הרכבה של פונקציות ליניאריות

מאת: צ'רלס סגווין (C. P. Seguin)
תרגום: חנה פרל

הקדמה

תרגילים מהסוג "אם..., אז..." אינם מהווים תמיד אתגר, כי מראש הם מגלים פרטים רבים מדי. טובים יותר הם התרגילים המכילים השערות בלבד, ודורשים מהתלמידים להסיק מסקנות ולהוכיחן, או התרגילים המציגים מסקנה והתלמיד צריך לספק את ההשערות הדרושות להוכחתה. טובות מכל, כך נראה, הן בעיות חקר המציגות רעיונות בסיסיים בלבד ומותירות לתלמיד לפתח אותם. התלמיד צריך להגדיר הגדרות מתאימות, לנסח משפטים חשובים ולהוכיחם.

מטרת מאמר זה היא לדון בבעית "מחקר" כזו הנמצאת בתחום יכולתם של תלמידים רבים ובאותה עת גם מהווה אתגר לכוח יצירתם. לבעיה זו יתרון נוסף, באשר היא מציגה לפני התלמידים רעיונות חשובים מנושאים מתמטיים שונים.

דיון לא פורמלי

נגביל את עצמנו לשדה המספרים הממשיים R .

<u>הגדרה</u>: תהיינה f ו g שתי פונקציות מ R ל R . ההרכבה של f ו g היא פונקציה המסומנת על ידי $f \circ g$ המקיימת $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ לכל x ב R .

קל להראות בעזרת דוגמאות כי פעולה בינרית זו, המוגדרת על אוסף הפונקציות הממשיות איננה חילופית.

למשל אם $f(x) = x + 1$ ו $g(x) = x^2$

נקבל $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = x^2 + 1$

אבל $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

לכן $f \circ g \neq \circ f$

Charles P. Seguin, "Commuting Linear Functions and Fixed Points".
Translated from the <u>Mathematics Teacher</u>, December 1965 (vol.58, pp.702-4)

באילו תנאים, אם בכלל, נכונה הטענה כי $f \circ g = g \circ f$. במילים אחרות, מתי קיים $f[g(x)] = g[f(x)]$ לכל x ב R ?

בעיה זו, במקרה הכללי, קשה מאד לפתרון. לכן נצטמצם ונתבונן רק בפונקציות ממשיות לינאריות, כלומר בפונקציות מהצורה $f(x) = ax + b$ כאשר a ו b הם מספרים ממשיים. בשלב זה אפשר לתת את המשפט הבא כתרגיל. (עיין למשל בספר: Howard Levi, Foundations of Geometry and Trigonometry, New York Prentice-Hall 1960, chapter i, exercise 13 .)

משפט 1

תהיינה f ו g שתי פונקציות ממשיות לינאריות.
אזי $f \circ g = g \circ f$ אם ורק אם $(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0)$

הוכחה

נתונות הפונקציות $f(x) = ax + b$ ו $g(x) = cx + d$

על פי ההגדרה $f \circ g = g \circ f$ אםם $f(g(x)) = g(f(x))$

$$f(g(x)) = f(cx + d) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$$

$$g(f(x)) = g(ax + b) = c(ax + b) + d = acx + cb + d$$

לכן $f \circ g = g \circ f$ אםם $ad + b = cb + d$

מכיון ש $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(d) = ad + b$

ו $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(b) = cb + d$

נקבל כי $f \circ g = g \circ f$ אםם $(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0)$

משפט זה אומר כי הפונקציות $g \circ f$ ו $f \circ g$ מקבלות אותם ערכים <u>לכל x</u> אםם הן מקבלות אותו ערך ב 0 !

המסקנה הבאה מציגה את התנאי $(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0)$ בצורה שימושית יותר אך פחות אלגנטית:

<u>מסקנה:</u> אם $f(x) = ax + b$ ו $g(x) = cx + d$
אזי $f \circ g = g \circ f \Longleftrightarrow f(d) = g(b)$.

הוכחה

הוכחת המסקנה נובעת באופן ישיר מן המשפט כי
$(f \circ g)(0) = f(d)$ ו $(g \circ f)(0) = g(b)$

שימו לב, שתי משוואות אלה הופיעו כבר בסוף ההוכחה של המשפט הקודם.

תוצאה זו איננה מלהיבה, היא פשוט איננה "אומרת" הרבה. לאור העובדה כי הגרפים של הפונקציות הלינאריות הם קווים ישרים, יש להניח כי לתנאי זה צריך להיות הסבר גיאומטרי פשוט.

בשלב זה יש לעודד את התלמיד "לשחק" עם הבעיה ולראות אם הוא יכול לתאר בצורה מפורטת יותר עבור אלו פונקציות g מתקיים $f\circ g = g\circ f$ כאשר f היא פונקציה נתונה. במקרה זה אפשר להשתמש בתנאי $f(d) = g(b)$ על מנת לקבוע אילו פונקציות g מקיימות: $f\circ g = g\circ f$.

תוך כדי מחקר מתברר כי יש להבחין בין שלושה מקרים:

$f(x) = x$ או $f(x) = x + b$ $b \neq 0$ או $f(x) = ax + b$ $a \neq 1$.

אם $f(x) = x$ אזי <u>כל</u> פונקציה g מקיימת את התנאי $f\circ g = g\circ f$.

אך אם $f(x) = x + b$ $b \neq 0$, הפונקציות g היחידות המקיימות את התנאי הן מהצורה $g(x) = x + d$ (מדוע?)

המקרה המענין ביותר הוא המקרה השלישי שבו $f(x) = ax + b$. נתבונן למשל בפונקציה $f(x) = 2x + 1$, נשתמש בתנאי $f(d) = g(1)$ ונקבל כי:
$f\circ g = g\circ f$ אםם $c = d + 1$ מכאן, כאשר $g(x) = -x - 2$ או $g(x) = -1$
או $g(x) = 3x + 2$ מתקיים ש $f\circ g = g\circ f$.

פונקציות אלה מתקבלות כאשר d מקבל את הערכים: -2 , -1 ו 2 . אולם גם פונקציות אלה אינן מבהירות לנו מה בעצם מתרחש כאן. אם נשרטט את הגרפים של שלושת הפונקציות יחד עם הגרף של $f(x) = 2x + 1$, נגלה כי כולם נחתכים בנקודה $(-1,-1)$.
כאשר בודקים דוגמאות נוספות עם פונקציות בהן $a \neq 1$, רואים כי התופעה של חיתוך כל הפונקציות g עם f בנקודה אחת, היא תופעה אופיינית. יתר על כן, נקודת החיתוך בכל מקרה היא מהצורה (k , k) .

מיד עולה השאלה: מה הקשר בין נקודה זו לפונקציה המקורית f ?
התשובה הגיאומטרית פשוטה: נקודה זו היא נקודת החיתוך של הגרפים:
$f(x) = ax + b$, $a \neq 1$ ו $h(x) = x$ (פונקצית הזהות).
אם התלמיד מגלה דבר זה בכוחות עצמו יש סיכוי רב שיצליח לייצג את המקרה גם בצורה אנליטית, היינו $f(k) = k$. יתכן גם כי יוכל לנסח זאת על ידי הגדרת המושג של נקודת שבת.

לאחר שהתלמידים יבדקו כמה פונקציות ויערכו מספר נסיונות, חלקם כבר יהיו מסוגלים לנסח את התוצאות שקבלו על ידי העלאת ההשערות הבאות, והוכחת המשפטים המופיעים בקטעים הבאים. ישנן צורות רבות לארגון החומר, אני מציג דרך אחת.

נקודות שבת של פונקציות לינאריות

<u>הגדרה:</u> מספר ממשי k נקרא נקודת שבת של פונקציה ממשית f אםם $f(k) = k$.

<u>משפט 2</u>

לכל פונקציה לינארית מהצורה $f(x) = ax + b$, $a \neq 1$ יש נקודת שבת יחידה.
לפונקציה $f(x) = x$ התכונה כי כל נקודות ההגדרה שלה הן גם נקודות השבת שלה.

<u>הוכחה</u>

נתבונן במקרה הראשון $f(x) = ax + b$, $a \neq 1$

נניח כי קיים מספר ממשי k עבורו $f(k) = k$

במקרה זה $k = f(k) = ak + b$

$$k(1 - a) = b$$

$a \neq 1$ לכן $1 - a \neq 0$

ומכאן נקבל כי $k = \dfrac{b}{1 - a}$

עתה קל להראות כי אם $a \neq 1$ אזי $f(\dfrac{b}{1 - a}) = \dfrac{b}{1 - a}$

פירושו של דבר הוא כי $\dfrac{b}{1 - a}$ היא נקודת שבת והיא יחידה.
התוצאה כי כל הנקודות בהן מוגדרת הפונקציה $f(x) = x$ הן נקודות שבת נובעת באופן מידי.

עתה נראה כי פונקציות לינאריות אלה הן היחידות בעלות נקודות שבת.

נניח כי $f(x) = ax + b$ ו $f(k) = k$

כמו קודם $k = f(k) = ak + b$

לכן $k(1 - a) = b$

אם $a = 1$ אזי $b = k \cdot 0 = 0$ ו $f(x) = x$

אם $a \neq 1$ נקבל פונקציה מהצורה $f(x) = ax + b$

<u>מסקנה:</u> הפונקציות הלינאריות היחידות אשר אין להן נקודות שבת הן מהצורה $f(x) = x + b$, $b \neq 0$.

משפט 3

פונקצית הזהות $f(x) = x$ מקיימת את השוויון $f\circ g = g\circ f$ לכל פונקציה g .

ההוכחה ברורה.

משפט 4

תהי נתונה פונקציה לינארית $f(x) = x + b$, $b \neq 0$ אזי כל פונקציה לינארית מהצורה $g(x) = x + d$ מקיימת את התנאי $f\circ g = g\circ f$.
יתר על כן, פונקציות אלה הן היחידות המקיימות שוויון זה .

הוכחה

תהי $g(x) = cx + d$
על פי המסקנה ממשפט 1 (במקרה $a = 1$) $f\circ g = g\circ f$ אםם $f(d) = g(b)$
במקרה שלנו $f(d) = d + b$ ו $g(b) = cb + d$
לכן $f\circ g = g\circ f$ אםם $b = cb$, מכיון ש $b \neq 0$ שוויון זה יתקיים אםם $c = 1$ כלומר, g מקיימת את השוויון הדרוש אםם $g(x) = x + d$.

הערה: המובן הגיאומטרי של משפט זה הוא שכל פונקציה לינארית f אשר הגרף שלה הוא ישר בעל שיפוע 1 (פרט לפונקצית הזהות) מקיימת את השוויון $f\circ g = g\circ f$ רק אם הפונקציות g הן פונקציות לינאריות אשר הגרפים שלהם הם בעלי שיפוע 1 .

משפט 5

נתונה הפונקציה $f(x) = ax + b$, $a \neq 1$ אזי כל פונקציה מהצורה $g(x) = cx + d$ מקיימת $f\circ g = g\circ f$ אםם ל f ול g אותה נקודת שבת .

הוכחה

נניח תחילה כי $f\circ g = g\circ f$
תהי k נקודת השבת היחידה של f , $f(k) = k$ (על פי משפט 2 קיימת נקודה כזו).

$$f\circ g = g\circ f \Longrightarrow (f\circ g)(k) = (g\circ f)(k)$$

אולם $(f\circ g)(k) = f[g(k)]$ ו $(g\circ f)(k) = g[f(k)] = g(k)$

לכן $f[g(k)] = g(k)$

מכאן $g(k)$ היא נקודת שבת של f .

הוכחנו כי נקודת השבת היא יחידה. אולם על פי ההנחה, k גם היא נקודת שבת של f.
מכאן $g(k) = k$, כלומר k היא גם נקודת שבת של g .

מסקנה: ל g ול f אותה נקודת שבת k .

<u>להיפך</u>: נניח כי לשתי הפונקציות אותה נקודת שבת $f(k) = k$ ו $g(k) = k$
ממשפט 2 אנו יודעים כי נקודת השבת היחידה של f היא $\frac{b}{1-a}$ לכן $k = \frac{b}{1-a}$
מכיון ש $k = g(k) = ck + d$ נקבל $d = k(1 - c)$

לכן $$d = \frac{b}{1-a}(1 - c)$$

ומכאן $$ad + b = cb + d$$

אבל $ad + b = f(d)$ ו $cb + d = g(b)$

לכן $$f(d) = g(b)$$

על פי המסקנה ממשפט 1 $\quad f\circ g = g\circ f$

<u>הערה</u>: מבחינה גיאומטרית פירושו של המשפט האחרון הוא, כי אם הגרף של f הוא קו ישר ששיפועו שונה מ 1 והוא חותך את הישר $y = x$ בנקודה D אזי כל פונקציה לינארית אחרת g מקיימת $f\circ g = g\circ f$ אםם הגרף שלה עובר אף הוא דרך הנקודה D .

לסיכום רוצה אני לציין כי משפט 5 קשור לבעיה אשר טרם נפתרה (עד תאריך פרסום המאמר ב 1965).
המתמטיקאים: אלדון דייר (Eldon Dyer) בשנת 1954, אלן שילדס (Allen Shields) בשנת 1956, ולסטר דובינס (Lester Dubins) בשנת 1956, שיערו כל אחד בנפרד כי אם f ו g הן פונקציות רציפות המעתיקות קטע ממשי סגור לעצמו ומקיימות $f\circ g = g\circ f$ אזי יש להן נקודת שבת משותפת.

באופן כללי, לא ידוע אם השערה זו נכונה או לא. משפט 5 מאמת השערה זו במקרה הפשוט ביותר, כאשר f ו g הן פונקציות לינאריות. ההשערה אומתה על ידי הסקל כהן (Haskel Cohen) [1], ורלף דה מר (Ralph De Marr) [2] גם במקרים פחות פשוטים אבל עדיין רק במקרים מיוחדים. בעיה אנלוגית לגבי פונקציות מורכבות נפתרה על ידי שילדס (Shields) [4] .

מקורות

1. Cohen, Haskell, "On Fixed Points of Commuting Functions", Proceedings of American Mathematical Society, XV (1964), 293-96.
2. De Marr, Ralph, "A Common Fixed Point Theorem for Commuting Mappings", The American Mathematical Monthly, LXX (1963), 535-37.
3. Ritt, J.F., "Permutable Rational Functions", Transactions of American Mathematical Society, XXV (1923), 399-448.
4. Shields, Allen L., "On Fixed Points of Commuting Analytic Functions", Proceedings of the American Mathematical Society, XV (1964), 703-6.