הטס עפיפון

מאת : ג'והן ו. טריבט (J.V. Trivett)
תרגום : ח. פרל

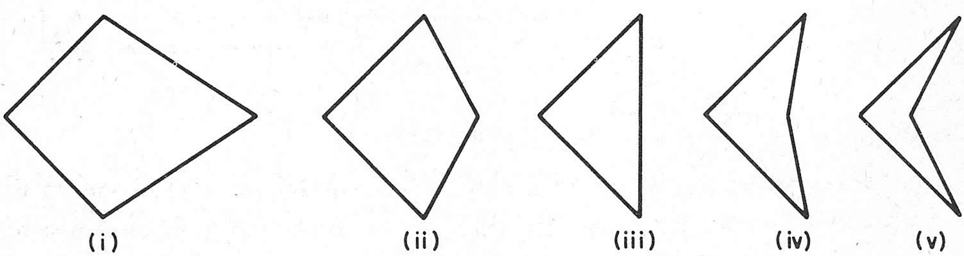
עפיפון הוא מרובע בעל שתי זוגות צלעות שוות, הסמוכות זו לזו.

מה יכולים ילדים בבית הספר להסיק מפתיחה כזו? האם אפשר לפתח בנושא זה, מערכת שיעורים אשר תקנה לתלמידים מושגים גיאומטריים והבנה בתהליכים גיאומטריים?

חיוני שלכל תלמיד בכיתה יהיה דגם מוחשי בידו, לוח גיאומטרי או קשי שתיה.
על הלוח הגיאומטרי אפשר לתאר עפיפון באמצעות גומיה המתוחה על גבי המסמרים.
כאשר משתמשים בקשי שתיה, אפשר לחבר צמד קשים בעלי אורך שווה לצמד נוסף שאף הוא בעל אורך שווה (אך שונה באורכו מהצמד הראשון). אם הקשים צבעוניים, נוח לדבר על הצלעות האדומות או הצהובות. הדגם העשוי מקשי השתיה איננו יציב, הקשים נמעכים ומתקפלים וקשה להצמידם. אפשר לתפור את הקשים זה לזה, אך גם אז הדגם איננו מספיק קשיח.
מקבלים דגם מצויין, אם במקום קשי השתיה משתמשים במקלות עץ צרים ודקים, ומחברים אותם בעזרת חומר פלסטי שקוף.

כאשר מחלקים לכל תלמיד 4 מקלות, כל זוג באורך שווה ומציעים: "חבר את המקלות לצורה מישורית בעלת ארבע צלעות", יש לצפות כי התלמידים יבנו שני סוגי מרובעים. זכרו! תמיד ישנם תלמידים אשר הדגם שלהם שונה באופן משמעותי מזה של האחרים.

למרובעים מהסוג האחד קוראים (או מזכירים, אם הכיתה כבר מכירה) מקבילית ולמרובעים השייכים לסוג השני, השונה לחלוטין - עפיפונים. אנו רואים, כי מתוך הצורך להבחין בין שני סוגי המרובעים יוצרים התלמידים הגדרות המתארות אותם.



ציור 1

John V. Trivett, "Fly Your Own Kite" Reprinted from the A.T.M. Mathematics Teaching, February 1975, No. 70.

כאשר הדגם הוא הלוח הגיאומטרי, אפשר לדרוש מהתלמידים ליצור צורות שונות של עפיפונים "גדולים, קטנים, מיוחדים, ד'קים וכו'". מכיון שקל להזיז את הגומיות ממסמר למסמר אפשר לקבל צורות רבות של עפיפונים אשר כולן ממלאות את הדרישות: ארבע צלעות, זוגות של צלעות השוות באורכן, הצלעות השוות הן סמוכות ולא נגדיות.

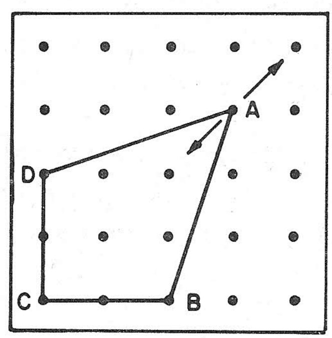
לעיתים אפשר ליצור סידרת עפיפונים על ידי הזזה של קודקוד אחד בלבד, ובו ברגע להמציא שמות לצורות המתקבלות. במקום להשתמש במונחים הטכניים, עפיפונים קמורים וקעורים אפשר לומר למשל, עפיפונים דמויי כנף או דמויי ראש חץ (ראה ציור 1).

לעיתים, מעוררות התגליות ויכוחים לוהטים ולא הכל מסכימים מיד לדעת הרוב. "האם אנו בטוחים שכל הצורות שקיבלנו אמנם מתארות עפיפונים?" האם לכל הצורות ארבע צלעות ובהן הצלעות הסמוכות שוות? האם גם לצורה (iii)? אולי יש לקרוא לצורה זו משולש שבו מסומנת אמצע הצלע? האם גם (iv) ו (v) עפיפונים?

ילדים מוכנים בדרך כלל לקרוא לכל הצורות עפיפונים ולומר כי הצורה (iii) היא מקרה מיוחד בו שתי הצלעות הן על קו ישר אחד.

אפשר לשאול שאלות מעניינות המתאימות לכל אחד מהדגמים.

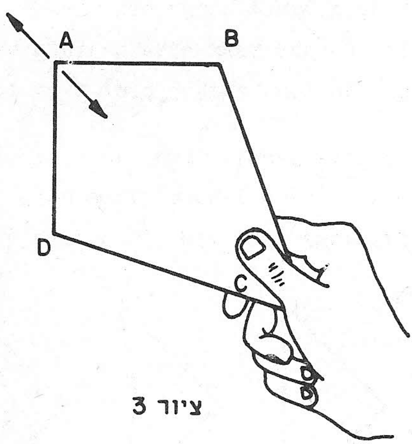
לוח גיאומטרי



ציור 2

נניח כי אנו מזיזים את הקודקוד A ומרחיקים אותו מיתר הקודקודים.
מהו הגבול התיאורטי של הזזה זו?
איזה מקרה מיוחד רואים, כאשר מקרבים את A לעבר C באופן שבכל שלב מתקבל עפיפון?
אלו מקרים מיוחדים נוספים מתקבלים אם הקודקוד A נע לאורך הישר AC?

דגם עץ



ציור 3

האם תוכל ליצור דגם נע על ידי לחיצה קלה על המקלות BC ו DC ?
מהם הגבולות התיאורטיים של התנועה הנוצרת בעקבות לחיצה זו, המביאה לסגירת הזווית BCD ושל תנועת הלחיצה ההפוכה, הגורמת לפתיחתה? מה קורה לדגם אם מרימים את A מהמישור של B, C ו D (אפשר להשאיר שאלה זו ללימוד ביום אחר).

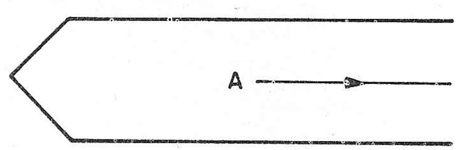
התלמידים יחליפו ביניהם את הדגמים כך שלכל תלמיד תהיה האפשרות להשתמש לפחות בשני לוחות גיאומטריים בעלי גודל שונה (מספר שונה של מסמרים) ודגמי עץ שונים. בין הדגמים יש לכלול גם דגמים, בהם לכל המקלות אורך שווה. מקרים מיוחדים אלה אפשר להציג בלוח הגיאומטרי על ידי מתיחה מתאימה של הגומיות. תוך כדי שיחה, ניסוי וטעיה ושרטוטים על גבי ניר, תתעורר בתלמידים מודעות לתכונות המשותפות של העפיפונים כקבוצה חלקית של המרובעים.

חלק מהתכונות המתקבלות בדרך כלל על ידי שימוש בדגם מוחשי מובאות כאן:

לכל עפיפון ארבע צלעות. שתיים מהן, הנחתכות, שוות זו לזו. השתיים האחרות שאף הן נחתכות גם כן שוות זו לזו. כאשר כל הצלעות שוות מתקבל מרובע מיוחד הנקרא מעוין.

כאשר עוסקים במעוינים, כקבוצה מיוחדת של העפיפונים, רואים כי לקבוצה זו שייכים גם הריבועים. הריבוע אם כן, הוא מעוין מיוחד. זהו עפיפון מיוחד וזהו מרובע מיוחד! מתוך סידרת המעוינים מקבלים ריבוע כאשר הזווית בין שתי הצלעות השוות היא זווית ישרה.

נתאר בדמיון כי הקודקוד A נע הרחק, יותר ויותר. כאשר הוא נמצא "רחוק מאד" שתי הצלעות נעשות יותר ויותר מקבילות אחת לשניה. נראה, כי חייב להתקיים מקרה מיוחד שהוא עפיפון, ובו שתי הצלעות מקבילות זו לזו. לעיתים אומרים כי הצלעות "נחתכות באינסוף".



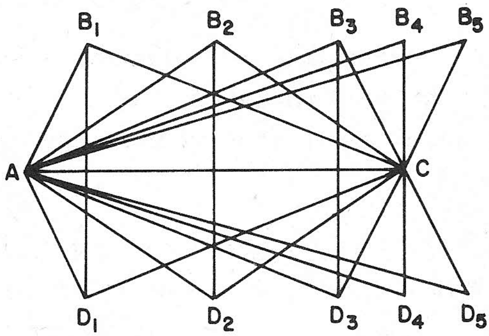
ציור 4

לכל עפיפון שני אלכסונים. בעפיפונים קעורים אחד מהם נמצא "מחוץ" לפנים העפיפון. במקרה זה נקודת החיתוך של האלכסונים נמצאת אף היא בחוץ. (מה קורה כאשר נקודת החיתוך נמצאת על אחת מהצלעות? בדוק מקרים בהם נקודת החיתוך נמצאת "כמעט בפנים" ו"כמעט בחוץ").

אחד מהאלכסונים הוא קו סימטריה של העפיפון. השני בדרך כלל, לא. אם במקרים מיוחדים גם האלכסון השני הוא קו סימטריה, העפיפון הוא מעוין.
כאשר מגלים את קו הסימטריה, מיד מקבלים תכונות רבות נוספות:
העפיפון ניתן לחלוקה לשני משולשים חופפים. אם מתבוננים בשני האלכסונים אפשר לראות זוגות נוספים של משולשים חופפים. האלכסונים יוצרים ביניהם זווית ישרה.

פעילות המביאה להבנה עמוקה יותר של העפיפונים ותכונותיהם ובאותו זמן גורמת להנאה אסתטית מהשירטוטים המתקבלים, נעשית על ידי הצגת שאלה המגבילה חלק מנתוני העפיפון ומאפשרת חופש ליתר הנתונים. משרטטים את הקבוצה החלקית המתקבלת, ביד חופשית או בעזרת סרגל ומחוגה.

1. התבונן בקבוצה חלקית של העפיפונים, בהם אורך שני האלכסונים נשאר קבוע וכן גם המקום של שני הקודקודים של אלכסון הסימטריה. כך נראה השרטוט (ראה ציור 5).

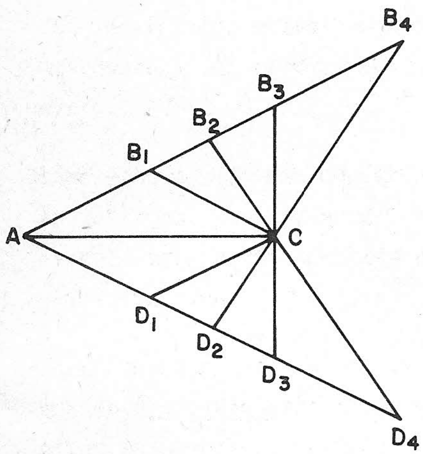


ציור 5

AB_nCD_n הוא עפיפון לכל n

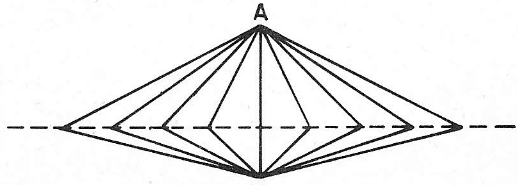
$n = 1,2,3 \ldots n$

2. השאר את שתי הצלעות AB ו AD במקומן (כלומר אין לשנות את הזווית שביניהן) וכן את הנקודה C.



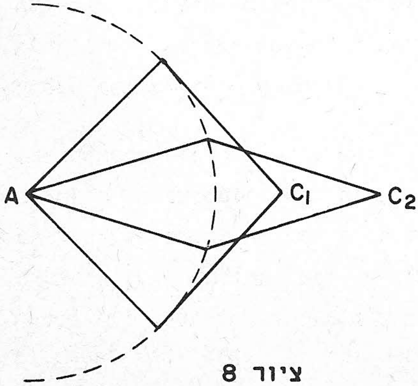
ציור 6

3. השאר את האלכסון AC במקומו ואל תשנה את מקום האלכסון השני, שנה את אורכו בלבד



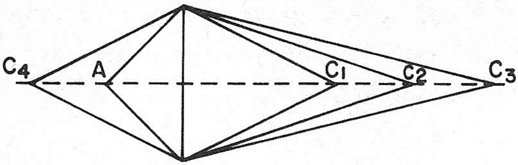
ציור 7

4. שמור על אורך כל ארבע הצלעות ועל מיקום הנקודה A. (האם זה מתאים למודל העץ?)



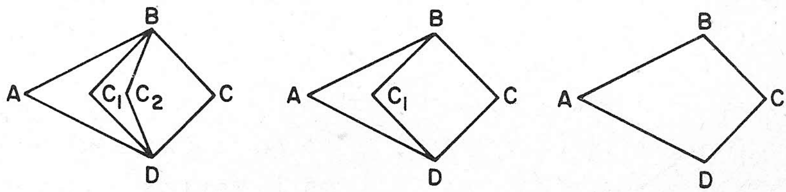
ציור 8

5. קובעים את קו הסימטריה, את מקום האלכסון השני, את אורכו וכן את הנקודה A . הקודקוד C יכול להיות כל נקודה על קו הסימטריה.



ציור 9

חלק מהשרטוטים מעוררים את השאלה "כמה עפיפונים מצוירים?" יתכן כי מספר הקוים הוא כה רב עד כי אין רואים את הסידרה הרצויה.
למשל, משרטוט 5 אפשר לבחור סידרה אחת הנראית כך:



ציור 10

מספר העפיפונים:

1	3	6	10
	ABCD	או:	או:
	ABC_1D	1+2+3	1+2+3+4
	BC_1DC		

זוהי סידרה מאד מענינת והבאת הילדים לגילוייה באמצעות העפיפון היא הדרך הטובה ביותר להצגתה.

מתוך לימוד מעין זה הדורש שימוש בלוחות גיאומטריים, דגמי עץ, ניר ועפרון ומכשירי ציור רגילים אפשר ללמוד הרבה גיאומטריה חשובה. בכיתה, השימוש בצבעים שונים בשיטת הוראה זו, מאפשר הדגשת התכונות של המשולשים שווי השוקיים כחלק מהעפיפונים, תכונות של מעוינים, ריבועים וחציית זוויות. תוצאה רבת ערך נוספת המתקבלת בהזדמנות זו היא הצעת שיטה כללית ללימוד המתמטיקה. שיטה זו מביאה לידי מעורבות והבנה, היא מעניינת ואלגנטית יותר מאשר השיטות המסורתיות.

ברוב ספרי הלימוד מופיעות ארבע בניות גיאומטריות שהתלמידים חייבים לדעת.

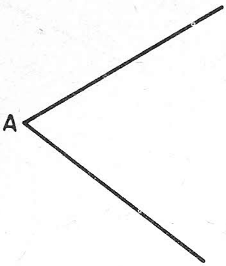
בעזרת שרטוט הם לומדים: א. כיצד לחצות זווית.
ב. להוריד אנך מנקודה לישר.
ג. לבנות אנך לישר בנקודה.
ד. לחצות קטע.

בדרך כלל מציגים בפני התלמידים את שלבי הבניה ללא כל הסבר והתלמידים משננים אותם.

נניח כי לתלמידים נסיון בעפיפונים וכי הם חקרו אותם בשיטה שתיארנו. עתה אפשר להציג גישה חדשה לגמרי להצגת ארבע הבניות.

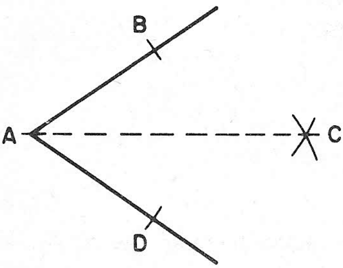
א. כיצד לחצות זווית.

נתון: זוג ישרים הנחתכים בנקודה A.
התייחס לזווית כאל שתי צלעות של עפיפון בעל קודקוד הנמצא על אלכסון הסימטריה.



ציור 11

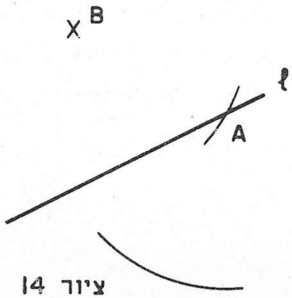
שרטט את העפיפון: על השוקיים הקצה קטעים שווים AB ו AD . מהנקודות B ו D שרטט קשתות בעלות רדיוס שווה. אם הן נחתכות בנקודה C הרי ש AC הוא חוצה הזווית, וזאת, משום ש AC הוא אלכסון הסימטריה של העפיפון ABCD אפשר לבדוק זאת שנית על ידי חצילת אותה זווית בעפיפון שונה.



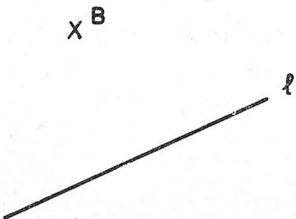
ציור 12

ב. הורדת אנך לישר מנקודה שאיננה על הישר

נתון: ישר ℓ ונקודה B שאיננה על ℓ .
התייחס לישר ℓ כאל אלכסון הסימטריה של העפיפון, ול B כאל קודקוד.
שרטט את העפיפון: מהנקודה B שרטט קשת ברדיוס כלשהו (לא כל רדיוס הוא "טוב" אבל הדבר יתבהר מיד) החותכת את ℓ בנקודה A . מהנקודה A שרטט קשת נוספת "מתחת" לישר, ברדיוס AB.

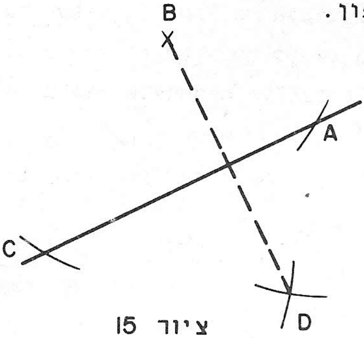


ציור 14



ציור 13

חזור לנקודה B ושרטט קשת נוספת בעלת רדיוס כלשהו החותכת את ℓ בנקודה C.
עתה מהנקודה C שרטט קשת בעלת רדיוס BC החותכת את הקשת הנמצאת מתחת ℓ.
נקודת החיתוך של שתי הקשתות היא הקודקוד הרביעי של העפיפון. BD הוא האנך
הדרוש, מכיון שהוא האלכסון השני של העפיפון.

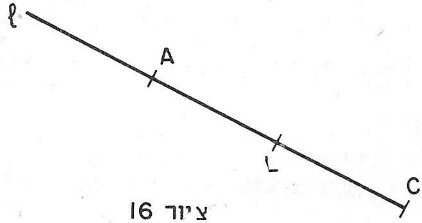


ציור 15

ג. <u>בנית אנך לישר מנקודה הנמצאת עליו</u>

<u>נתון:</u> ישר ℓ ונקודה L עליו.

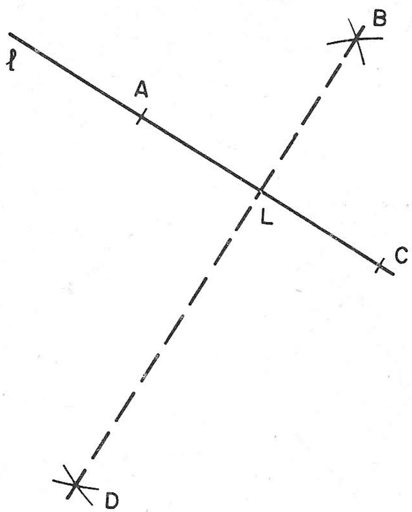
התייחס לישר ℓ כאל האלכסון שאיננו מהווה קו סימטריה ואל הנקודה L כנקודת החיתוך של שני האלכסונים.



ציור 16

<u>שרטט את העפיפון:</u>

הקצה על ℓ קטעים שווים LA, LC. מהנקודות A ו C שרטט קשתות שוות ברדיוס כלשהו. נקודת החיתוך B של קשתות אלה היא הקודקוד השלישי של העפיפון. LB הוא לכן האנך הדרוש.



ציור 17

(כדי לבדוק טענה זו אפשר לשרטט מהנקודות A ו C שתי קשתות נוספות בעלות רדיוס שווה אשר נקודת החיתוך שלהן D היא הקודקוד הרביעי. הנקודות D, L ו B חייבות להיות על אותו ישר.)

ד. <u>חצית קטע</u>

<u>נתון:</u> קטע AC

התייחס ל AC כאל אלכסון העפיפון שאיננו קו סימטריה.

<u>שרטט את העפיפון:</u> קבל את הנקודות B ו D בדיוק כפי שתואר בבעית בניה ג'.
שים לב, במקרה זה יש צורך לשרטט גם את הנקודה D. האנך הדרוש הוא BD
כי הוא אלכסון הסימטריה של העפיפון, החוצה את AC.

ציור 18

רואים איפוא כי כל ארבע בעיות הבניה הנראות לכאורה כארבע בעיות שונות, מתקבלות בקלות על ידי שרטוט העפיפון, כאשר כל פעם מתחילים עם נתוני התחלה שונים.

לשיטה שתארנו עוצמה רבה גם בשטחים מתמטיים אחרים, היא חוסכת מאמץ ואיננה דורשת מהתלמידים שינון.

בנה לך עפיפון והטיסו!