצא?".



ציור 2

"n מעגלים נמצאים במישור, מקצתם חותכים זה את זה, ומחלקים את המישור לתחומים (ראה ציור 3, שם מקווקווים אחדים מהתחומים). רוצים לצבוע את כל התחומים (לרבות התחום החיצוני, הוא התחום שמחוץ לכל המעגלים), כך שכל שני תחומים שיש להם קשת משותפת ייצבעו בצבעים שונים. מהו המספר המינימלי של צבעים הדרוש למטרה זו? האם שני צבעים יספיקו?"



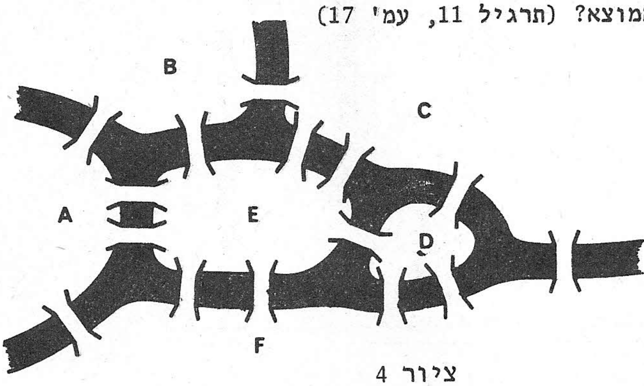
ציור 3

תוכן החוברת

בחוברת שלושה פרקים: גרפים, פאונים ומפות. הפרקים כתובים באופן בהיר, בשפה קלה וערוכים בצורה גרפית נאה, בשלל צבעים.

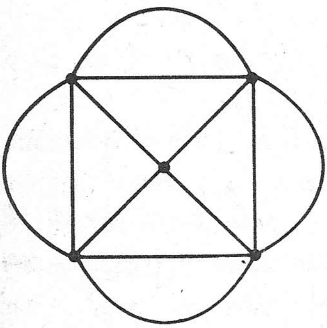
בסקירה זו נציג פרפראות מהפרקים השונים.

כאשר מסיימים התלמידים את קריאת סעיף 2 בפרק הראשון - מסילות אוילר ומעגלי אוילר - יכולים הם כבר לפתור את בעית הגשרים של קניגסברג ואף להרחיב את הבעיה לתרגיל הבא: הניתן לערוך את הטיול על פני הגשרים שבציור 4? ומה אם איננו נדרשים לחזור לנקודת המוצא? (תרגיל 11, עמ' 17)

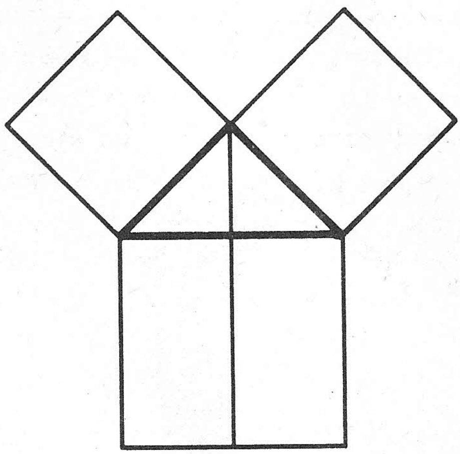


ציור 4

בעיות הציור במשיכת קולמוס אחת אף הן נכללות בסעיף זה. כדוגמא תינתן הבעיה הבאה: כמה משיכות קולמוס דרושות לשרטוט הגרף שבציור 5? וזה שבציור 6?



ציור 5

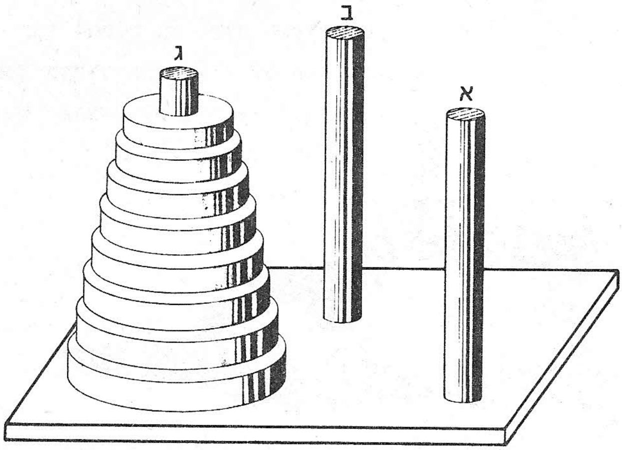


ציור 6

סעיף 3 בפרק הראשון עוסק במסילות המילטון ומעגלי המילטון כאשר ההגדרה היא: "מסילה בגרף G העוברת דרך כל הקודקודים של G, דרך כל קודקוד בדיוק פעם אחת, נקראת <u>מסילת המילטון</u> של G. מסילת המילטון סגורה נקראת <u>מעגל המילטון</u>".

לאחר מכן מגדיר המחבר מהו הגרף של קוביה ממימד n: לכל n-יה של מספרים שכל אחד מהם 0 או 1 מתאים קודקוד בגרף. שני קודקודים מחוברים ע"י צלע אם, ורק אם, שתי ה-n-יות המתאימות שונות במקום אחד בלבד.

כאן מובא שימוש יפה למעגל המילטון עבור הגרף של קוביה ממימד n , בצורת פתרון למשחק הידוע בשם מגדל האנוי: "לפנינו שלושה עמודים , מהם שניים ריקים, ועל השלישי יש n עיגולים שונים בגודלם, כך שכל עיגול מונח על עיגול גדול ממנו (ציור 7).

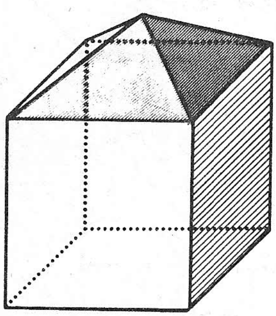


ציור 7

אנו מתבקשים להעביר את כל העיגולים לאחד משני העמודים האחרים, כאשר בכל פעם מותר להזיז רק עיגול אחד (הזזה, פירושה העברת העיגול מעמוד אחד לעמוד אחר), בתנאי שאף פעם לא יהיה עיגול מונח על עיגול קטן ממנו.

כמה צעדים (כלומר הזזות) דרושים כדי לבצע את משחק האנוי? ומה הם צעדים אלו?

הפרק השני בחוברת עוסק בפאונים, כאשר "פאון הוא גוף אשר, דוגמת התיבה והפירמידה הוא מוגבל מכל הצדדים ע"י פאות שהן מצולעים."
למשל, הגוף המורכב מקובייה ופירמידה בעלי בסיס משותף, כבציור 8, הוא פאון קמור, כלומר פאון המכיל עם כל שתי נקודות הנמצאות בו גם את כל הקטע המחבר שתי נקודות אלה.


ציור 8

המחבר מתאר מהו גרף של פאון ומציג את משוואת אוילר הידועה:

$$v - e + f = c + 1$$

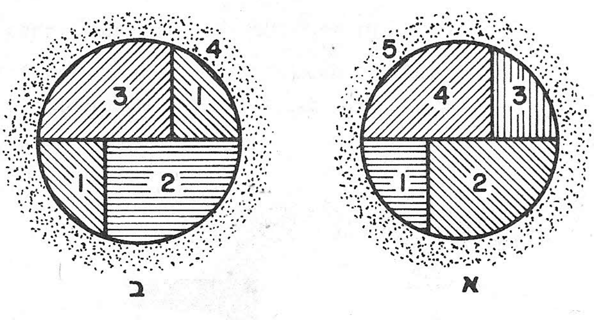
כאשר v הוא מספר הקודקודים, e מספר הצלעות, f מספר הפאות או התחומים ו c מספר המרכיבים של גרף מישורי.

כשימוש למשוואת אוילר פותרים בפרק זה את השאלה שהוצגה במבוא בדבר סלילת הכבישים בין שלושה בתי ספר ושלוש פנימיות. ניתנת כאן ההוכחה כי אי אפשר לסלול את הכבישים באופן שלא יחתכו זה את זה.
כמו כן מוכיחים בפרק זה את המשפט המפתיע כי "לכל פאון יש לפחות שתי פאות בעלות אותו מספר צלעות".

הפרק האחרון דן בנושא המפות. מפה מוגדרת כ"גרף מישורי קשיר, שבו ערכיות כל קודקוד היא, לפחות 3, ושום תחום בו אינו גובל עם עצמו בצלע". (ערכיות קודקוד היא מספר הצלעות היוצאות מן הקודקוד).

"צביעת מפה, פירושה צביעת כל אחד מתחומי המפה, לרבות התחום החיצוני, כך ששום שני תחומים בעלי צלע משותפת לא יהיו צבועים באותו צבע. אם לשני תחומים במשותף קודקודים בלבד, רשאים אנו לצבעם באותו צבע"!

המפה שבציור 9 א' צבועה בחמישה צבעים, המסומנים במספרים 1-5. אולם, אותה מפה עצמה ניתנת לצביעה בארבעה צבעים בלבד, כבציור 9 ב'.



ציור 9

המשפט העיקרי המוכח בפרק זה הוא, שכל מפה ניתנת לצביעה בחמישה צבעים!

מובן, שיש מפות שבהן אפשר להסתפק גם בפחות צבעים, אולם אין מפה שחמישה צבעים לא יספיקו לה.

לאמיתו של דבר, לא עלה בידי איש למצוא מפה שארבעה צבעים לא יספיקו לה, ועד כה לא נמצאה הוכחה לטענה כי כל מפה ניתנת לצביעה בארבעה צבעים בלבד.*

בפרק זה בולט הקשר בין מעגלי אוילר שנלמדו בפרק הראשון לצביעת המפות ומוכח כאן המשפט: "מפה ניתנת לצביעה בשני צבעים אם, ורק אם, יש לגרף של המפה מעגל אוילר".

הסעיף האחרון בפרק זה עוסק במפות אחרות כגון מפה על טורוס. לאחר שמגדירים באופן מתאים את המושג "מפה על טורוס", ניתן לשאול את השאלה: מהו המספר המינימלי של צבעים הדרוש לשם צביעת מפה כלשהי על הטורוס? באופן מפתיע למדי קל להוכיח את התשובה המדוייקת לשאלה זו: המספר הוא 7.

לסיום מביא המחבר לפני הקורא בעיה הניתנת לפתרון בעזרת גרף: "על גדתו האחת של נהר נמצאים שלושה תיירים ושלושה אוכלי-אדם, כשלרשותם סירה היכולה להעביר בבת אחת, לכל היותר, שני אנשים. ששת האנשים רוצים להגיע לגדה השנייה. כיצד יעשו זאת אם על הגדה האחת, בסירה וכן על הגדה השנייה אסור שימצא יותר אוכלי-אדם מאשר תיירים? שלושת התיירים יודעים לחתור בסירה, ומבין אוכלי האדם יודע לחתור רק אחד".

החוברת נאה לקריאה ומהנה ביותר, ניתן להשיגה במחלקה להוראת המדעים באוניברסיטה העברית בירושלים ומחירה 18 ל"י.

---

* לאחרונה, במחצית השניה של שנת 1976, נתפרסמה הוכחה לטענה שכל מפה ניתנת לצביעה בארבעה צבעים. ההוכחה ארוכה ביותר ומורכבת מהרבה פרטים, ובדיקתה אינה קלה. בעבר ניתנו "הוכחות" רבות לטענה זו, וכולן נמצאו בלתי נכונות. אם ההוכחה האחרונה אכן נכונה, הרי שנפתרה בזה בעיה בת למעלה מ- 100 שנים.