שברי יחידה בתקופת מצרים העתיקה

מאת: מקסים ברוקהיימר, מכון ויצמן למדע, רחובות
תרגום: חנה פרל

הקדמה

מרבית ההיסטוריונים של המתמטיקה מקדישים דפים מעטים בלבד למתמטיקה המצרית העתיקה ולעיתים רק שורות בודדות. אחת הסיבות לכך היא מיעוט החומר המקורי מאותה תקופה, וזאת, משום שרוב כתבי המצרים נכתבו על גבי פפירוסים הנוטים להתפורר במשך השנים. יתכן ויתגלה חומר נוסף אך בינתיים עלינו להסתפק בשני המסמכים העיקריים אשר בידינו: פפירוס ריינד (Rhind) המכיל 85 בעיות ופפירוס מוסקבה. משערים שהם נכתבו לפני כ- 3500 שנה בתקופת יוסף במצרים בערך במאה ה- 17 לפני הספירה.

אין מטרתו של מאמר זה לדון בהיסטוריה הכללית של המתמטיקה המצרית אלא להתרכז בנושא אחד: שברי היחידה. ייחודו של נושא זה הוא לא רק בכך שהוא נושא מעניין המעסיק היסטוריונים מתמטיים, אלא בכך שאפילו כיום הוא מעורר מדי פעם בעיות המעניינות מתמטיקאים העוסקים במחקר. סיבה נוספת לעניין הרב של נושא זה נובעת מכך שהוא מעלה הן בעיות פשוטות והן בעיות מסובכות המתאימות למתמטיקה של בית הספר. מורה המעונין כי תלמידיו ירכשו מיומנות גדולה יותר בשברים יכול לעניין את תלמידיו בעזרת הצגת הרקע ההיסטורי של הנושא. לתלמידים האוהבים לפתור בעיות יש מגוון רב של בעיות אשר הצגתן פשוטה, אך מהוות אתגר אף לטובים ביותר.

שברי היחידה

שבר יחידה הוא שבר חיובי אשר מונהו הוא המספר 1. לכן כל שברי היחידה הם מהצורה $\frac{1}{n}$ כאשר $n \in N$, N - קבוצת המספרים הטבעיים.
יתכן כי אלמלא העובדה שהמצרים כתבו את כל השברים בין 0 ל 1 כסכום של שברי יחידה, לא היה אף אחד מתעניין כלל בשברי היחידה ובבעיות הקשורות בהם.
(יוצא הדופן היחיד, הוא השבר 2/3 אשר לו נתנו המצרים סמל מיוחד).
בטרם נתבונן בשימוש המצרי בשברי היחידה נציג דוגמה טיפוסית המראה כיצד, בזמנים מודרניים, מגלה חוקר מתמטיקאי ענין בנושא מסויים.

ג'ימס יוסף סילבסטר (James Joseph Sylvester) היה אחד מהמתמטיקאים המפורסמים במאה הקודמת. הוא היה אדם בעל אישיות מגוונת ולמרות שמו, היה יהודי.
במאמר שפורסם ב- 1880 הוא כותב: "הענין הקודם עלה בראשי בעקבות הפרק בספרו של קנטור Geschichte der Mathematik אשר מסביר את השיטה המוזרה בה השתמשו המצרים הקדמונים בעבודתם בשברים. היה להם מנהג מוזר לפרק כל שבר לסכום של שברים פשוטים (שברי יחידה) בשיטה מסורתית מסוימת אשר רק במקרים אחדים פשוטים ביותר, מובילה אל השיטה אשר בידי...."

במאמרו מציע סילבסטר שיטה פשוטה להצגת כל שבר כסכום של שברי יחידה. פיבונציי (Fibonacci) שחי בשנים 1170-1250, כבר השתמש בשיטה זו, אך יש להניח כי סילבסטר לא ידע על כך.

בטרם תקרא על שיטתו של סילבסטר, חשוב! כיצד היית אתה מתמודד עם בעיה זו. נסה למשל לפרק את $\frac{4}{7}$. דרך אגב, מאז ימי המצרים כללי המשחק לא השתנו הכלל הפשוט והיחידי הוא: כל שברי היחידה המופיעים בסכום חייבים להיות שונים זה מזה, אחרת, $\frac{4}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$ הוא פתרון טריויאלי.

שיטתו של סילבסטר היא למעשה הגיון פשוט. נדגים אותה על ידי פירוק $\frac{4}{7}$ תחילה, מצא את שבר היחידה הקרוב ביותר לשבר הנתון והקטן ממנו, במקרה זה הוא $\frac{1}{2}$ ואז

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{2} = \frac{8-7}{14} = \frac{1}{14}$$

כך

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$$

במקרה הצורך המשיך סילבסטר להפעיל את אותה שיטה לגבי כל שלב נוסף. לדוגמה $\frac{5}{7}$:

$$\frac{5}{7} - \frac{1}{2} = \frac{10-7}{14} = \frac{3}{14}$$

$$\frac{3}{14} - \frac{1}{5} = \frac{15-14}{70} = \frac{1}{70}$$

כך ש:

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{70}$$

נחמד וקצר! אולם לא תמיד הדבר כה פשוט. נסה לפרק את $\frac{4}{77}$, כאשר תהיה בידך התוצאה השווה אותה לזו של המצרים: $\frac{1}{22} + \frac{1}{154}$. (שים לב כי ההצגה של שבר כסכום של שברי יחידה איננה הצגה יחידה. בידינו למשל שתי הצגות ל $\frac{4}{77}$. אף אם נגביל את מספר שברי היחידה המופיעים בכל הצגה, נוכל למצוא שברים להם אפשרויות הצגה רבות לאין ספור).

בטרם תסיק את המסקנה המוטעית כי המצרים היו "פקחים יותר" מסילבסטר המומחה למתמטיקה, נסה לפרק את $\frac{2}{19}$ והשווה את תשובתך לתוצאה המצרית $\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$. אין פה ענין של פקחות יתרה. השיטה המצרית למציאת שברי היחידה איננה ידועה לנו ולמרות שיש בידינו השערות רבות אל לנו להפריז בערכן. ההבדל היסודי בין שיטת סילבסטר לשיטה המצרית הוא - שיטתו של סילבסטר היא אלגוריתם, כלומר שיטה המביאה לתוצאה יחידה על ידי הפעלת תהליך החוזר עם עצמו עם כל שבר, בעוד שהמצרים השתמשו כנראה בקריטריון כלשהו על מנת לבחור מבין הצורות הרבות האפשריות, את הצורה הנוחה להם לצרכיהם.

כיצד נדע כי שיטתו של סילבסטר פועלת תמיד? באופן אינטואיטיבי זה נראה כך, אך אינטואיציה עשויה להטעות. סילבסטר הוכיח כי בסוף כל שלב כאשר מחסרים את שבר היחידה הקרוב ביותר, המונה של השבר המתקבל, קטן ממונה השבר אשר התקבל בשלב הקודם. כיון שהמונים הולכים וקטנים, וכמובן, נשארים חיוביים התהליך חייב להסתיים במספר סופי של צעדים.

את הטענה כי מוני השברים הולכים וקטנים קל להוכיח. נסה זאת בעצמך בטרם תקרא את ההוכחה הכתובה כאן.

הוכחה:
נניח כי בשלב מסוים קבלנו את השבר $\frac{a}{b}$, וכי $\frac{1}{n}$ הוא שבר היחידה הקטן, הקרוב ביותר אליו.

קיים $\frac{1}{n} < \frac{a}{b} < \frac{1}{n-1}$ או $n-1 < \frac{b}{a} < n$ (1)

עתה חסר $\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{na-b}{bn}$

הטענה היא $na - b < a$

זאת מקבלים מיד מהמחצית הראשונה של אי-שוויון (1) כי

$$n - 1 < \frac{b}{a} \Longrightarrow na - a < b$$

$$\Longrightarrow na - b < a$$

בטרם נעזוב את שיטת סילבסטר מן הראוי לציין כי למעשה הוכחנו משפט נאה:
"כל שבר (חיובי, בין 0 ל 1) ניתן להצגה כסכום של מספר סופי של שברי יחידה".

צורת הכתיבה המצרית ושברי היחידה:

השאלה המתבקשת ביותר בנושא זה היא מדוע השתמשו המצרים בשברי היחידה? מדוע השתמשו בחישוביהם ב $\frac{1}{15} + \frac{1}{3}$ במקום ב $\frac{2}{5}$ או ב $\frac{1}{606} + \frac{1}{303} + \frac{1}{202} + \frac{1}{101}$ במקום ב $\frac{2}{101}$.

לנו נראה הדבר כחסר הגיון, אך התשובה כנראה טמונה בצורת הכתיבה שלהם.
אני מדגיש שוב, כל עוד לא נמצא מסמך אשר בו מסבירים המצרים את מניעיהם, כל תשובה שניתן היא רק בגדר השערה. אבל אם ההשערה נכונה, היא מראה בפעם נוספת, כמו במקרים רבים בהיסטוריה של המתמטיקה, כי סימון גרוע עשוי לעכב התקדמות מתמטית ואילו סימון מוצלח יכול לקדמה.

למצרים לא היה כל סמל ל $\frac{7}{8}$ או ל $\frac{16}{23}$. בכתב ההירוגליפים אשר היה הכתב (חריטה ליתר דיוק) המתוחכם יותר כתבו את המספרים 12 ∩||, הסימן ∩ מסמל 10 וכל קו מסמל 1. כיוון הקריאה הוא מימין לשמאל גם במספרים. את השבר $\frac{1}{12}$ כתבו המצרים 12 ומעליו סימן חדש ⬭, כלומר ∩||. כתב ההירוגליפים הוא כתב ציורי וסימן זה נראה כפה פעור. בכתב ההירוגליפים המאוחר יותר, כמו זה הכתוב על גבי פפירוס רינד, הפך המספר 12 לסימן ᴧ|| ו $\frac{1}{12}$ ל ᴧ||. כלומר, המצרים הוסיפו נקודה מעל הספרה הראשונה ועל ידי כך הפכו את המספר 12 ל $\frac{1}{12}$.

מכאן אנו רואים כי לו רצו המצרים להשתמש בשברים אחרים, פרט לשברי היחידה היו זקוקים לסימון חדש לכל שבר כי גם הנקודה וגם הפה הפעור לא ציינו את הספרה 1. למעשה $\frac{2}{3}$ הוא השבר היחידי, שאינו שבר יחידה, אשר בו השתמשו המצרים, ואותו סימנו בסימן מיוחד. רבוי סימנים כאלה היה בודאי מבלבל את המצרים עוד יותר מהשימוש בשברי היחידה. אנו יכולים איפוא לשער כי הסימון המצרי מנע מהם מלעבוד עם שברים כלליים. באופן כללי ישנם דברים מוזרים נוספים בצורת הסימול המצרי אך אנו נטפל רק בשברי היחידה ומעתה נציג את תוצאות המצרים בצורת הכתיבה שלנו.

כפל מצרי

בשיטת הכפל המצרי השתמשו במשך מאות שנים והיא עדיין מתוארת במספר ספרי לימוד. נתאר שיטה זו באמצעות דוגמה. נניח כי אנו רוצים לכפול 21 ב 13 אזי נבצע את החישוב כך:

	1 ✓	21
	2	42
	4 ✓	84
	8 ✓	168
סה"כ	13	273

כמעט ואין צורך בהסברים נוספים. כל פעם כופלים פי שניים את המספר המקורי במקרה זה 21, עד אשר הכפל הבא מביא אותנו למספר הגדול מ 21×13. בשלב זה נסמן את החזקות של 2 אשר סכומן הוא 13 ונחבר את הכפולות המתאימות בעמודה השניה. כאן מסתמכים על העובדה כי כל מספר ניתן להצגה כסכום של חזקות של 2 (טענה פשוטה לכל הרגילים לסימון הבינרי) במקרה זה:

$$13 \times 21 = (1 + 4 + 8) \times 21$$

עתה נפנה לכפל שברים.

בבעיה התשיעית של פפירוס רינד כופלים את $\frac{1}{14} + \frac{1}{2}$ ב $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$. השיטה מתוארת להלן:

	1	$\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{56}$
סה"כ	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$

בפפירוס כתוב כי הסכום בצד שמאל הוא 1, לא ניתן כל הסבר כיצד התקבלה תוצאה זו ובידינו רק השערות. אולי השתמשו המצרים בלוחות מיוחדים (עיין בקטע הבא!), או אולי ידעו הסופרים המצרים לחשב חשבונות בראשם. השערה זו אינה דמיונית כי ידיעת החשבון היתה בדרך כלל מוגבלת לשכבת המשכילים שהיתה קטנה יחסית לאוכלוסיה. ישנן השערות רבות נוספות, אך אם תרצה לראות כיצד שיטה זו התאימה לצורת כתיבתם נסה לכתוב את התרגילים שפתרנו בכתב הירוגליפים.

מספר דוגמאות יבהירו לך כיצד לעשות זאת.

$42 =$ 

$\frac{1}{2}+\frac{1}{14} =$ 

$168 =$ 

הטבלה המצרית ל $\frac{2}{n}$, n אי זוגי ו $3 < n < 101$

חלק מאד מעניין בפפירוס רינד הוא טבלה אשר בה מופיעים שברי יחידה אשר סכומם שווה לשבר מהצורה $\frac{2}{n}$, n שלם אי זוגי מ 5 ועד 101. עבור $n = 3$ מצוייר הסמל המיוחד ל $\frac{2}{3}$. הטבלה הבאה היא חלק מהטבלה המופיעה בפפירוס בהשמטת מוני השברים, סימני השבר וכן סימני החיבור.

גם במקרה זה אין אנו יודעים כיצד נתקבלו ערכים אלה. ישנם רמזים, אך אין שיטה אחידה הטובה לכל המקרים.
עלינו להניח איפוא כי המצרים קבלו תוצאות אלה או באופן מקרי, או בעזרת מסורת מסוימת או בעזרת קריטריונים חשבוניים.

מכנה	שברי יחידה			מכנה	שברי יחידה			
5	3	15		21	14	42		
7	4	28		23	12	276		
9	6	18		25	15	75		
11	6	66		27	18	54		
13	8	52	104	29	24	58	174	232
15	10	30		31	20	124	155	
17	12	51	68	33	22	66		
19	12	76	114	35	30	42		

כל ההשערות שהוצעו עד כה בדבר הקריטריונים שעזרו למצרים למצוא את סכום שברי היחידה השקול לשבר הנתון עדיין מותירים מקום לשיפוט האישי בבחירת אפשרות אחת של הצגת השבר מתוך האחרות הקיימות. כדי להדגים את גודל הבעיה נביא דוגמאות:

מספר האפשרויות השונות לכתוב את $\frac{2}{5}$ כסכום של 3,2 או 4 שברי יחידה, בעלי מכנה שאינו עולה על 1000, הוא כ 240, את $\frac{2}{17}$ אפשר לכתוב ב 260 צורות.

בעיה מענינת היא כיצד ניתן כיום למצוא את כל ההצגות של שבר נתון על ידי שברי יחידה. שיטת סילבסטר נותנת הצגה אחת בלבד. האם אתה יכול להציע דרך לפחות באופן תאורטי, שתמצא את כל ההצגות האפשריות? יטי סלומון ואני כתבנו שיטה כזו ונתנו למחשב IBM אשר במכון ויצמן לבצע את החישוב המיגע.

בעיה מענינת למחקר היא לבחור מספר קריטריונים אשר עשויים היו להנחות את המצרים ולבדוק עד היכן הם פועלים. אנו ננסה כמה מהם.

הקריטריון הראשון העולה בראשי מבלי להתעמק יתר על המידה הוא זה הדורש כי נשתמש במספר הקטן ביותר של שברי יחידה (זכור, אין להשתמש בהצגה $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$). לכן, הבעיה שעלינו לפתור היא: מה המספר הקטן ביותר של שברי יחידה הדרוש לבטא את $\frac{2}{n}$? התשובה היא, 2 . (האם אתה יכול להוכיח זאת?)

נתבונן בטבלה ומיד נראה כי במספר מקרים לא השתמש הסופר המצרי בקריטריון בחירה זה. דרך אגב, אם n ראשוני אפשר להציג את $\frac{2}{n}$ כסכום של שני שברי יחידה שונים בצורה אחת בלבד (ראה נספח).

מסקנה נוספת אליה הגעתי תוך כדי עבודתי, היא זו: כאשר n איננו ראשוני אפשר להציג את $\frac{2}{n}$ באמצעות שברי יחידה ביותר מצורה אחת, למשל: $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ נניח כי הסופר המצרי הכיר את שתי האפשרויות האלה, אם כך, מדוע בחר בהצגה השניה ולא בראשונה? נראה, כי קל היה לו לטפל במספרים קטנים, והרי 18 בודאי קטן מ 45 ו 6 רק גדול מעט מ 5. (השערה נוספת היא שהוא העדיף מספרים זוגיים על פני האי זוגיים וטענה זו מתקשרת יפה לכפל המצרי לפיו כפלו את המספר בכל שלב פי שניים).

כאשר מתבוננים בטבלה המצרית ל $\frac{2}{n}$, רואים כי $\frac{2}{29}$ מוצג כסכום של ארבעה שברי יחידה דבר זה מעורר תמיהה, מדוע לא השתמש הסופר בהצגה קצרה יותר? שיטת סילבסטר נותנת: $\frac{2}{29} = \frac{1}{15} + \frac{1}{435}$. זו ההצגה היחידה של $\frac{2}{29}$ כסכום של שני שברי יחידה כי 29 הוא מספר ראשוני. נשים לב כי 435 גדול בהרבה מכל אחד מארבעת המספרים המופיעים בטבלה, 15 וגם 435 שניהם אי זוגיים, ואילו כל ארבעת המספרים שבטבלה הם זוגיים. יתכן איפוא שיש משהו בהנחה, שהסופר המצרי בחר בקריטריונים של זוגיות וגודל השברים כפיצוי על אורך ההצגה.

בטרם נייחס משקל רב מדי להשערות אלה, כדאי להתבונן בהצגות של $\frac{2}{29}$ המכילות 3 שברי יחידה (קיים מספר לא מבוטל של הצגות כאלה, האם תוכל לגלותן?) וכן כדאי לשים לב לנתונים נוספים שבטבלה.

דבר זה נעשה כבר בעבודתו המפורטת של גילינגס (R.J. Gillings) Mathematics in the Time of the Pharaohs MIT Press 1972 אשר היה יסוד לחלק ממאמר זה. גילינגס ניסח 5 קריטריונים משוערים וניסה בעבודתו להסביר את ממצאי המצרים לפי חמישה קריטריונים אלה. חלק מהקריטריונים טובים להסבר כל הממצאים ואילו אחרים כמו זוגיות, וגודל המספרים יכולים להסביר רק חלק מן הממצאים.

נציין השערה נוספת אחרונה המתאמתת לגבי הטבלה המצרית של $\frac{2}{n}$: בהצגת $\frac{2}{n}$ לא השתמשו המצרים אף פעם, ביותר מארבעת שברי היחידה.

תוך כדי עבודה בנושא זה העליתי את ההשערה הבאה: אם $1 > \frac{a}{b} > 0$ אזי תמיד קיימת הצגה ל $\frac{a}{b}$ כסכום של ארבעה שברי יחידה לכל היותר. נסיונות הוכחה לאימות השערה זו הובילו לשיטה אשר היתה הבסיס לתוכנית המחשב שהזכרנו לעיל.

נשאיר לך הקורא, לטפל בהשערה זו ובהשערות נוספות משל עצמך או משל תלמידיך. ישנן תוצאות רבות בנושא זה, המפוזרות בספרות המתמטית, בחלקן פשוטות, ובחלקן מסובכות יותר, ובודאי עוד רבות יופיעו. הוכחות לחלק מן התוצאות שהזכרנו במהלך מאמר זה מופיעות בנספח שלהלן.

1. שיטה למציאת כל ההצגות של שבר נתון $1 > \frac{a}{b} > 0$, בעזרת שברי יחידה.

קרוב לודאי כי קיימים שברים להם מספר הצגות אינסופי, (גם זו השערה בפני עצמה), לכן עלינו לפשט את הבעיה לצורה הבאה: "שיטה למציאת כל ההצגות של שבר בעזרת מספר נתון של שברי יחידה".

נתבונן בדוגמא: $\frac{5}{9}$

נתחיל לחפש את כל ההצגות המכילות שני אברים. במקרה זה,חייב אחד משברי היחידה להיות גדול מ $\frac{5}{9} \times \frac{1}{2}$, רק $\frac{1}{2}$ ו $\frac{1}{3}$ גדולים מ $\frac{5}{18}$. השאר כבר פשוט: ננסה את $\frac{1}{2}$ ואת $\frac{1}{3}$ לפי הסדר.

$\frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{10-9}{18} = \frac{1}{18}$ לכן $\frac{5}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18}$

$\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{15-9}{9} = \frac{2}{9}$ לכן אי אפשר להשתמש ב $\frac{1}{3}$.

מסקנה: יש רק דרך אחת להציג את $\frac{5}{9}$ כסכום של שני שברי יחידה.

עתה נחפש את כל ההצגות בהן מופיעים שלושה שברי יחידה.
השיטה כבר ברורה: אם ישנם 3 שברי יחידה, לפחות אחד מהם חייב להיות גדול מ $\frac{5}{9} \times \frac{1}{3}$. רק $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ו $\frac{1}{5}$ מקיימים תנאי זה. ראינו כי $\frac{1}{2}$ מביא להצגה של $\frac{5}{9}$ על ידי 2 אברים כך שנותר לבדוק את השאר.

(i) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

עתה עלינו לחפש הצגה של שני אברים ל $\frac{2}{9}$. עושים זאת בדיוק באותה שיטה. אחד משברי היחידה חייב להיות גדול מ $\frac{1}{9} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{2}$ לכן עלינו לבדוק את $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$. אבל על פי הדיון הקודם $\frac{1}{2}$ ו $\frac{1}{3}$ אינם טובים וביחד עם $\frac{1}{4}$ כולם גדולים מ $\frac{2}{9}$. לכן נותר לדון ב $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ ו $\frac{1}{8}$ לפי הסדר.

$\frac{2}{9} - \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$ ומקבלים את המשוואה $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$

$\frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ ומקבלים את המשוואה $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$

$\frac{2}{9} - \frac{1}{7} = \frac{5}{63}$ וההפרש אינו שבר יחידה.

$\frac{2}{9} - \frac{1}{8} = \frac{7}{72}$ גם כאן ההפרש איננו שבר יחידה.

מכאן, כאשר התחלנו ב $\frac{1}{3}$ קבלנו שתי הצגות המכילות 3 אברים.

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{4} = \frac{20 - 9}{36} = \frac{11}{36} \quad (ii)$$

עתה נחפש ביטויים ל $\frac{11}{36}$ המכילים שני שברי יחידה בלבד, בדיוק באותה צורה. רק $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ גדולים מ $\frac{11}{36} \times \frac{1}{2}$.

את שלושת הראשונים כבר ביטלנו על ידי הדיון הקודם (ברור כי $\frac{1}{2}$ ו $\frac{1}{3}$ פשוט גדולים מדי). נותר לנו איפוא לנסות את $\frac{1}{5}$ ו $\frac{1}{6}$.

$\frac{11}{36} - \frac{1}{5} = \frac{55 - 36}{5 \cdot 36} = \frac{19}{5 \cdot 36}$, ההפרש אינו שבר יחידה .

$\frac{11}{36} - \frac{1}{6} = \frac{11 - 6}{36} = \frac{5}{36}$, גם כאן ההפרש אינו שבר יחידה.

$$\frac{5}{9} - \frac{1}{5} = \frac{16}{45} \quad (iii)$$

רק $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ו $\frac{1}{5}$ גדולים מ $\frac{16}{45} \times \frac{1}{2}$, ובכולם כבר דנו קודם, לכן לא נותר לנו לעשות דבר.

נסכם: ל $\frac{5}{9}$ יש רק שתי הצגות המכילות 3 שברי יחידה והן:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \quad \text{ו} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$$

אם ברצונך לנסות ולגלות את כל ההצגות האפשריות של $\frac{5}{9}$ המכילות 4 שברי יחידה תבין היטב מדוע הטלנו על המחשב לעשות זאת עבורינו. המחשב מבצע מאות חישובים בזמן קצר יותר מאשר אתה מסוגל לקרוא משפט זה!!

2. $\frac{2}{n}$ ניתן להצגה על ידי שני שברי יחידה לכל היותר.

(i) אם n זוגי, לא נותר לעשות דבר.

(ii) אם n אי זוגי, נכתוב $n = 2k + 1$, ואז קל להראות כי

$$\frac{2}{2k + 1} = \frac{1}{k + 1} + \frac{1}{(k + 1)(2k + 1)}$$

ושני השברים הם שברי יחידה השונים זה מזה. למעשה הם בדיוק אלה המתקבלים על ידי שיטת סילבסטר.

3. אם n ראשוני, אזי ההצגה של $\frac{2}{n}$ על ידי שני אברים היא יחידה.

יהי $n = 2k + 1$ ונניח כי $\frac{2}{2k + 1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ או $a < b$)

לפי הנחה זו $\frac{2}{2k + 1} = \frac{a + b}{ab}$

לכן $a + b = 2m$ ו $ab = (2k + 1)m$

כאשר m מספר טבעי כלשהו.

$a < b$ לכן $a + b = 2m$ $\qquad b > m$

$2 + 1$ ראשוני לכן $ab = (2k + 1)m \Longrightarrow b = (2k + 1)d$

כאשר d מספר טבעי כלשהו.

לכן $a = \frac{m}{d}$

נציב את הביטויים המתאימים ל a ו b ב $a + b = 2m$

נפתור עבור m ונקבל $m = \frac{(2k + 1)d^2}{2d - 1}$

והתבנית ל a היא $a = \frac{(2k + 1)d}{2d - 1}$

ל d ו $2d - 1$ אין גורם משותף, $2k + 1$ ראשוני לכן האפשרות היחידה
לקבל מספר שלם עבור a היא אם $2d - 1 = 2k + 1$
או $d = k + 1$

כלומר $a = k + 1$ וזה נותן את שבר היחידה אשר כבר קבלנו בסעיף 2 של הנספח.

יתכן כי לטענה זו קיימת הוכחה קצרה ופשוטה יותר אך אנו לא מצאנו אותה.