גיאומטרית רשת-
גיאומטריה לא אוקלידית של נקודות שריג

מאת : דונלד ר. בירקיט (D.R. Byrkit)
תרגום: חנה פרל

במאה האחרונה הושם דגש רב על מושג המבנה של מערכות מתמטיות. מבנה הפכה למילת מפתח בכתיבת ספרי לימוד והכנת מערכי שיעור. להדגמת מושג זה בחטיבה עליונה נמצאה הגיאומטריה מתאימה במיוחד. המערכת האקסיומטית של הגיאומטריה האוקלידית נחקרת לעמקה אולם בדרך כלל מקדישים תשומת לב מעטה בלבד למערכות אקסיומטיות אחרות. לעיתים, דנים במערכות אקסיומטיות שונות לגופן אך בדרך כלל, נתקל דיון זה בקשיים רבים: או שקשה מדי לפתח דוגמאות (כמו מערכות לא אוקלידיות), או שהפיתוח המתמטי של הדוגמאות מוגבל (כמו גיאומטריה סופית), או שהדוגמאות טרויאליות מדי, בכדי לעורר ענין.

מטרת מאמר זה היא להציג מערכת גיאומטרית בדידה (דיסקרטית) אשר אין לה מגרעות אלה, זו מערכת לא אקלידית שבה יכולים התלמידים לגלות משפטים ללא קושי, ובכל זאת היא איננה בהכרח גיאומטריה סופית. יתר על כן, יש לגיאומטריה זו אחיזה בחיי היום אך התוצאות המתקבלות בה עשויות להדהים. לבסוף, המערכת עשויה לספק ענין לדיוני הכיתה בשעות השפל של השיעור (כמו למשל בעשר הדקות האחרונות) במשך שעורים רבים.

במערכת אקסיומטית ישנם איברים לא מוגדרים, ביטויים לא מוגדרים ואקסיומות. כל מערכת כזו יכולה גם לאמץ תכונות מסוימות של מערכות אחרות, כמו למשל את תכונות המספרים הממשיים או את תכונותיה של תורת הקבוצות.

בהצגה זו של גיאומטרית הרשת מניחים את ההנחות הבאות:

איברים לא מוגדרים: נקודה, בלוק.

ביטויים לא מוגדרים: סמוך, חופף, חל.

תכונות מאומצות: תכונות של קבוצות, תכונות של מספרים שלמים אי-שליליים.

ישנן מספר אפשרויות ליצור מערכת אקסיומות. המערכת הבאה היא היעילה ביותר לרמת התלמידים בחטיבה העליונה.

Donald R. Byrkit, "Taxicab Geometry, a Non-Euclidean Geometry of Lattice Points". Translated from the Mathematics Teacher, May 1971 (vol. 64, pp. 418-22), copyright 1971 by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

אקסיומה 1: כל נקודה סמוכה לארבע נקודות שונות.

אקסיומה 2: כל בלוק מכיל (חל ב) שתי נקודות.

אקסיומה 3: שתי נקודות הנמצאות (החלות) באותו בלוק, סמוכות זו לזו.

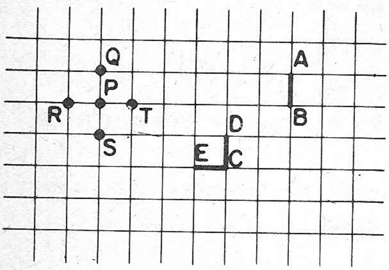
אקסיומה 4: כל זוג נקודות סמוכות, נמצאות (חלות) בבלוק אחד.

אקסיומה 5: שני בלוקים שונים נחתכים (חלים) בנקודה אחת לכל היותר.

אקסיומה 6: כל בלוק חופף לכל בלוק אחר.

הוספת אקסיומה 6 היא לצורך נוחיות בלבד. מערכת המקיימת את חמש האקסיומות הראשונות אך לא את השישית, קשה אך במעט לתאור.
מערכת אקסיומטית מתמלאת, אם אפשר למצוא מודל המתאים לה. במקרה זה, אפשר לבנות מודל ממערכת הצירים המלבנית המוכרת לנו, אם נתייחס רק לנקודות שהקואורדינטות שלהן הם מספרים שלמים. הנקודות של הגיאומטריה יהיו נקודות אלה (הנקראות נקודות שריג), נקודות סמוכות יהיו נקודות אשר להן קואורדינטה אחת זהה וקואורדינטה שניה שונה במספר אחד למשל, הנקודות (1,2) ו (2,2) הן נקודות סמוכות, בלוק יהיה זוג של נקודות סמוכות. אפשר לציין בלוק על ידי חיבור הנקודות על ידי קטע ולזכור שעל קטע זה אין נקודות של המערכת.

אפשר גם ליצור מודל משתי משפחות של ישרים מקבילים החותכות זו את זו. לשם פשטות אפשר לבחור את הישרים כך שהמרחק בין הישרים בכל משפחה יהיה שווה ומרחק זה יהיה זהה בשתי המשפחות. יתר על כן, נניח כי הזווית הנוצרת על ידי חיתוך הישרים היא זווית ישרה. התוצאה היא רשת כבישים המוכרת לנו מערים מסוימות (בעיקר בארצות הברית).
נקודות החיתוך של הישרים יוצרות את נקודות המערכת. הנקודות הסמוכות הן שתי נקודות עוקבות הנמצאות על אותו ישר. בלוקים הם קטעים המחברים נקודות סמוכות (כמו צד של בלוק בעיר אמריקאית). בציור 1 הנקודה P סמוכה לנקודות Q, R, S ו T. הבלוק $\overline{AB}$ מכיל שתי נקודות סמוכות A ו B, הבלוקים $\overline{CE}$ ו $\overline{CD}$ נחתכים בנקודה C.



ציור 1

מכיון שאנו מעונינים במסלולים שבין הנקודות נקרא לגיאומטריה זו גיאומטרית רשת (רשת כבישים).

לאחר שהתלמידים בדקו כי המערכת האקסיומטית אמנם מתמלאת על ידי מודל זה, אפשר להרחיב את הגיאומטריה על ידי הוכחת משפטים והגדרת מונחים.

להלן תוצאה פשוטה המתקבלת מהמערכת האקסיומטית:

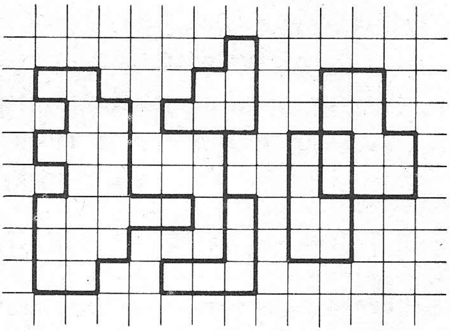
משפט 1: כל נקודה חלה בארבעה בלוקים בדיוק.

הוכחה: על פי אקסיומה 1, כל נקודה סמוכה לארבע נקודות שונות. על פי אקסיומה 4 כל זוג נקודות סמוכות חל בבלוק אחד. לכן כל נקודה חלה בארבעה בלוקים לפחות. נניח עתה כי נקודה חלה בחמישה בלוקים. על פי אקסיומה 3 תהיה נקודה זו סמוכה ל 5 נקודות, בסתירה לאקסיומה 1. לכן כל נקודה חלה בארבעה בלוקים בדיוק.

בהמשך המאמר נציג מספר משפטים. יש לעודד את התלמידים ליצור משפטים אלה ואחרים, ולהוכיחם אם אפשר. הקפדת יתר על פורמליזם עלולה בשלב זה לדכא את היצירתיות. נזכיר את המתמטיקאים פרמה (Fermat) ורמנוג'ן (Ramanujan) אשר לעיתים רחוקות הוכיחו את טענותיהם ולמרות זאת טעויותיהם היו נדירות.

להגדרות המופיעות נתנו שמות המתאימים לנושא: רשת הכבישים. כמובן מותר לתלמידים להשתמש בכל שם אחר אשר יחליטו עליו.

עקום סגור בגיאומטרית הרשת נקרא "נסיעת הלוך ושוב". ניתן להגדירו כקבוצת בלוקים בעלת התכונה שכל בלוק בקבוצה חל בדיוק בשני בלוקים אחרים מתוך הקבוצה. בציור 2, רק השרטוט השמאלי הוא נסיעת הלוך ושוב (או עקום סגור). שימו לב, בשרטוט הימני ביותר אפשר לראות שני עקומים סגורים (בשלוש צורות שונות).



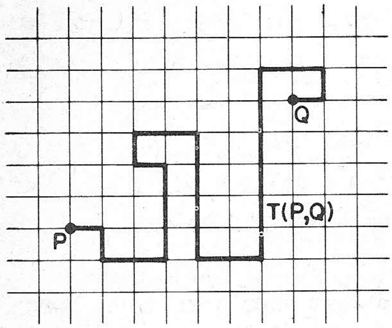
ציור 2

לחלק המסלול שבין שתי נקודות החלות בנסיעת הלוך ושוב נקרא "נסיעה". אולם, הביטוי בין הוא איננו מוגדר ולא דנו בו במסגרת גיאומטריה זו. לכן יש ליצור הגדרה מדויקת יותר של נסיעה בין שתי נקודות P ו Q שנסמנה T(P,Q). בהגדרה זו יש לקחת בחשבון* כי הנסיעה T(P,Q) היא קבוצת בלוקים בעלת התכונה, שבלוק אחד ויחיד בקבוצה מכיל את P ורק בלוק אחד ויחיד מכיל את Q, או שהנסיעה מורכבת

---

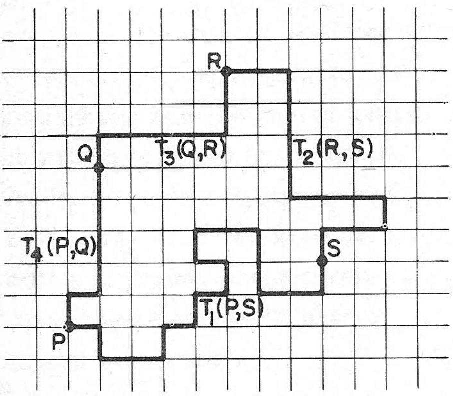
* הערת המערכת: זו איננה הגדרה מלאה אלא רק ציון נקודות אשר יש לשים לב אליהן.

מבלוק אחד המכיל את P וגם את Q, או שכל בלוק המכיל רק את P או רק את Q חל בבלוק אחד בלבד מהקבוצה, וכל בלוק אחר בקבוצה שאיננו מכיל את P או Q חל בדיוק בשני בלוקים אחרים מתוך הקבוצה. ראה ציור 3 .



ציור 3

מכיון שאנו מניחים בגיאומטריה זו את תכונות המספרים השלמים האי-שליליים אפשר לקבוע את מספר הבלוקים של נסיעה. גודל זה נקרא "<u>אורך</u>" הנסיעה ומסמנים אותו $\|T(P,Q)\|$ לפיכך, הנסיעות בין שתי נקודות יכולות להיות ארוכות כרצוננו, אך בעלות חסם תחתון. החסם התחתון נקרא "<u>המרחק</u>" שבין שתי הנקודות ומסומן PQ. מרחק זה, הוא אורך הנסיעה $T(P,Q)$, כך שאם $T'(P,Q)$ היא נסיעה כלשהי מ P ל Q אזי $\|T(P,Q)\| \le \|T'(P,Q)\|$, נסיעה $T(P,Q)$ המקיימת: $\|T(P,Q)\| = PQ$ נקראת "<u>קו ישר</u>" מ P ל Q, שים לב, בציור 4 $PS = 10$, $RS = 9$, $T_1(P,S) = 18$, $T_2(R,S) = 13$, לכן $T_1(P,S)$ ו $T_2(R,S)$ אינם קוים ישרים. מצד שני, $T_3(Q,R) = 7 = QR$ ו $T_4(P,Q) = 6 = PQ$ לכן T_3 ו T_4 הם קוים ישרים.



ציור 4

התלמידים יגלו בעצמם כי אם נסיעה $T(P,R)$ היא איחוד של שתי נסיעות $T_1(P,Q)$ ו $T_2(Q,R)$ אזי

$$T(P,R) = T_1(PQ) + T_2(Q,R)$$

כתוצאה מתגלית זו עשויים התלמידים להציע מיד סידרת משפטים. למשל:
כל קו ישר הוא איחוד של שני קווים ישרים.
ואילו ההיפך איננו נכון.

<u>משפט 2</u>: אם $T(P,R)$ הוא קו ישר מ P ל R העובר דרך Q, ו $T(P,R)$ הוא האיחוד של $T_1(P,Q)$ ו $T_2(Q,R)$ אזי T_1 ו T_2 הם קוים ישרים.

<u>הוכחה</u>: נניח כי T_1 איננו קו ישר. אזי קיים קו ישר $S_1(P,Q)$ המקיים:

$$\|S_1(P,Q)\| < \|T_1(P,Q)\|$$

יתר על כן האיחוד של S_1 ו T_2 הוא הנסיעה $S(P,R)$ הקצרה יותר מאשר T. אבל T הוא קו ישר לכן הוא קצר לפחות כמו כל נסיעה אחרת מ P ל R . לכן T_1 הוא קו ישר. באופן דומה גם T_2 הוא קו ישר.

משפט 3: אם P, Q ו R הן 3 נקודות שונות, אזי Q נמצאת על קו ישיר מ P ל R אם"ם $PQ + QR = PR$.

הוכחה: נניח כי Q נמצאת על הקו ישיר $T(P,R)$, אזי על פי משפט 2, T הוא איחוד של שני קוים ישירים, כך ש $PQ + QR = PR$.
להיפך, אם $PQ + QR = PR$ ו $T_1(P,Q)$ ו $T_2(QR)$ הם קוים ישירים אזי לאיחוד $T(P,R)$ של T_1 ו T_2 אורך PR. ואז T הוא קו ישיר על פי ההגדרה. מכיון שהנקודה Q נמצאת על T הרי שהמשפט הוכח.

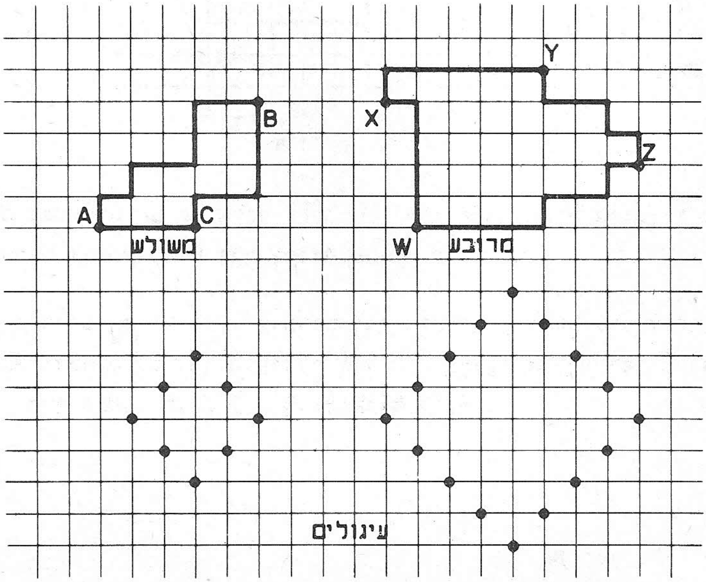
במשפט 4 נקבעים התנאים לכך שאיחוד של שני קוים ישירים הוא קו ישיר.

משפט 4: אם P, Q ו R הן נקודות שונות, $T_1(P,Q)$ ו $T_2(Q,R)$ הם קווים ישירים ו $PQ + QR = PR$, אזי האיחוד של T_1 ו T_2 הוא קו ישיר מ P ל R .

ההוכחה נובעת באופן מיידי מהעובדה שאורך האיחוד של שתי נסיעות שווה לסכום אורכי הנסיעות.

בשלב זה, התלמידים כבר מוכנים להתייחס לתיאורים גיאומטריים פשוטים המתקבלים על ידי איחוד של נסיעות, בלוקים או נקודות.

אפשר להגדיר משולש כאיחוד של שלושה קוים ישירים המהווה נסיעת הלוך ושוב.
מרובע - איחוד של ארבעה קוים ישירים המהווה נסיעת הלוך ושוב, וכך הלאה.
המעגל, המוגדר בצורה הרגילה כקבוצת נקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה נתונה, הוא קבוצה של נקודות בלבד (ולא בלוקים) ראה ציור 5.

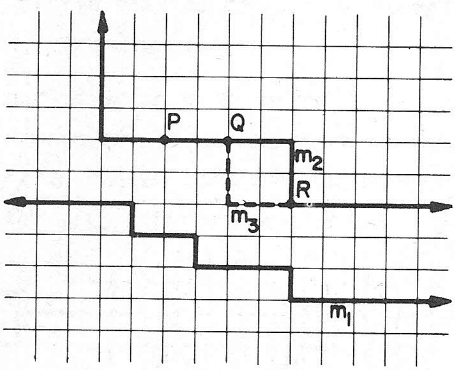


ציור 5

אי-שוויון המשולש מדגים את האופי הלא-אוקלידי של גיאומטריה זו. אי שוויון זה אומר: "סכום האורכים של כל שתי צלעות במשולש גדול מאורך הצלע השלישית". בגיאומטרית הרשת אי השוויון איננו מתמלא, במשולש המתואר בציור 5, $AB = 9$, $AC = 3$ ו $BC = 6$ לכן: $AB = AC + BC$ ובכל זאת ABC הוא משולש.
אפשר גם למצוא דוגמאות המקיימות את אי השוויון כך שלמרות שמשפט זה איננו מתקיים בגיאומטריה זו הוא איננו תמיד משפט שקרי, אמיתותו תלויה במשולש המסוים.

דוגמה מדהימה עוד יותר היא מושג ההקבלה. ישר או "מסע ממושך" הוא איחוד של קוים ישירים במובן המקובל של מושג הישר דהיינו, מסלול בעל אורך מינימלי בין כל שתי נקודות על הישר.
בדרך כלל אין צורך בהגדרה פורמלית, אך למעונינים אפשר להגדיר "מסע ממושך" כקבוצת בלוקים ונקודות המקיימת:

1. אם בלוק נמצא על ישר, אזי הנקודות החלות בו אף הן נמצאות על הישר.
2. כל נקודה על הישר נמצאת בדיוק על שני בלוקים שעל הישר.
3. אם P ו Q הן שתי נקודות כלשהן על הישר, אזי קיימת קבוצה חלקית אחת של הישר שהיא נסיעה מ P ל Q ונסיעה זו היא קו ישיר.



ציור 6

שני ישרים הם מקבילים אם הם אינם נחתכים. לכן ישנם מספר אינסופי של ישרים המקבילים לישר נתון העוברים דרך נקודה מחוצה לו.

בציור 6 שני הישרים m_2 ו m_3 עוברים דרך הנקודה P ומקבילים לישר m_1.
שני ישרים אלה עוברים גם דרך הנקודות Q ו R. כמובן שהרבה ישרים נוספים עשויים לעבור דרך הנקודות P, Q ו R ולהקביל ל m_1.

ישנן מספר מסקנות המתקבלות באופן מיידי.
מעגל ברדיוס r מכיל $4r$ נקודות.
כדי להגדיר היקף של עיגול, שימו לב לעובדה כי היקפו של עיגול ברדיוס r הוא $8r$ בלוקים.

נושא מעניין נוסף המתאים לדיון בכיתה הוא המקום הגיאומטרי של נקודות המקיימות תכונות מסויימות. למשל, מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות הנמצאות במרחק שווה משתי נקודות? אילו תנאים נוספים הכרחיים על מנת לפתור את הבעיה? האם חשוב לדעת את המרחק (זוגי או אי זוגי) שבין שתי הנקודות?

אפשר להרחיב את גיאומטרית הרשת על ידי דיון במספר הקוים הישירים שבין שתי נקודות. בשלב זה כדאי להציג את המושג "באותו רחוב". אם ישנו קו ישיר אחד בלבד בין P ל Q מסמנים נסיעה זו על ידי PQ. ואומרים כי P ו Q נמצאות באותו רחוב. רואים כי, אם P ו Q הן שתי נקודות שאינן באותו רחוב, אזי ישנן שתי נקודות אחרות אשר כל אחת מהן נמצאת באותו רחוב של P ו Q גם יחד.

אם אחת מנקודות אלה היא R אז מספר הקוים הישירים שבין P ו Q הוא המקדם הבינומי $\binom{PQ}{PR}$.

גיאומטרית רשת אנליטית אלגנטית אפשר לפתח על ידי שימוש בנקודות שריג של מערכת צירים מלבנית עם ההנחה הנוספת של תכונות המספרים השליליים (בנוסף לאי שליליים).

נוסחת המרחק תהיה אז

$$d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

משוואת המעגל בעל רדיוס r ומרכז (h,k) היא

$$|x - h| + |y - k| = r$$

משפט 5: אם $P(x,y)$ $Q(x',y')$ ו $R(r,s)$ הן שלוש נקודות שונות אזי R נמצאת על קו ישיר בין P ל Q אם"ם:

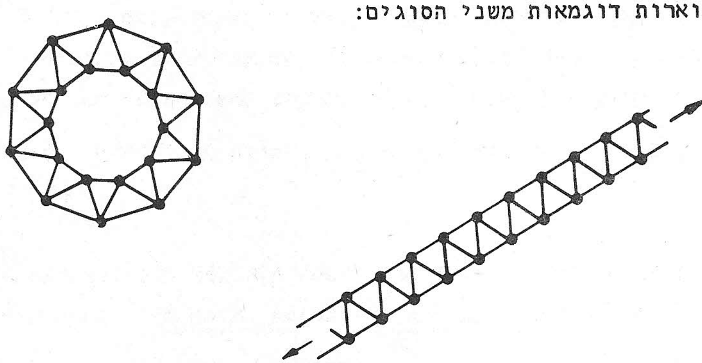
$$|2r - x - x'| \leq |x - x'|$$

$$|2s - y - y'| \leq |y - y'|$$

לבסוף, יש לשים לב לעובדה כי מערכת האקסיומות שלפיה בנינו מודל זה איננה קובעת מודל יחיד. במילים אחרות, קיים לפחות מודל אחד נוסף השונה בעיקרו מהמודל המתואר כאן. למעשה אפשר לבנות מודל סופי שיכיל 2n נקודות ו 4n בלוקים לכל n שלם הגדול מ 2 .

בצורה דומה אפשר לבנות גם מודל בעל מספר אינסופי של נקודות ובלוקים.

בציור 7 מתוארות דוגמאות משני הסוגים:



ציור 7

הקורא יכול לוודא כי האקסיומות מתקיימות. אם נראה כי אקסיומה 6 (חפיפת בלוקים) איננה מתמלאת אפשר להגדיר אורך של בלוק כיחידה אחת, מבלי להתייחס לגודלו בשרטוט או לבנות את המקרה הסופי על משטח גלילי. כדאי להתבונן ביתר פירוט במודל האינסופי שהזכרנו.

גיאומטרית הרשת היא נושא מאלף לדיוני כיתה והיא עשויה להוביל תלמידים לצורות חשיבה חדשות.