

מתמטיקה במקורות היהדות - זפי עבודה

מאת: אריאל רובינשטיין

מספר הערכות הניעו אותי לכתוב דפים אלו:

- א. דומה כי ברוב בתי הספר קיימת "הקפדה" יתרה על תחילת התחומים שבין מקצועות הלימוד השונים. אך כל מי שנתקל במבט עיניו של ילד שגילה כי מה שלמד במקצוע לימוד אחד חזר מ"כיוון" שונה במקצוע אחר, יודע עד כמה טוב ומועיל להשתחרר לפעמים מהפרדה חדה זו.
- ב. תלמידינו אינם מבורכים בהשכלה כללית, בפרט רבה הבורות בנושאי היהדות בין תלמידי בתי הספר הלא-דתיים.
- ג. ספרי הלימוד מוצפים בבעיות טכניות אשר ספורי הרקע שלהן שגרתיים.
- ד. קיים מחסור באמצעים לאימון התלמידים בעבודה עצמית.

מטרת דפים אלה להדגים אפשרות של "ולו רק לגעת" בבעיות הנכבדות הנ"ל תוך שילוב עיון ב"מקורות היהדות" עם תרגול בעיות מתמטיות; במקרה זה חישובי שטחים. בדפים הבאים מצויים דפי-עבודה הסובבים סביב ציטטות מהתנ"ך, מהתלמוד, מפירושו של הרמב"ם למשנה ומספר האמונות והדעות לרס"ג (ר' סעדיה גאון).

העבודות מתאימות לחופשת שליש, לאחר שהתלמידים למדו את הנושא המתמטי המתאים. רצוי להעביר את דפי העבודה במקביל להתייחסויות מתאימות של המורים במקצועות היהדות.

האנציקלופדיה התלמודית היא מקור מצויין להכרת והרחבת ההקשרים המתמטיים במקורות היהדות. מומלץ לחפש בה את הערכים המתאימים.

לסיום, נדגיש ונאמר כי העיסוק הטכני בקטעים הנידונים איננו מתיימר לבוא במקום הקשרם הערכי.

אחת ממצוות התורה בענין השבת מצווה:

"אל יצא איש ממקומו ביום השביעי" (שמות ט"ז, כ"ט).

נשאלת כמוכן השאלה מה פרושה של המלה "מקומו"? כיצד נקבע מקומו של אדם?

האם שכונת עין-כרם שליד ירושלים, היא חלק מאותו מקום ששמו ירושלים?

מהו גבולה של עיר ומהו התחום אשר ממנו אסור לצאת בשבת?

במסכת עירובין פרק חמישי קבעו חכמים את הלכות תחום השבת - שאין להלך מחוץ לו.

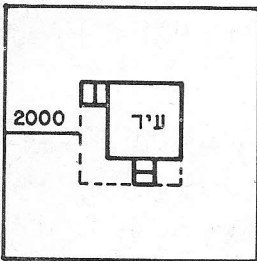
הלכל שנקבע הוא שתחום השבת מרוחק אלפיים אמה מגבולה של עיר. אולם, בדרך כלל

גבול העיר איננו קו ברור ולכן קבעו חכמים כי גבולה של עיר יהיה המלבן הקטן

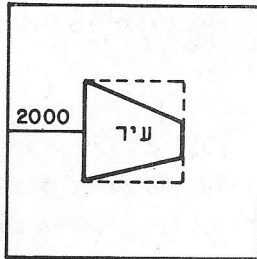
ביותר החוסם את שטח העיר. (קיימים מקרים אשר אין כלל זה חל עליהם והם מפורטים

ומבוארים בגמרא).

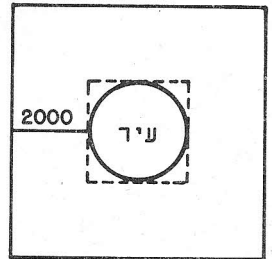
פגומים לעיר



עיר צדה מצד אחד



תחומי עיר עגולה



כיצד מודדים את החומה של עיר שיש לה שני פגומים, היוצאים משתי רוחות (צדדים) של העיר.

כיצד מודדים את התחומים לעיר צדה מצד אחד.

כיצד מודדים תחומים לעיר עגולה.

ציור 1

1. כמה הן אלפיים אמה?

2. חשב את שטח תחומי השבת של הערים הבאות:

א. עיר הבנויה בצורת ריבוע שצלעו 3000 אמה

ב. עיר הבנויה בצורת מלבן שצלעותיו 4000 ו 2000 אמה

ג. עיר שצורתה עיגול עיגול ברדיוס 500 אמה.

3. האם מהעובדה שהשטח של עיר א' גדול מהשטח של עיר ב' נובע ששטח תחום השבת

של עיר א' גדול מזה של עיר ב'?

שלמה המלך, ים הנחושת ו - π

הבית הראשון נבנה כידוע בידי שלמה המלך אשר הפקיד את מלאכת הבניה בידי חירם איש צור. מלאכת הבנין מתוארת בפרוטרוט בספר מלכים א', פרק ז'.

להלן פסוקים נבחרים המתארים את עשית ים הנחושת.

וַיִּשְׁלַח הַמֶּלֶךְ שְׁלֹמֹה וַיִּקַּח אֶת־חִירָם
 מִצֹּר: בֶּן־אִשָּׁה אַלְמָנָה הוּא מִמְטָה נִפְתָּלִי וְאָבִיו אִישׁ־עֲרִי
 חָרָשׁ נְחֹשֶׁת וַיִּמְלֵא אֶת־הַחֹכְמָה וְאֶת־הַתְּבוּנָה וְאֶת־הַדַּעַת
 לַעֲשׂוֹת כָּל־מְלָאכָה בְּנִחְשָׁת וַיָּבֹא אֶל־הַמֶּלֶךְ שְׁלֹמֹה וַיַּעַשׂ
 אֶת־כָּל־מְלָאכָתוֹ: וַיַּעַשׂ אֶת־
 הַיָּם מוֹצָק עֵשֶׂר בָּאָמָה מִשְׁפָּתוֹ עַד־שְׁפָתוֹ עֵגֶל וְסָבִיב וְחָמֵשׁ
 בָּאָמָה קוֹמָתוֹ וְקוֹה שְׁלֹשִׁים בָּאָמָה יִסֵּב אוֹתוֹ סָבִיב: וּפְקָעִים
 מוֹתָחֹת לִשְׁפָתוֹ וְסָבִיב סָבִיב אוֹתוֹ עֵשֶׂר בָּאָמָה מוֹקְפִים אֶת־
 הַיָּם סָבִיב שְׁנַי טוּרִים הַפְּקָעִים יִצְקִים בְּיַצְקוֹתוֹ: עֵמֶד עַל־שְׁנֵי
 עֵשֶׂר בְּקֹדֶר שְׁלֹשָׁה פָּנִים צְפוּנָה וְשְׁלֹשָׁה פָּנִים וַיְמַה וְשְׁלֹשָׁה וּ
 פָּנִים נִגְבָּה וְשְׁלֹשָׁה פָּנִים מִזְרָחָה וְהַיָּם עֲלֵיהֶם מִלְּמַעְלָה וְכָל־
 טו אַחֲרֵיהֶם בֵּיתָה וַיַּעֲבִיז טַפַּח וַיִּשְׁפְּתוּ כַּמַּעֲשָׂה שְׁפָת־כּוֹס פָּרַח
 טו שׁוֹשַׁן אֲלֵפִים בַּת יָכִיל:

שים לב לפסוק המודגש! בפסוק כתובות המידות של קוטר ים הנחושת והיקפו.

א. איך נאמר בלשוננו: "... עשר באמה משפתו עד שפתו עגל סביב..."?

ב. איך נאמר בלשוננו: "... וקו שלושים באמה יסב אותו סביב..."?

לצרכי חישובים משתמשים בדרך כלל בקרוב של 3.14 עבור π.

חשב את היקף ים הנחושת והשווה לחישוב הכתוב בתנ"ך.

בדוק באנציקלופדיה, במילון או בכל ספר אחר מהי אמה ומהו טפח.

בשאלה 2 התקבלה כביכול סתירה מסויימת בין החישוב שלנו וחישובו של חירם הצורי. כבר חז"ל התייחסו לבעיה זו ואחד הנסיונות לתרץ את הבעיה הוא

כי התכוון המקרא לקוטרו הפנימי של ים הנחושת (ראה שרטוט).

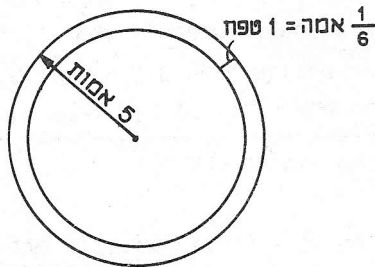
בדוק טענה זו.

רמז: אמה הינה 6 טפחים. מכאן

שרדיוס המעגל הפנימי הינו

$$5 - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{29}{6}$$

אמה אמה



ציור 2

5. נסה לחשב את ההיקף מתוך הנחה שהכוונה להיקף מעגל אשר רדיוסו $4\frac{11}{12}$ אמות הנמצא בין השפה החיצונית לבין השפה הפנימית של ים הנחושת (כיצד התקבל מעגל זה?).

6. איזה מהחישובים שחישבת קרוב ביותר לתוצאת החישוב במקרא?

גם חכמי התלמוד התלבטו בשאלת היחס שבין היקף העיגול וקטרו. להלן קטע מהגמרא - מסכת עירובין, מתוכו אפשר לקבל הערכה ל π .

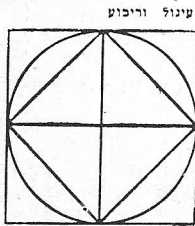
כיצד מעברין פרק חמישי עירובין

ח'א"ש. משוחאה - ויניין תמוני העיר. תחומין
 ששה עשר רגעין של ח'לף על ח'לף יש נהן. כילת,
 ל כל הנקס שתי וערב - הרי ח'רנע רגעין של ח'לף
 ה של עיר. קרנות כמה הוו - תמוני הקרנות של
 כהו, שהרי לכל
 ים על אלפים,
 . לנורך ונרש.
 ע דקרנות -
 ייר ח'לף, הרי
 גל פני העיר
 זלן וין העיר.
 ונרש לחרנע
 יתן לכל קרן
 , ה' ח'רנעס
 ה' ח'רנסר
 על ח'לף. נמצא
 אייתי ארבעה
 תלתין ותרין,
 דה' דקרני
 ויילת קהי,
 עיר ותמונין
 זר על העגול
 כ' - ח'ת
 יעגת ונרש
 ד עלה ח'גון
 ח'לפים על
 ח'ן ששה עשר

העיר, אמר רבא: בר אדא משוחאה אסברה לי [בג'א
 לי כיצד לחשב זאת] - משכחת לה במתא דהויא ח'
 אלפי [מוצא אתה זאת בעיר שהיא עצמה אלפים ע'
 תחום כמה הויא - שיתסר [תחום העיר עצמה ללא הפי
 ששה עשר אלף אג
 מחשבים לכל צד אג
 העיר ועוד אלפים ת
 צד של העיר יש ל
 אלפים אמה כפול א
 עשר אלף אמות, קר'
 שיתסר [קרנות העי
 - ששה עשר אלף]
 על אלפים אמה בכל
 דל [הוצא, הפחת] א
 מוצא אתה שם ת
 [שמונה אלפים של
 אמה ברוחב אלף לכל
 אלפים דקרנות -
 הוא סך הכל] - תרי'
 אם כן נמצא מגרי'
 ומקשים: כיצד הוא
 מתלתא נינהו [הל
 הוא] שאם כל תחום ו
 ושניים אלף אמה מ
 הוא שנים עשר אלן
 הוא יותר משליש ו

אמר רבא: בר אדא משוחאה אסברה לי,
 משכחת לה במתא דהויא תרי אלפי אתרי אלפי.
 תחום כמה הויא - שיתסר, קרנות כמה הויין -
 שיתסר, דל תמניא דתחומין, וארבעה דקרנות -
 כמה הוי, - תריסר. נמצא מגרש רביע? טפי מתלתא
 נינהו! - אייתי ארבעה דמתא שדי עלייהו, - אפתי
 תילתא הוי! - מי סברת בריבועא קאמר? בעיגולא
 קאמר. יכמה מרובע יתר על העגול - רביע. דל
 רביע מינייהו - פשו להו תשעה, ותשעה מתלתין
 ושיתא ריבועא, הוי אבני אמר: משכחת לה נמי
 במתא דהויא אלפא באלפא. תחומין כמה הוי -
 תמניא, קרנות כמה הוי - שיתסר.

7. מצא תבנית מספר המתארת את ההפרש שבין שטח הריבוע המקיף עיגול לשטח העיגול. בדוק בעזרת תבניות מספר שקולות מה היחס בין הפרש זה לבין שטח הריבוע.



$$\frac{\text{שטח העיגול} - \text{שטח הריבוע החיצוני}}{\text{שטח הריבוע החיצוני}} =$$

8. מהו לפי דעתך הקירוב של π ששימש את חכמי התלמוד?

כלאיים (המקור-פירוש הרמב"ם למשנה למסכת כלאיים)

כלאיים הוא הרכב של שני מינים. התורה אוסרת זריעה מעורבת של צמחים השייכים למינים שונים כגון דגניים וקטניות.

חלק ניכר ממסכת כלאיים (אחת ממסכתות המשנה) עוסק בשאלה איך מותר לזרוע בחלקה אחת, (בלשון הרמב"ם חלקה היא ערוגה) מינים שונים של זרעים, באופן שלא יתערבבו זה בזה.

כלאיים פרק שלישי ערוגה

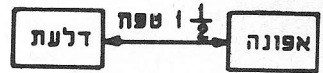
לפיכך
אם היתה זוית צמח זה סמוכה לצלע הצמח השני ומחבורת לו כזה הי"ז מותר מפני שהוא ראש תור. וכל שכן היתה זוית זה סמוכה לזוית זה כזה ♦♦ אבל אם היה צלע צמח זה מול צלע השני כזה □□ אסור לסמוך אחד לשני מפני שמתערב הכל ונעשה כלאים. ואופן ההבדלה ביניהם שירחק ביניהם טפח ומחצה והוא שיעור שלא יינקו זה מזה⁵.

בקטע זה מופיע הכלל לגבי זריעה של חלקות אשר בהן צמחים שונים,

זה בצד זה. מותר לחלקות אלה לגעת זו בזו, אם צורת הנגיעה

היא כזו: 

ואולם אם שתי החלקות נמצאות זו בצד זו המרחק ביניהן צריך לעלות על טפח ומחצה.



1. עיין באנציקלופדיה וספר בקצרה על הרמב"ם. עמוד במיוחד על היותו איש מדע, בצד היותו מגדולי חכמי ישראל בכל הדורות.

2. מהו טפח?

בפירושו של הרמב"ם למסכת כלאיים מופיעות צורות שונות של זריעה, מהן מותרות ומהן אסורות.

וכל העניינים הללו ברורים למי שלמד תורת ההנדסה. אבל מי שלא למד ממנה כלום הרי הוא מקבל את כל העניינים האלה בתור קבלה, ואם היה בעל הבנה זכה מאד הנה תכלית מה שיוכל להבין הוא סדר העניין בלבד, לא שיתברר לו.

המטרה העומדת בפנינו היא לזרוע בתוך חלקה מספר נתון של זרעים שונים באופן שהשטח הזרוע בתוך החלקה יהיה גדול ככל האפשר והזריעה תתבצע לפי ההלכה.

הבעיה כרוכה בחישובי שטחים רבים עד כי הרמב"ם אומר:

3.

לפניך שרטוט המתאר צורת זריעה מותרת! בחלקה זו שרחבה 6 טפחים וארכה 6 טפחים אפשר לזרוע 5 מיני זרעים בשטח כולל של 24 טפחים מרובעים. השטחים המסומנים ב"זרוע" הינם השטחים הזרועים. שאר השטחים אינם זרועים.
 שים לב, בלשון הרמב"ם "תשבורת" הוא חלק. כידוע כתב הרמב"ם את פרושו למשנה בערבית. לפיכך תוכל למצוא מצד שמאל את דברי הרמב"ם בערבית.
 (עבור התלמידים הלומדים שפה זו...)

בדוק את חשבוננו של הרמב"ם והסבר למה השטח הזרוע בחלקה זו הוא 24 טפח מרובע!

ולפי כל הכללים הללו אמר כי

ערוגה שטחה על שטחה אפשר לזרוע בה חמשה

מיני זרעונים ולא יהיו בלאים. וזו צורתה:

ונמצא תשבורת הזרוע בערוגה זו עשרים וארבעה טפחים כמו שמתברר מהצורה.

פעלי הדיה אלאצול

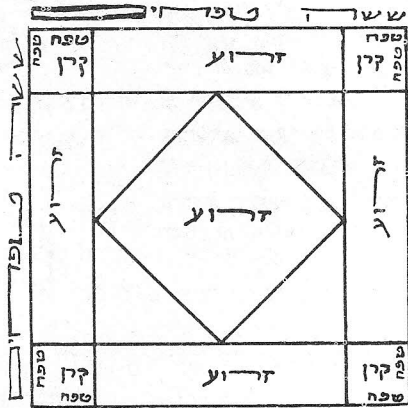
כלהא קאל אן ערוגה שטחה על שטחה ימכן אן

זרוע פיהא כימסה

אנאע מן אלזרארע ולא

תכון כלאים, והדיה

צורתהא.



4.

אלא שאפשר לזרוע בערוגה

של ששה טפחים על ששה

טפחים 5 מיני זרעים

באופן שהשטח הזרוע יהיה

27 טפחים מרובעים.

הסבר כיצד.

לפי צורה

זו עשרים ושבעה

טפחים, וזהו תכלית

מה שאפשר לזרוע

בערוגה שהיא ששה

על ששה אם זרע

בתוכה חמשה זרעונים

כמו שאמרנו.

5.

5. בנה תבניות מספר המתארות את השטחים הבאים:

א. משולש

ב. ריבוע

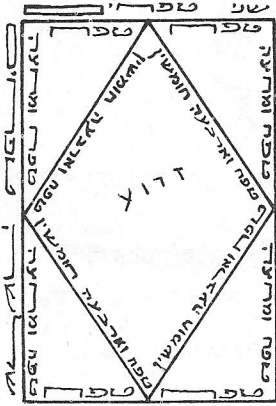
ג. מלבן

ד. מעוין .



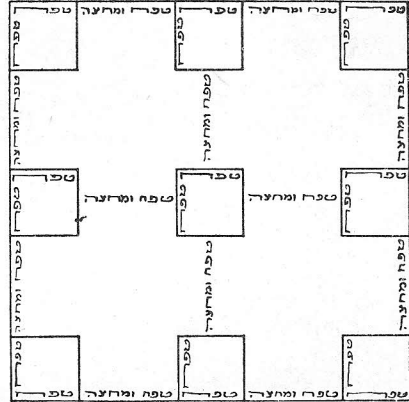
ויהיה הציור

שנעשה בתוכו אחד המצוינים
 טפחים וברחבו שני טפחים,
 ותהיה תשבורתו ששה טפחים,
 ויהיה תשבורת המעויין שבתוכו
 שלשה טפחים, וזו צורתו



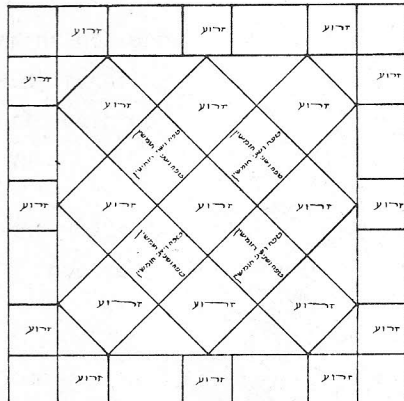
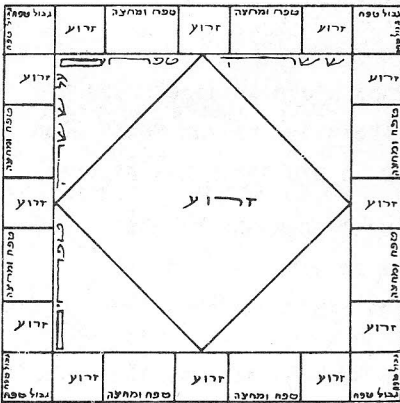
6. מדוע השטח הזרוע בחלקה
 הבאה הינו 3 טפחים מרובעים?

7. חשב את השטח הזרוע בשלושת השטחים הבאים:



היה לה

גבול טפח זרעין
 בתוכה שלשה עשר
 זרעונים שלשה על כל
 גבול וגבול כצורה זו
 ויהיה תשבורת הזרוע
 בה מאלו השלשה עשר
 מינין שלשים טפח כמו
 שמתברר מצורה זו
 למי שמתבונן בה.



והנה לא יחסר
 כלום ממדת שלשים
 הזרוע בערוגה? דע
 שאין זה אפשרי, לפי
 שיהיה בין שתי צלעות
 של כל שני מינים
 מהתשעה פחות מטפח
 ומחצה, והוא שתשעת
 המינין שבתוכה יהיה
 בין צלע כל אחד
 לחברו טפח ושני
 חומשין, ואנחנו צריכין
 טפח ומחצה כמו
 שביארנו. וסבת היותו

הערה: טפח ושני חומשין = $1\frac{2}{5}$ הטפח.



ספר האמונות והדעות

רבי סעדיה בן יוסף גאון

ביאור מלות זרות

מרכז מלה ערבית והיא שם לנקודה האמצעית מן העגולה. אשר שם העמוד רגל המחונה בעת שהעגולה :

לפניך לקט מתוך ספרו של רבי סעדיה גאון (הרס"ג) - ספר האמונות והדעות.

1. ספר בקצרה על הרס"ג. עמוד במיוחד על ייחודו של ספר האמונות והדעות.

קרא את הקטעים הכתובים בכתב רש"י. לנוחיותך הנה תרגום הקטע הראשון :

מרכז - מלה ערבית והיא שם לנקודה האמצעית מן העגולה. אשר שם תעמוד רגל המחונה בעת עשות העגולה.

שים לב, בלשונו של הרס"ג נקרא העיגול עגולה. המלה "גשם" מציינת אצל הרס"ג את המלה "גוף" (במשמעות גוף הנדסי שיש בו מהגשמיות).

2. הסבר את ארבעת המושגים: נקודה, קו, שטח, מעוקב. האם אפשר למדוד אותם ואם כן, באילו יחידות? מה ייחודו של גוף מעוקב?

3. מהו בלשונו נפחו של הגוף הראשון שהרס"ג מתאר? (ארכו אמה, רחבו אמה, וגבהו אמה). איך נקרא גוף כזה בלשונו? כתוב תבנית מספר שתתאר נפחו של גוף זה.

4. מה שטחו של הגוף השני שמתאר הרס"ג "שהוא שלוש אמות על שלוש אמות"? השב על השאלה בלשון אמות.

5. מהי אמה? (עיין באנציקלופדיה או מילון). מה שטחו של הגוף המצויין בשאלה 4 ביחידות סמ"ר (ס"מ מרובע)?

נקודה וקו ושמח ומעוקב

כל גשם אשר לו שלשה רחוקים שהם אורך ורוחב וגובה. ד"מ גשם או גוף שארטי אמה, ורחבו אמה. וגבהו אמה. זה יקרא גוף מעוקב מלאו הפתוח והיה העוקב למישור אשר הכוונה הפשוטה כי הבר הנטוי יהיה נעיל למישור מישור. ומהו קראו לכל גשם שיש לו גובה מעוקב. ושטח הוא שם לאורך ורוחב מכל גשם זולה הגובה. ד"מ גוף שהוא שלש אמות על שלש אמות. נאמר כי יש בשטח משעיה אמות. וזקף שגוף הוא גובה ג"כ שלש אמות. לא נחשוב הגובה כלל. כי שם שטח לא הונח רק על האורך והרוחב לא על הגובה. וזקף לשטח שם מלימות בנעיל. כי אי אפשר ליהיה במלימות דבר שיש לו אורך ורוחב ולא גובה

ורק שדומה במח האדם. השטח העליון מן הגוף זולה עוביו. וזה יקרא. שטח הנדסי כלומר שבעלי חכמת הנדסה. הביאם הכרח העיון. לדבר רק משטחיות הדברים זולה גובהם. והקו. אין בו לא רוחב ולא גובה. רק האורך בלבד. וגם הוא אינו במלימות מורגש כי אי אפשר לקו משהו שלא יהיה בו ארוח רוחב נעט. ורק שחכמי הנדסה אמרו לו. על קו מדומה במח האדם. שאינו חושם מקום לא ברוחב ולא בגובה. רק באורך בלבד. וזה יקרא קו הנדסי. והנקודה היא אמתו על נקודה מדומית בעת האדם. שאינה חושפת מקום לא באורך ולא ברוחב ולא בגובה ד"מ הנקודה האמנעית בעגולה שהיא מרכזה. היא מדומית בעל כלי שום חפצת מקום לא באורך ולא ברוחב ולא בגובה. כי נקודה בעלת שיעור. ואפילו שיעור קטן מאוד. עיגול הוא ולא נקודה. וז"ל אמת לבקש גם בתוך העיגול הקטן כזה את הנקודה האמנעית שהיא מרכזה. וע"כ הנקודה הזאת אינה בעלת שיעור כלל. ונקודה כזאת שאינה חושפת מקום כלל. תקרא נקודה הנדסית נעטם האמור למעלה. ועוד כתיב להבדיל מן הנקודה המחושפת ומורגשת בחוש. וזוהי התבארו הארבע מלות שהם נקודה וקו שטח ומעוקב. הרגילות הרבה על לשון חכמי הנדסה :