צמצום מהיר

מאת: יעקב גויסקי ומרדכי שורק, הסמינר ע"ש לוינסקי, תל אביב

אחת הטענות כנגד הוראת האלגברה היא כי בה הכל "חלק". התלמיד לומד לפתור סוגים שונים של משוואות, שבהן דרכו סלולה לפניו: נוסחה לפתרון, או שיטה בדוקה, וכו'.

מצד אחד מקלה שיטה זו על הלומד, אך מצד שני טוענים חוקרי הוראת המתמטיקה כי הדבר אינו תורם לפיתוח ולהעמקת ההבנה אצלו.

כדי לפתח את ההבנה, אפשר לתת לתלמידים מדי פעם בעיות לא שגרתיות, שיעמידום בפני מצבים שונים מן הרגיל וכך יכריחום לסטות מן הדרך הסלולה כדי להתגבר על השאלה על ידי חשיבה עצמית.

לדוגמה נציע את הבעיה הבאה:

בחוברת מס' 5 של כרך ב' "גליונות למתמטיקה" שבעריכת פרופ' י. גיליס, הופיעה ההערה הבאה:

נכון או לא נכון?

תלמיד צמצם כדלקמן: $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$; $\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$; $\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$

מה דעתכם?

ברור כי "הצמצום" אינו נכון אף ש"במקרה" התוצאה נכונה.

מתעוררות אם כן השאלות:

א. מדוע התקבלה תוצאה נכונה?

ב. האם יש עוד מספרים הניתנים לצמצום בדרך זו?

לתלמידים הייתי מציג את השאלה השניה, כדוגמה לבעיה בלתי שיגרתית.

נביא כאן פיתרון לדוגמה לשאלה ב' המצמצם את מספר הבדיקות הנדרשות ל 12.

נשמח לקבל פתרונות אחרים לבעיה.

הפיתרון

שימו לב, בבעיה הנדונה מופיעים מספרים דו ספרתיים בלבד.

נסמן את המונה $10a + b$

ואת המכנה $10b + c$

השוויון שבשאלה ייכתב $$\frac{10a + b}{10b + c} = \frac{a}{c}$$

(דבר המחייב כי $c \neq 0$)

נפשט ביטוי זה ונקבל $$10ab - 9ac - bc = 0 \qquad \text{(I)}$$

כאשר a,b,c הם מספרים שלמים המקיימים:

$$0 \leqslant a \leqslant 9$$

$$0 \leqslant b \leqslant 9$$

$$0 < c \leqslant 9$$

הגענו למשוואה דיופנטית, כלומר משוואה אחת בשני משתנים או יותר, שפתרונותיה חייבים להיות מספרים שלמים המוגבלים, בדרך כלל, בין ערכים מסויימים. (משוואות כאלו נקראות כך על שם המתמטיקאי היווני דיופנטוס איש אלכסנדריה שחקר משוואות אלו בערך בשנת 300 לפני הספירה). משוואות כאלו אינן נלמדות, בדרך כלל, בתכנית הלימודים באלגברה בחטיבת הביניים או בבית הספר התיכון אם כי, פה ושם, אפשר למצוא בעיות המביאות למשוואות כאלו (ראה למשל, פרקי מתמטיקה, הוצאת המחלקה להוראת המדעים, רחובות, ספר ג', אלגברה I, החל מעמוד 142, שאלות 2 עד 8).

כדאי גם להזכיר כי למשוואות כאלו יש בדרך כלל יותר מפיתרון אחד, דבר שגם אליו אין תלמידינו מורגלים.

נחזור לפיתרון המשוואה (I):

נתחיל בבדיקת מקרים מיוחדים.

א. $b = c$

מ (I) נקבל $$10ab - 9ab - b^2 = 0$$

$$ab - b^2 = 0$$

$$(a-b)b = 0$$

ולכן $b = 0$ או $a = b$

נבחין בין שני המקרים

1) $a = b \Longrightarrow a = b = c \Longrightarrow \frac{10c + c}{10c + c} = \frac{11c}{11c} = \frac{c}{c}$

לכן השלשה (c, c, c), $c \neq 0$ היא פיתרון.

2) $b = 0 \Longrightarrow c = 0$, (כי $b = c$) אולם על פי ההנחה $c \neq 0$ $\Longrightarrow$ סתירה.

לכן מעתה נוכל להניח כי $b \neq c$.

ב. $a = 0$

במקרה זה השוויון שבשאלה יהיה $\frac{10 \cdot 0 + b}{10 \cdot b + c} = \frac{0}{c}$

ולכן $\frac{b}{10b + c} = 0 \Longrightarrow b = 0$

לכן השלשה $(0, 0, c)$ כאשר $c \neq 0$ גם היא פיתרון.

לכן נוכל להניח מעתה כי $a > 0$.

נשנה את הצורה של (I)

$$a(10b - 9c) = bc$$

$$a = \frac{bc}{10b - 9c}$$

$$a > 0, \qquad bc > 0 \qquad 10b - 9c > 0$$

[למעשה, אם $b = 0$, נקבל $\frac{a}{c} = \frac{10a}{c} \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow (0, 0, c)$, פיתרון כאשר $c \neq 0$]

$$\Longrightarrow \qquad c < \frac{10}{9} b$$

מכיון ש b ו c שלמים ושונים זה מזה, הרי: $\boxed{c < b}$

נסמן לכן: $b = c + k$, כאשר $1 \leqslant k \leqslant 8$, k שלם.

נציב ב (I) ונקבל:

$$10a(c + k) - 9ac - (c + k)c = 0$$

ולאחר סידור $a = \frac{c(c + k)}{c + 10k}$ (II)

אולם $1 \leqslant a$ $1 \leqslant \frac{c(c + k)}{c + 10k}$

מכאן נקבל כי $k \leqslant \frac{c(c - 1)}{10 - c}$ (II)

כזכור $1 \leqslant k$

לכן $1 \leqslant \frac{c(c - 1)}{10 - c}$

$$10 - c \leqslant c(c - 1)$$

$$10 - c \leqslant c^2 - c$$

$$10 \leqslant c^2$$

$$\sqrt{10} \leqslant c$$

כלומר $\boxed{4 \leqslant c}$

לכן נותר לבדוק את המקרים: $c = 4, 5, 6, 7, 8$

[$c = 9$ אינו אפשרי, כי $c < b$]

ממשוואה (II) נקבל: $k \leqslant \frac{c(c - 1)}{10 - c}$

כזכור: $b = c + k \Longleftarrow k = b - c \Longleftarrow k < 9 - c$.

נציב את ערכי c המתאימים, נצרף את ערכי b המתאימים, ונקבל את הטבלה הבאה:

c	4	5	6	7	8
k	1,2	1,2,3,4	1,2,3	1,2	1
b	5,6	6,7,8,9	7,8,9	8,9	9

כלומר, סך הכל יש לבדוק 12 מקרים. אם נבדוק מקרים אלה על ידי חישוב ערך a מתוך התבנית:

$$a = \frac{c(c + k)}{c + 10k}$$

נקבל כי המקרים האפשריים הם:

$$c = 4, \quad k = 2, \quad b = 6, \quad a = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

$$c = 5, \quad k = 1, \quad b = 6, \quad a = 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

$$c = 5, \quad k = 4, \quad b = 9, \quad a = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$$

$$c = 8, \quad k = 1, \quad b = 9, \quad a = 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{49}{98} = \frac{4}{8}$$

כלומר, יש 22 פיתרונות אפשריים.

18 פיתרונות "טריביאליים" ($(0,0,c)$ (c,c,c)) וארבעה נוספים למעשה, פרט לשלושת הנזכרים בהערה דלעיל, מצאנו עוד אחד בלבד, אך הוכחנו כי לא ייתכנו פיתרונות נוספים.

הבאמת?

טיפלנו במקרים של מספרים דו ספרתיים בלבד. האין אפשרות למצוא פיתרונות דומים גדולים יותר?

נסתכל בשבר: $\frac{166}{664}$

אם "נצמצמו" בשיטה שלנו, נקבל: $\frac{1\cancel{6}\cancel{6}}{\cancel{6}\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$

והשוויון, באופן מפתיע, נכון!!

נוכיח עתה כי אם מצאנו פיתרון דו ספרתי, נוכל לקבל ממנו פתרון n ספרתי, על ידי הוספת הספרה ה"מצומצמת", $n - 2$ פעמים, כלומר אפשר להוסיף את הספרה ה"מצומצמת" מספר פעמים כרצוננו גם במונה וגם במכנה, מבלי לקלקל את התכונה המוזרה שמצאנו.

נניח כי יש לנו פיתרון דו ספרתי.

הראינו קודם כי הוא מקיים:

$$10ab - 9ac - bc = 0 \qquad \text{(I)}$$

נסתכל בשבר $\frac{a}{c}$ נוסיף לו n פעמים את הספרה b מימין במונה, ומשמאל במכנה.

המונה יהיה:

$$M = a\cdot 10^n + b\cdot 10^{n-1} + b\cdot 10^{n-2} + \ldots + b =$$

$$= a\cdot 10^n + b(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \ldots 10 + 1) =$$

$$= a\cdot 10^n + b\cdot 1\cdot\frac{10^n - 1}{10 - 1} = a\cdot 10^n + \frac{b}{9}(10^n - 1)$$

המכנה יהיה:

$$N = c + 10b + 10^2 b + 10^3 b + \ldots + 10^{n-1} b + 10^n b =$$

$$= c + b(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) =$$

$$= c + b\cdot 10\cdot\frac{10^n - 1}{10 - 1} = c + \frac{10b}{9}(10^n - 1)$$

נסמן $u = \frac{b}{9}(10^n - 1)$

לכן $M = 10^n\cdot a + u$

$$N = c + 10\cdot u$$

האם באמת מתקיימת אפשרות ה"צמצום", כלומר האם $\frac{M}{N} = \frac{a}{c}$

או האם $\frac{10^n\cdot a + u}{c + 10\cdot u} = \frac{a}{c}$

נפשט את השבר:

$$10^n ac + cu = ac + 10au$$

$$10^n ac - ac = 10au - cu$$

$$(10^n - 1)ac = (10a - c)u$$

או $(10^n - 1)ac = (10a - c)\frac{b}{9}(10^n - 1)$

ומכאן $9ac = 10ab - bc$

או $10ab - 9ac - bc = 0$

וקבלנו את השוויון (I) שאת נכונותו כבר ראינו קודם.

אנו רואים כי הבעיה הפשוטה, כביכול, הביאה אותנו לדיון די מעמיק. למען האמת, אף זה אינו סוף הדרך: האם קיימים פיתרונות אחרים לבעיה? אנו הראינו שיטה אחת כיצד למצוא פיתרונות. האם יש פיתרונות אחרים? נשמח לקבל תשובות מן הקוראים.

בכיתה עצמה יכול המורה להחליט, לפי רמת העניין שמגלים התלמידים, עד כמה להעמיק. כמובן שאת חלקה השני של ההוכחה אפשר להביא בכיתות גבוהות יותר בלבד, אך כדאי להזכיר גם מקרה זה, אף אם מסתפקים בדוגמאות בלבד.

לסיכום, הראינו כאן דיון בבעיה לא שגרתית, נראה לנו כי כדאי לסטות מן השגרה, ולחרוג ולטפל גם בבעיות מטיפוסים כאלו.