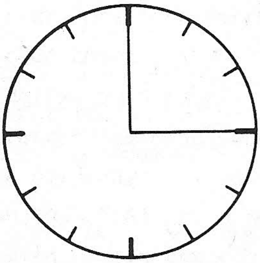
נושא לימודי: הבעיה של היפוך מחוגי השעון

מאת: חנה ליפסון, מכון ויצמן למדע, רחובות

הקדמה

שילובם של נושאים מתמטיים שונים כפתרון בעיה מרכזית אחת,רצוי ופורה מבחינת החינוך המתמטי. שילוב כזה מאפיין את פתרונה של הבעיה המוצגת כאן, בעיה שאינה טריביאלית - וקשה לנחש את פתרונה; היא מתאימה לכיתות שכבר נפגשו במושג הפונקציה והפונקציה ההפוכה. אפשר להפוך את הבעיה לנושא לימודי מרתק ולנצל אותה לגיוון תקופות של חזרה על חומר - או כפתיחה לחומר לימודי חדש.

הבעיה



לפני זמן מה התעוררתי בלילה, בחדר חשוך אשר לא היתה בו אפשרות להדליק אור. התבוננתי היטב בשעוני לראות מה השעה, אולם בשעוני אפשר היה לראות רק את החלקים הזוהרים: שני המחוגים וסימון מקומות הספרות. כאשר התעוררתי נראה שעוני כך:

בחשכה לא יכולתי להבדיל בין שני מחוגי השעון, כי במקרה היה הקו,המסמן שעה שלמה המשכו הישיר של המחוג הקטן.

בכל זאת היה ברור לי מיד כי השעה היא 03.00 כלומר המחוג הקטן הוא זה הפונה לכיוון ה 3. לא היה לי ספק כי לא יתכן כי המחוג הפונה לכיוון הספרה 3 הוא המחוג הגדול (כך שהשעה 12.15), כי במקרה זה היה צריך המחוג הקטן להמצא בין הספרות 12 ו 1 !

בעקבות מקרה זה שאלתי את עצמי: האם בכל מקרה התשובה כה חד-משמעית? (האם יתכן כי גם לאחר החלפת שני המחוגים יתקבל מצב המייצג שעה אפשרית? נסכים לקרוא למצב אשר בו החלפת המחוגים מראה שעה אפשרית בשם מצב "הפיך". החלפת המחוגים נקרא לכך "היפוך" המחוגים. ברור כי כל מצב שבו מתלכדים שני מחוגי השעון כמו בשעה 12.00 למשל - הוא מצב הפיך. (אבל,) האם יש עוד מצבים הפיכים אחרים?

נבסח את הבעיה:

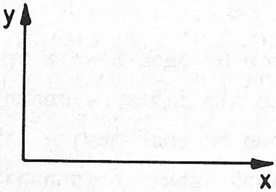
א) האם ישנם מצבים הפיכים של מחוגי השעון שבהם אין שני המחוגים מתלכדים, ואם כן - כמה מאלה ישנם?

ב) כמה פעמים במשך היום מתלכדים שני המחוגים?

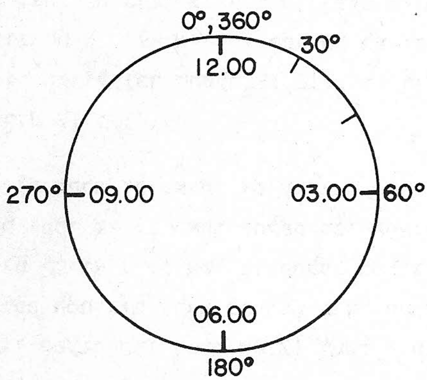
ג) מהם בדיוק המצבים ההפיכים?

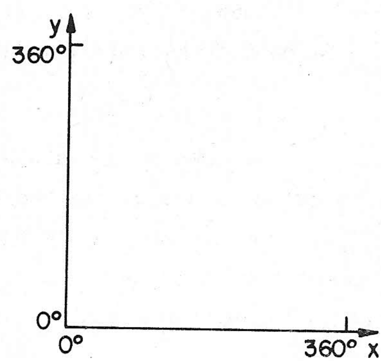
פתרון הבעיה

תלמיד שיצליח בלי עזרה לפתור את הבעיה, יפתור אותה בדרך כלל פתרון גרפי, ורק מעטים יצליחו בכוחות עצמם בפתרון האלגברי השלם. נפתח בפתרון הגרפי כי הוא עוזר להבנת הפתרון האלגברי.



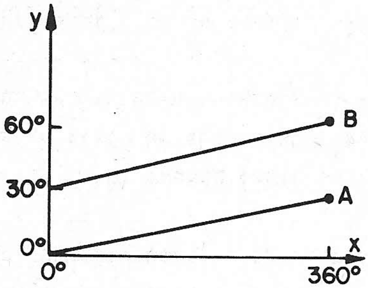
הפתרון הגרפי:
במערכת צירים מישורית תציין כל נקודה שעה מסויימת בשעון. נקבע שעל ציר ה x יצוין מקומו של המחוג הגדול ועל ציר ה y מקומו של המחוג הקטן.
מתעוררת השאלה, איך לבחור את היחידות על הצירים: טבעי היה למדוד את אורך הדרך של המחוג הגדול בדקות, ואת זה של המחוג הקטן בשעות. אולם אז נזדקק להסברים מיוחדים בשעה שנחליף את מקומות המחוגים (ראה שאלה בסוף). נבחר על כן ביחידות מידה משותפת לשני הצירים, ומאחר ומדובר בבעיה המתוארת במעגל, טבעי שנבחר במעלות זווית (או ברדיאנים). נחלק את מעגל השעון ל-360° כך שנרשום 360° או 0° במקום השעה 12.00, 90° במקום השעה 03.00, 180° במקום השעה 06.00 וכו'. כדאי לשים לב ולהדגיש שמחזוריות הבעיה אינה מתבטאת בתאור הגרפי: על השעון מופיעים 0° ו 360° באותו המקום, אך על הצירים הם מסומנים בשני מקומות שונים. עוד נחזור ל"קושי" ולאפשרות לבטל אותו.



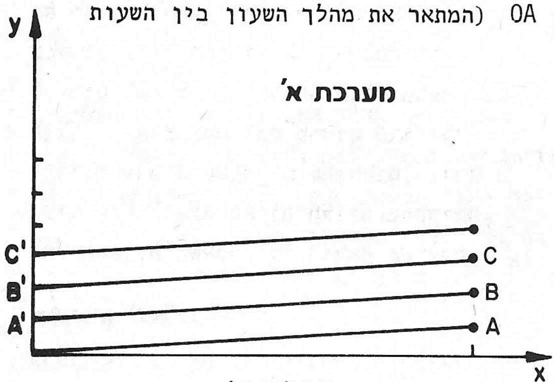


קל לראות שבכל פרק זמן שהוא חלק של שעה אחת, יהיה אורך הקשת Δy שעובר המחוג הקטן החלק ה 12 מאורך הקשת Δx שעובר המחוג הגדול באותו הזמן. כלומר

$$\Delta y = \frac{1}{12}\Delta x$$



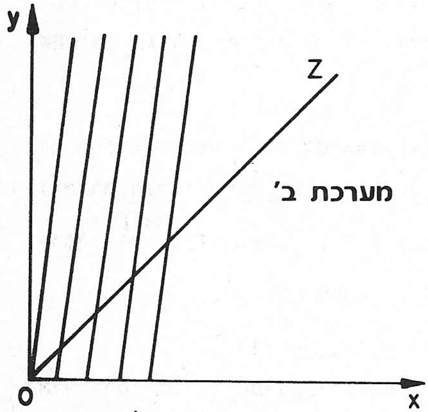
ומנת ההפרשים $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{12}$ קבועה. פרוש הדבר שקבוצת הנקודות (x,y) המתארות את מצב מחוגי השעון במשך שעה אחת מהוות קטע של קו ישר ששיפועו $\frac{1}{12}$, לכן מספיקות לנו שתי נקודות לשרטוט הקטע. היות וידוע כי בשעה 12.00 נמצאים גם המחוג הקטן וגם המחוג הגדול במצב 0 $(x = y = 0^\circ)$ ובשעה 01.00 נמצא המחוג הגדול במקום $x = 360^\circ$ והקטן במקום $y = 30^\circ$, קל לשרטט את הקטע OA (המתאר את מהלך השעון בין השעות 12.00 ו 01.00).



שרטוט א'

כפי שהערנו, מסמנים 0° ו 360° את אותו המקום במעגל כך שהנקודות A ו A' מסמנות את אותו המקום על השעון, והקטע A'B המקביל ל OA (גם שיפועו $\frac{1}{12}$) הוא התאור הגרפי של מהלך השעון בין השעות 01.00 ו 02.00.

באופן דומה נמצא שתאור כל שעות היום יראה כך: (שרטוט א')



שרטוט ב'

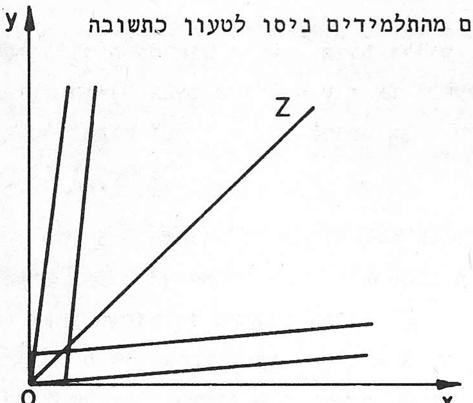
נזכיר שוב, כי כל הנקודות המופיעות בשרטוט א' מתארות מצבים אפשריים של המחוגים. איזה תיאור גרפי יתקבל, אם נחליף עתה את תפקידיהם של שני מחוגי השעון? כדי למצוא זאת יש להחליף את הצירים וזאת אפשר לבצע כידוע על ידי שיקוף הגרף בחוצה צירי המערכת OZ, (הישר y=x) ומתקבל שרטוט ב'. את שרטוט ב' יכולנו לקבל גם מבלי להעזר בהחלפת הצירים, על ידי שיקול דומה לזה שהביא לשרטוט א' כאשר הפעם שיפוע הישרים הוא 12.

איך נמצא עתה את המצבים "ההפיכים" לאלה שבשרטוט ב', כלומר כל המצבים המתארים שעות <u>אפשריות</u> בשעון?

ברור שלשם כך יש למצוא אותן הנקודות על גרף ב' שהן גם נקודות על גרף א'; כלומר: עלינו למצוא את כל נקודות החיתוך של קטעי מערכת (א) בקטעי מערכת (ב), נוכל למצוא זאת בקלות, אם נשרטט את שני התיאורים הגרפיים א'ו ב' באותה מערכת הצירים (בעלת אותן היחידות על שני הצירים).

מספר נקודות החיתוך בשרטוט זה הוא $12 \times 12 = 144$ אך מספר המצבים ההפיכים הוא רק 143; הסיבה היא שבין 144 נקודות חיתוך אלה כלולות הנקודות (0 , 0) ו (360 , 360) המתארת כזכור את אותו מקום בשעון.

מצבי התלכדות המחוגים מתוארים על ידי הנקודות עבורן $x = y$. כלומר הנקודות הנמצאות על חוצה הצירים OZ. מספרן 11 בגלל שוויון המצבים המתאימים לנקודות (0,0) ו (360,360) (ולא 12 כפי שבודאי רבים מהתלמידים ניסו לטעון כתשובה לשאלה ב).



שרטוט ג'

את המצבים ההפיכים אפשר לקרוא בקירוב בשרטוט ג'. מעניין לציין שתשובות לשאלות (א) ו (ב) כלומר מנית מספר המצבים, אינה מחייבת שרטוט מדוייק וקריאת ערכים מספריים מהשרטוט. זוהי בעיה טופולוגית שאינה תלויה במטריקה, ורק התשובה לשאלה (ג) דורשת מטריקה.

הפתרון האלגברי

נרשום תחילה את 12 הפונקציות הלינאריות המתארות את מצבי המחוגים בכל אחת מ 12 שעות היום (תאורם הגרפי של פונקציות אלה נתון בשרטוט א'). בין השעות 12.00 ו 01.00 זו הפונקציה $y = \frac{x}{12}$ בעלת התחום $0 \leqslant x \leqslant 360$ (שתאורה הגרפי בשרטוט א' הוא הקטע OA)

בין השעות 01.00 ו 02.00 הפונקציה היא: $y = 30 + \frac{x}{12}$, $0 < x < 360$ (ותאורה הגרפי הקטע A'B).

באופן כללי, בין השעות t ו $t + 1$

$$(1) \qquad y = 30t + \frac{x}{12} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 360 \\ t = 0,1,\ldots, 11 \end{cases}$$

תאור גרפי של כל הפונקציות האלה יתן את שרטוט א' במלואו.

הפונקציות שיתארו את מצב השעון אחרי היפוך המחוגים, כלומר אחרי החלפת תפקידיהם של x ו y , הן הפונקציות ההפוכות לאלה שב (1). גם העובדה שקבלנו את הקטעים שבשרטוט ב' על ידי השתקפות שרטוט א' בחוצה מערכת הציר׳ים מזכירה לתלמידים שמדובר כאן בפונקציות ההפוכות. הפונקציות ההפוכות לקבוצת הפונקציות

$$(1) \qquad y = 30t + \frac{x}{12} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 360 \\ t = 0,1,\ldots,11 \end{cases}$$

היא קבוצת הפונקציות:

$$(2) \qquad y = 12(x - 30s) \qquad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 360 \\ s = 0,1,\ldots,11 \end{cases}$$

(תאור גרפי של קבוצת הפונקציות (2) יתן כנזכר את שרטוט ב').

יכולנו כמובן להגיע לנוסחות (2) גם באופן ישיר, ללא שימוש במושג הפונקציה ההפוכה. דרך ישירה תתן למורה הזדמנות לדון בתרגום האלגברי של פעולת ההזזה לאורך ציר ה-x , דבר שבדרך כלל קשה יותר לתלמיד מאשר תרגום ההזזה לאורך ציר ה-y שהופיעה במערכת (1); לכן עדיף להתחיל במערכת (1).

כדי לפתור את הבעיה שלנו פתרון אלגברי יש למצוא את אותם הזוגות (x,y) של קבוצת הפונקציות (2) שהם גם שייכים לקבוצת הפונקציות (1). לשם כך נסתכל על השוויונות (1) ו (2) כמתארים מערכת משוואות לינאריות בשני המשתנים x ו y . כל אחת ממשוואות (1) עם כל אחת ממשוואות (2)* מהווה מערכת של שתי משוואות לינאריות בשני משתנים ("מערכת וגם") שאת קבוצת האמת שלה יש למצוא. נרשום את שתי המשוואות בצורתן הכללית כך:

$$(1) \qquad y = 30t + \frac{x}{12} \qquad t = 0,1,\ldots,11$$

$$(2) \qquad y = (-12)30s + 12x \qquad s = 0,1,\ldots,11$$

חיסור שתי המשוואות יתן:

$$\frac{143x}{12} = 30(t + 12s)$$

$$(3) \qquad x = \frac{360}{143}(t + 12s) \qquad \begin{cases} t = 0,1,\ldots,11 \\ s = 0,1,\ldots,11 \end{cases}$$

ערך המשתנה y המתאים יכול להתקבל על ידי הצבה, או על ידי חיסור (2) ממשוואה (1) שהוכפלה ב 144: $(143y = 144\cdot 30t + 12\cdot 30s)$

$$(4) \qquad y = \frac{360}{143}(12t + s) \qquad \begin{cases} t = 0,1,\ldots,11 \\ s = 0,1,\ldots,11 \end{cases}$$

---

* מסיבה זו בחרנו לסימון הפרמטר של מערכת (2) באות אחרת s במקום t .

כדאי להסב את תשומת לב התלמידים לדמיון שבין נוסחות (3) ו (4) ולהסביר אותו.
ושוב נזכיר, כי מספר המצבים ההפיכים הוא 143 ולא 144, כי $t = s = 0$
ו $t = s = 11$ יתנו את אותו מצב המחוגים.

לבסוף נרצה לבטא את זמני המצבים ההפיכים בשעות ודקות של השעון. לשם כך נמדוד בדקות את מצבו של אחד המחוגים - נאמר זה שמצוין ב- x ונסמן ב X את ערכו בדקות; את מצבו של המחוג השני נבטא בשעות ונסמן את ערכו ב-Y. סיבוב שלם במעלות זווית הוא 360° והוא 60 דקות או 12 שעות. מכאן:

$$Y = \frac{y}{30} \qquad X = \frac{x}{6}$$

ונקבל את המצבים ההפיכים של השעון בצורה:

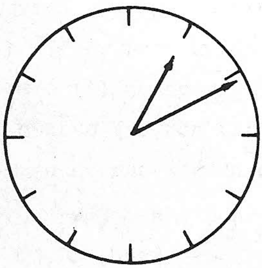
$$Y = \frac{12}{143}(12t + s) \quad \text{שעות}$$

$$X = \frac{60}{143}(t + 12s) \quad \text{דקות}$$

אם נבחר, למשל, $t = 1$, $s = 2$ נקבל את מצבו של המחוג הקטן

$$Y = \frac{12 \cdot 14}{143} \sim 1.16$$

$$X \quad \frac{60 \cdot 25}{143} \sim 10.5$$



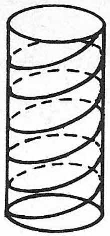
כלומר השעה היא בערך אחת ו 10.5 דקות (ראה שרטוט).

(במקום לבחור את x כמייצג את מצב המחוג הגדול ו y כמייצג את מצבו של הקטן. יכולנו כמובן גם לבחור בחירה הפוכה!)

אם נציב ב (1) וב (2) $t = s$ נקבל ביחידות מעלות זווית,

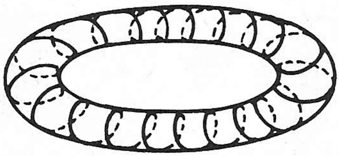
$$x = y = \frac{360}{11}t \qquad (t = 1,\dots,11)$$

ואלו הם 11 מצבי ההתלכדות של המחוגים.



נחזור עתה לתאור הגרפי ולפתרון הגרפי ונשאל, איך יכולנו לבחור בתאור גרפי המתחשב במחזוריות הבעיה? כדי לבטא את המחזוריות על ציר ה x יכולנו לקפל את הדף שעליו משורטט שרטוט א' לגליל כך שהנקודות לאורך הישרים המקבילים לציר ה-y, $x = 0°$ ו $x = 360°$ יתלכדו, (כלומר $(0,y)$ יתלכד עם $(360, y)$). מערכת א' תופיע אז בתור קו לוליני רציף על גבי גליל.

כדי להתחשב גם במחוזריות על ציר ה-y יש ל"כופף" את הגליל כך שגם הנקודות על המעגלים $y = 0$ ו $y = 360$ יתלכדו וכל נקודה $(x,0)$ תתלכד עם המתאימה לה $(x,360)$ וזאת כבר אי אפשר לבצע תוך שמירת המטריקה!



כבר הערנו לעיל שבכדי למצוא את מספר המצבים ההפיכים אין צורך במטריקה, הבעיה היא בעיה טופולוגית. לכן, אם נתאר לעצמנו גליל עשוי "גומי", אפשר "לכופף" אותו לטורוס ועל הטורוס יתקבל פתרון של הבעיה השומר גם על אופיה המחזורי.

כדאי לסיים בשאלה:
איך יראה הפתרון, אם נבחר בדקות כיחידות על ציר ה x ובשעות כיחידות על ציר ה y ?
בפתרון בצורה זו על התלמידים להתגבר על הקושי הנוסף של יחידות שונות על שני הצירים. באותו הזמן תינתן להם ההזדמנות לפתור את אותה הבעיה בניסוי שונה ועל ידי כך לעכל את פתרונה יותר טוב.