אמצעי המחשה להוראת מתמטיקה נומרית

מאת: גדעון צבס, אוניברסיטת תל אביב
אבישי ליבנה, הטכניון, חיפה

תודות

מחקר זה בוצע בעזרתו של מר שלמה מרקוס מביה"ס להנדסאים שליד אוניברסיטת תל-אביב. תודתנו העמוקה נתונה למר מרקוס וכן למנהל ביה"ס מר ב. זריצקי שאיפשר לנו להשתמש במעבדה לפיזיקה ובמכשיריה. תודתנו נתונה גם למורה גב' חוה כהן מגבעתיים, על שיחה מאלפת בנושא חישוב שטחים.

מבוא

פיתוח המחשבים האלקטרוניים בעשרים וחמש השנים האחרונות גרם להרחבת ענפי המתמטיקה השונים והגדלת תחולתם על מדעים אחרים. כיום אפשר לבצע בעזרת המחשב אנליזות מתמטיות של תופעות ותהליכים מורכבים אשר אי אפשר היה לטפל בהם עד כה. יתר על כן קיימת עתה האפשרות להורות נושאים במתמטיקה, בבתי-הספר ובאוניברסיטאות, באופן שונה משהיה מקובל עד לפני שנים אחדות.

האפשרות להעזר במחשבים (באמצעות מסוף שנמצא בחדר מיוחד בביה"ס ומחובר על-ידי טלפון למחשב אזורי) תשפיע השפעה רבה גם על הוראת מקצועות אחרים. כך למשל, יוכל המורה לפיסיקה לחקור יחד עם תלמידיו את החוקיות של זריקה אלכסונית <u>עם התנגדות האויר</u>. כמו כן אפשר להראות לתלמידים כי ניתן לחשב את π ו-e במידת דיוק רצויה וכן לבנות לוחות לוגריתמים, לוחות סטטיסטיים וכו'.

בכל הנוגע לספרות מתאימה יצוין כי בשנים האחרונות הופיעו כמה וכמה ספרים המציעים למשל ללמד את כל החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי בקורס המבוסס על שימוש במחשב (לרוב תחת הכותרת Computer Calculus או Computing and Analysis) בגישה חדשה זו מושם דגש מיוחד על חמש הנקודות הבאות:

א. <u>חשיבה אלגוריתמית</u> כלומר פיתוח היכולת לתרגם רעיון לסדרה סופית של הוראות חד-משמעיות שהוצאותן לפועל מובילה בודאות לפתרון המבוקש.

ב. <u>הערכת השגיאה</u> כלומר היכולת למצוא הערכות אפריורי ובאמצעותן לפתור בעיה בכל דיוק רצוי.

ג. <u>השתתפות פעילה של הלומדים</u> המפעילים את האלגוריתם שבנו בעזרת מחשב ו"יוצרים" את הפתרון.

ד. פיתוח גישת הקירוב אלו איברים, מדוע וכיצד מותר להזניח ומה משיגים בכך (דרגת הדיוק היא ה ε המפורסם).

ה. חנוך דור צעיר של תלמידים שיהיו משוחררים מהחסרון הרציני המתואר על-ידי המתמטיקאי Milne במלים:

"A mathematician knows how to solve a problem, but he cannot do it!"

(המתמטיקאי יודע כיצד לפתור את הבעיה אולם הוא איננו יכול לפתרה).

על מנת לקדם את הוראת המתמטיקה בדרך שהוזכרה, נכתב הספר Computational Mathematics [1] שיצא לאחרונה. ספר זה צריך בין השאר לשמש מורה-דרך למורה שרכש את השכלתו בתקופה הטרום-מחשבית ורוצה עתה להשתלם. לדעתנו יש לבצע שינויים רציניים גם בתכנית למודי המתמטיקה באוניברסיטה ולהתאימה לרבע האחרון של המאה (ראה [2]).

צעד חשוב נוסף הוא הקמת מעבדה למתמטיקה בכל בתי-הספר התיכוניים וברוב הפקולטות באוניברסיטה. במעבדה זו יוצב המסוף המחובר למחשב מרכזי ע"י קוי הטלפון. המעבדה למתמטיקה תצויד באמצעי המחשה והוראה שהם נושא מחקרנו זה. במקום להרחיב את היריעה בדיון על הפילוסופיה של גישתנו (ראה [1]) בחרנו לקחת נושא לדוגמא ועבורו בנינו דגם להמחשה. יש לציין את היזמה הברוכה של המרכז לטכנולוגיה חינוכית בהרצליה בהוראת מדעי המחשב ואת הניסוי שאנשי המרכז ערכו בעשרות כתות י'.

מסיבות שיפורטו להלן בחרנו בנושא "חישוב שטחים בדיוק רצוי", נושא שאפשר להציגו כבר בכתות ח', ט' ואשר יהוה לחלק מתלמידי יא', יב', את הבסיס להבנת מושג האינטגרל וחישובו הנומרי. הבעיה הפדגוגית העקרית (והקשה) בהוראת נושא זה היא כיצד לבצע אנליזה מדויקת של השגיאה מבלי להשתמש בחומר מחשבון דיפרנציאלי, ובצורה מוחשית ביותר.

חישובי שטחים

את פירוט השיטות השונות לחישובי שטחים עם הערכת שגיאה ניתן למצוא למשל ב [1] פרקים 3A , 3B. כאן אנו מעדיפים להציג דוגמא אופיינית ודגם מתאים עבורה. על מנת לאפשר הערכת שגיאות משיקולים גיאומטריים, נצמצם את הדיון לשטחים שמתחת לפונקציות חיוביות ומונוטוניות. כך למשל חישוב השטח מתחת ל $y = \sqrt{1 - x^2}$ בקטע $0 \le x \le 1$ יתן לנו שיטה לחישוב π. חישוב השטח מתחת ל $y = 1/x$ בקטע $a \le x \le b$, $a = 1$ יתן לנו מספר, שמאוחר יותר יתגלה כ $\ln b$. נעיר כי

מספיק לדון בערכי b שאינם עולים על 2 וזאת מהסיבה הבאה: אם נתון מספר חיובי u קל לחשב עבורו מספר v בין 1 ל-2, ומספר שלם m כך ש $u = v \cdot 2^m$ ולכן $\ln u = \ln v + m \ln 2$ זה צעד פשוט אך מכריע בחישוב לוגריתמים מאחר שהוא מאפשר לטפל בקטע האינסופי $(0 , \infty)$ באמצעות הקטע הסופי $[1,2]$. לפנינו רעיון פשוט ומועיל שהמוטיבציה לחפשו נובעת בעיקר מרצוננו לבנות אלגוריתם לחישוב לוגריתמים. דבר דומה ניתן לעשות עבור חישוב שורשים וכו'.

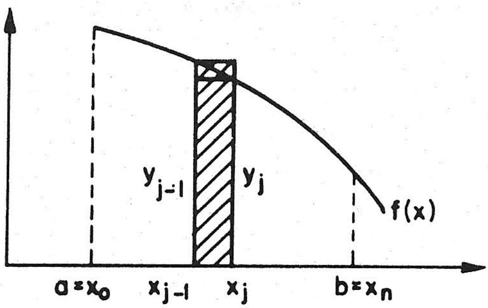
כדי לפשט את הבעיה עוד יותר החלטנו לטפל תחילה בשיטה פשוטה המבוססת על קירוב במלבנים כפי שיפורט להלן. ההמשך הטבעי הוא שכלול השיטה בעזרת קירוב בטרפזים, קירוב שמוביל לשיטת הטרפז הידועה באינטגרציה נומרית.

שיטת המלבנים

מעתה נניח כי נתונה פונקציה אי-שלילית ומונוטונית בקטע נתון $[a,b]$. כדוגמא נקח את $y = \sqrt{1 - x^2}$ בקטע $[0,1]$ ואז השטח המבוקש הוא שטח רבע עגול היחידה כלומר $\pi/4$.

נחלק את הקטע הנדון ל n פסים שוי-עובי h ואז: $nh = b - a$. מאחר והפונקציה מונוטונית (נניח שהיא יורדת כמו בדוגמא) קל לודא את העובדות הבאות:

א. בכל אחד מ-n הפסים מקבלת הפונקציה ערך מכסימלי בקצה השמאלי של הפס, וערך מינימלי בקצה הימני של הפס (להיפך לפונקציה עולה). נשתמש בסימונים בהתאם למצוין בשרטוט 1.



שרטוט 1

$$x_j = a + j \cdot h$$

$$y_j = f(x_j)$$

$$x_j - x_{j-1} = h = \frac{b-a}{n}$$

ב. אם נקח את שטח המלבן "השמאלי", כלומר את $h \cdot y_{j-1}$ נקבל שטח הגדול משטח הפס אשר מתחת ל $f(x)$ (מקוקו בשרטוט). אם נקח את המלבן "הימני", בעל השטח hy_j, נקבל שטח הקטן מהשטח המבוקש בפס מתחת לגרף.

ג. בין שנקח את המלבן "הימני" ובין שנקח את "השמאלי" השגיאה בחישוב השטח של כל פס אינה עולה על $h(y_{j-1} - y_j)$ שהוא שטח "המלבנון" אשר מעל המלבן "הימני" (ראה שרטוט 1).

ד. אם נסכם את התוצאות של כל n הפסים נקבל:

$$R_n = \sum_{j=1}^{n} hy_j \leqslant S \leqslant \sum_{j=1}^{n} hy_{j-1} = L_n$$

כאשר S הוא השטח המבוקש, R_n סכום שטחי המלבנים "הימניים" ו L_n סכום שטחי המלבנים "השמאליים". כמו כן מתקבלים גם אי השויונות

$$|S - R_n| \leqslant h|y_n - y_o|$$

$$|S - L_n| \leqslant h|y_n - y_o|$$

ה. לפי (ד) חסם השגיאה הכוללת נתון על ידי

$$h|y_n - y_o| = h|f(b) - f(a)| = |f(b) - f(a)|\frac{b-a}{n}$$

ו. כדי להשיג תוצאות בעלת דיוק של m ספרות אחרי הנקודה מספיק לקבוע את n כך שיתקיים

$$|f(b) - f(a)|\frac{b-a}{n} \leqslant \frac{1}{2}\, 10^{-m}$$

במלים אחרות נקח כ n את המספר הטבעי הראשון שאינו קטן מ

$$2|f(b) - f(a)|(b-a) \cdot 10^{m}$$

ז. נחשב את $h = (b-a)/n$, את R_n ואת L_n. R_n ו L_n מתלכדים זה עם זה ב m הספרות הראשונות אחרי הנקודה, ועל כן מהוים קירוב מספיק טוב.

עתה נפרט לדוגמא אלגוריתם, כמותו היינו רוצים שהתלמידים יבנו, אשר מחשב את שטח רבע עגול היחידה $(0<x<1, y = \sqrt{1-x^2})$ עד לדיוק רצוי של m ספרות אחרי הנקודה. כאן $b - a = 1$, $h = 1/n$, $f(a) = 1$, $f(b) = 0$.

אלגוריתם "פאי"

1. רשום מספר טבעי m (שהוא הדיוק הרצוי של מספר הספרות אחרי הנקודה)
2. חשב את המספר הטבעי n הראשון שאינו קטן מ $2 \cdot 10^m$
3. חשב את $h = 1/n$
4. הצב $j = 0$, $a = 0$, $R_n = 0$, $L_n = 0$
5. החלף את ערכו של j ב $j + 1$
6. החלף את ערכו של x ב $a + jh$
7. החלף את ערכו של R_n ב $R_n + h\sqrt{1 - x^2}$
8. החלף את ערכו של L_n ב $L_n + h\sqrt{1 - (x-h)^2}$
9. אם $x < 1$ חזור לצעד 5
10. הדפס את R_n , L_n וכן את $(R_n+L_n)/2$
11. סוף

הרצת אלגוריתם זה תתן כאמור את $\pi/4$ בדיוק של m ספרות אחרי הנקודה העשרונית. במלים אחרות אלגוריתם זה מממש את הפסוק: לכל ε חיובי קטן כרצוננו קיים n טבעי כך שאם מחשבים את R_n ואת L_n המתאימים אז השגיאה היא קטנה מ ε. למעשה קבלנו כאן המחשה של יחסי $n - \varepsilon$ שהינם קשים להבנה אף לסטודנטים למתמטיקה בשנה הראשונה. כמו כן קבלנו תהליך חשובי עם שליטה מוחלטת על השגיאה (וזה בדיוק ההבדל בין מעבדה למתמטיקה לבין מעבדות לפיסיקה ולכימיה). כתיבת התכנית המתאימה והרצתה מלווית בדרך כלל בחדוות יצירה אותה יחוש כמעט כל תלמיד כאשר יחשב, במו-ידיו ובעזרת מחשב, את π בדיוק רצוי. לאלגוריתם מתמטי (כגון זה שתארנו) אנו מציעים את השם חישובית. חישובית "פאי" היא כמובן רק דוגמא צנועה לחישוביות שיוכננו על ידי המורה והתלמידים בשילוב עם הפרקים המתאימים במתמטיקה.

דגם של אמצעי-המחשה

המטרה הפדגוגית העיקרית היא להמחיש את שיטת המלבנים באופן גיאומטרי ובעיקר להראות באופן מעשי ומשכנע כי השגיאה הכוללת אינה עולה על $|f(b) - f(a)|\cdot h$ הדגם שבנינו (ראה תרשימים 1-6) מורכב מהחלקים הבאים:

א. לוח עץ (מטר × מטר) מצופה בלוח פח שעליהם פסי מתכת המציינים את ציר x וציר y.

ב. לוח פח צבוע ירוק שעליו מצוירת הפונקציה ואשר נצמד ללוח הבסיסי בעזרת מגנטים קטנים. אפשר להסיר לוח ירוק זה ולשים במקומו לוח דומה עם פונקציה אחרת. (בתרשימים הפונקציה היא $y = \sqrt{1 - x^2}$)

ג. הפסים הימניים והשמאליים מפורמאיקה אדומה נצמדים ללוח הירוק בעזרת מגנטים. המלבנונים שבהם הפסים השמאליים גדולים מהימניים, ניתנים להפרדה ולהצמדה בכל מקום רצוי בעזרת מגנטים.

ד. כמו (ג) אך עם מספר כפול של פסים להדגמת התוצאות של עידון החלוקה.

דגם זה מיועד להיות תלוי על הקיר במעבדה למתמטיקה יחד עם דגמים שונים נוספים שימוקמו במעבדה זו (בהקשר זה כדאי לבקר ב"צריף למתמטיקה" במוזיאון "הארץ"). בעזרת הדגם המוצע ניתן לראות בבירור את המפורט להלן. (הדגם מיוצר עתה עבור בתי הספר ע"י חברת "מערכות חינוך" במסגרת ביה"ס לחינוך של אוניברסיטת תל-אב

התבונן בתרשימים:

1. סכום שטחי המלבנים "הימניים" קטן משטח רבע העגול (תרשימים 1 ו 4). ניתן לראות את החלקים המהוים את השגיאה.

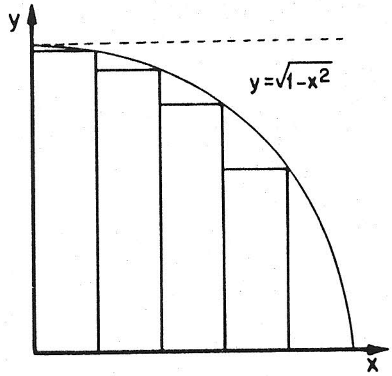
2. סכום שטחי המלבנים "השמלאיים" עולה על שטח רבע העגול תרשימים 2 ו 5). ניתן לראות את החלקים המהווים את השגיאה.

3. בכל מקרה השגיאה הכוללת אינה עולה על סכום שטחי המלבנונים שבראש כל פס.

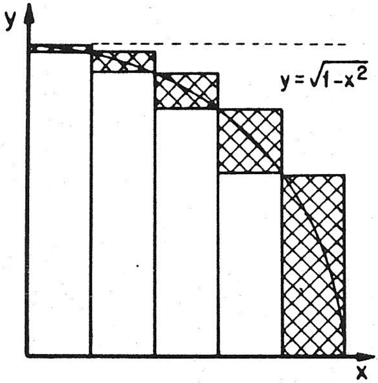
4. הזזת כל המלבנונים הנ"ל ימינה מראה כי צירופם יחד מהווה בדיוק פס ברוחב h ובגובה $|f(b) - f(a)| = |0 - 1| = 1$ (ראה תרשימים 3 ו 6).

5. השוואת התצלומים 1, 2, 3 עם 4, 5, ו 6 מבליטה את התוצאה של עידון החלוקה; הכפלת מספר הפסים מקטינה את חסם השגיאה ע"י הכפלתה ב $\frac{1}{2}$. השגיאה מתגלית כפרופורציונית ל $1/n$ (ראה תרשים 7).

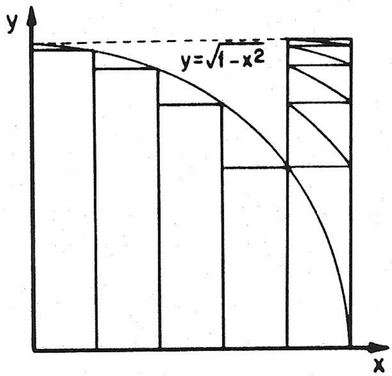
תרשים 6 (בהשואה לתרשים 5) חשוב במיוחד כי הוא ממחיש כיצד ניתן להשיג כל דיוק רצוי על ידי הגדלה מתאימה של n. בשלב זה מתקבלת מוטיבציה חזקה לשיטות ששגיאותיהן פרופורציונית ל $1/n^2$ ואשר בהן הכפלת מספר הפסים מקטינה את השגיאה ע"י הכפלתה ב $1/4 = (1/2)^2$. מכאן מתקבלות באופן טבעי שיטות הטרפז וסימפסון לאינטגרציה נומרית ובכוון זה ניתן להרחיב את המחקר הנוכחי תוך הקפדה על הערכות שגיאה גיאומטרית (ראה נספח).



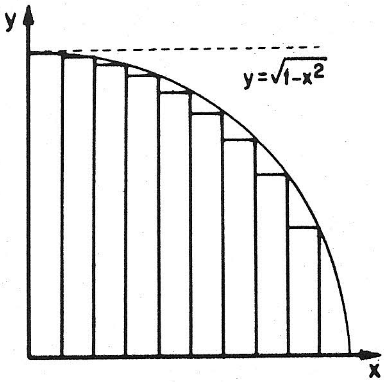
תרשים 1: המלבנים ''הימניים'' עבור n = 5



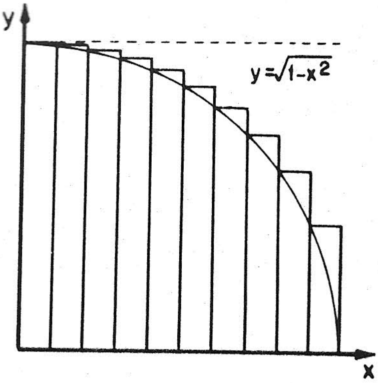
תרשים 2: המלבנים ''השמאליים'' עבור n = 5



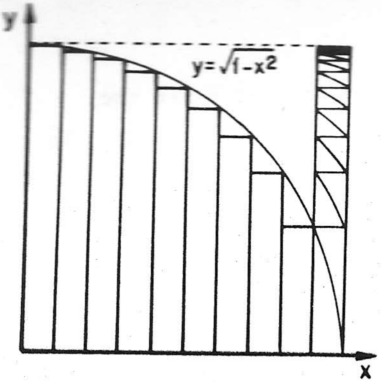
תרשים 3: המלבנים ''הימניים'' וההפרש בינם לבין ''השמאליים'' עבור n = 5



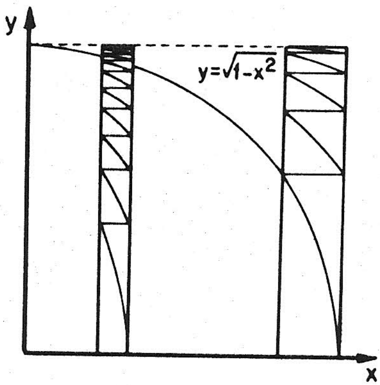
תרשים 4: המלבנים ''הימניים'' עבור n = 10



תרשים 5: המלבנים ''השמאליים'' עבור n = 10



תרשים 6: המלבנים ''הימניים'' וההפרש בינם לבין ''השמאליים'' עבור n = 10



תרשים 7: חסם השגיאה עבור n = 5 לעומת חסם השגיאה עבור n = 10, להדגשת האפקט של עידון החלוקה

סכום

לדעתנו יש לפתח אוסף של דגמי המחשה אשר הדגם שלנו כאן הוא אב-טיפוס להם. כדאי לבדוק דרכים לייצור סטנדרטי של דגמים כאלה לכל בתי-הספר בארץ ואולי גם ליצוא. יתכן כי אפשר ליצור דגמים מיניאטוריים (מפלסטיק נניח) לשימושו של כל תלמיד בנפרד. הספר שלנו [1] מהווה שלד לתכנית יעילה, אותה אפשר להנהיג במשולב עם הפעלת מעבדה מתמטית, תכנית שתאפשר "ללמוד לחשוב" באמצעות למודי מתמטיקה בצורה טובה יותר, מוחשית יותר, ובעיקר מהנה יותר.

ספרות

[1] G. Zwas and Breuer "Computational Mathematics"
יצא בהוצאת "מפעלים אוניברסיטאיים להוצאה לאור", רח' הנציב 28, תל-אביב

[2] G. Birkhoff "The Impact of Computers on Undergradaute Mathematical Education in 1984"
Math. Monthly, p. 648, 1972.

[3] G. Zwas and S. Breuer
"שלוב עבודה במחשב בהוראת מתמטיקה" ירחון איל"א "מעשה חושב", ינואר 1974.

הערת המערכת:

מצורף למאמר זה דף תרשימים שבו מופיעים התרשימים 4, 5 ו 6 פעם נוספת בשלל צבעים.

נספח

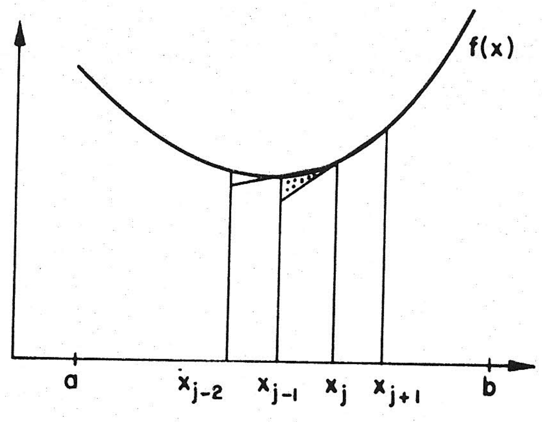
הערכה גיאומטרית של השגיאה בשיטת הטרפז

כהמשך טבעי לשיטות המלבנים אנו עוברים לשיטות קירוב טרפזואידיות. שיטת הטרפז הידועה מקרבת את השטח מתחת ל-$f(x)$ בכל פס ע"י טרפז בעל גובה h ואשר אחת מצלעותיו מתלכדת עם הקטע המחבר את (x_{j-1}, y_{j-1}) עם (x_j, y_j). שטח טרפז זה נתון על-ידי הנוסחה $(h/2)(y_{j-1} + y_j)$. אם נסכם בטויים אלה עבור $j = 1,2,3,\ldots,n$ נקבל

$$T_n = h(y_0/2 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n/2)$$

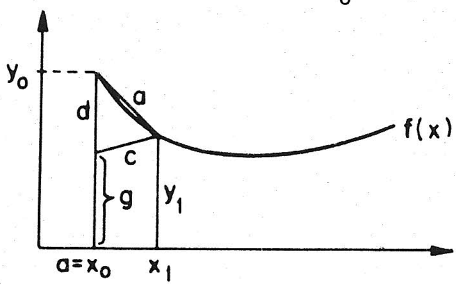
כאשר T_n מציין את הקירוב הטרפזואידי של השטח המבוקש S. במטרה להעריך את השגיאה $|S - T_n|$ <u>באופן גיאומטרי</u>, נצמצם את הדיון לפונקציות קמורות או קעורות. זאת מאחר ומטרתנו לדון בחישובי שטחים ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי.

<u>ללא הגבלת הכלליות</u> נניח כי בקטע הנדון $[a,b]$ הפונקציה $f(x)$ הינה אי-שלילית וקמורה. במלים אחרות אם נחבר שתי נקודות כלשהן על הגרף של $f(x)$ על-ידי קטע, אזי הקטע הזה מצוי כולו <u>מעל לגרף</u>. את השגיאה בכל פס אשר בו $h = x_j - x_{j-1}$ נעריך על-ידי שטח המשולש שאחת מצלעותיו מתלכדת עם צלע הטרפז המחברת את (x_{j-1}, y_{j-1}) עם (x_j, y_j) ואילו הצלע השניה היא בהמשך הקטע המחבר את (x_j, y_j) עם (x_{j+1}, y_{j+1}). המשולש הנדון מופיע מנוקד בשרטוט להלן.



שרטוט 2

נבנה את כל "משולשי השגיאות" נתחיל מהפס הימני ביותר שבו x משתנה מ $x_n = b$ עד $x_{n-1} = b - h$ אחת מצלעות משולש זה היא המשך הקטע המחבר את (x_n , y_n) עם (x_{n+1} , y_{n+1}) כאשר x_{n+1} נמצא מחוץ לקטע $[a,b]$. "נחליק" עתה את המשולש הנדון שמאלה כך שיוצמד ויצורף למשולש המתאים בקטע מ x_{n-2} עד x_{n-1}. שים לב כי מצמידים את המשולשים בצלעות אשר נמצאות על אותו ישר ולכן הדבר אפשרי. את זוג המשולשים שצורפו "נחליק" עתה שמאלה כך שיצורפו למשולש המתאים בפס בין x_{n-3} ל x_{n-2}. בדרך זו נמשיך עד שנגיע לפס הראשון ובו יתקבל משולש שהוא הצרוף של n המשולשים מהסוג הנזכר, אחד מכל פס. המשולש המצורף הוא בעל גובה h ובסיס שאורכו $|y_0 - g|$ ראה שרטוט 3.



שרטוט 3

הצלע c של המשולש המצורף, היא קטע מישר העובר דרך הנקודה (x_1 , y_1), ונוסחתו לכן

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

כמו כן הצלע c היא גם צלע של משולש השגיאה בפס האחרון (אשר הוחלק n פעמים מפס לפס) ולכן השפוע m הוא שפוע הישר המחבר את (x_n , y_n) עם (x_{n+1} , y_{n+1}) ולכן

$$m = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

הנקודה (x_0,g) נמצאת על הישר הנ"ל, ולכן כדי לקבל את g נציב את m ואת $x = x_0$ בנוסחת הישר. נקבל:

$$g = \frac{f(b+h) - f(b)}{h} (x_0 - x_1) + y_1$$

$$= f(a+h) - f(b+h) + f(b)$$

$$\left| \text{שגיאה כוללת} \right| \leqslant \frac{h}{2}|f(a)-g| = \frac{h}{2}|-f(a+h)+g(a) + f(b+h) - f(b)|$$

$$\leqslant \frac{h^2}{2} \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| + \frac{h^2}{2} \left| \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \right|$$

כדי לראות מהי המשמעות של אי השויון האחרון נתבונן בפונקציה $y = 1/x$ בקטע $[1,b]$

$$\left| \text{שגיאה} \right| \leqslant \left| \frac{1}{b+h} - \frac{1}{b} \right| \frac{h}{2} + \left| \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right| \frac{h}{2}$$

$$= \frac{h^2}{2b(b+h)} + \frac{h^2}{2a(a+h)} \leqslant \left(1 + \frac{1}{b^2}\right)\frac{h^2}{2}$$

התוצאה שקבלנו מדגימה כי הקירוב הנדון הוא מסדר שני כלומר בעל שגיאה שהיא פרופורציונית ל h^2 ולכן ל $1/n^2$, וזאת לפונקציה קמורה, ובאופן דומה לפונקציה קעורת.

מאחר שהשגיאה פרופורציונית ל $1/n^2$ אנו מקבלים כי מספר הפסים הדרוש n, פרופורציוני ל $10^{m/2}$ כאשר m הוא מספר הספרות המדויקות אחרי הנקודה. מצאנו אפוא שמספר הפסים הדרוש בשיטת הטרפז הוא פרופורציוני לשורש הריבועי של מספר הפסים הדרוש לאותה מטרה בשיטת המלבנים. זהו "הרווח" המתקבל מהעובדה ששכללנו את שיטת המלבנים ועברנו לשיטת טרפזים שהיא עדיפה. שיטת סימפסון שהיא בעלת שגיאה פרופורציונית ל $1/n^4$ היא כמובן משוכללת עוד יותר אולם לא ידועה הערכת השגיאה המתאימה באופן גיאומטרי. כמובן שבעזרת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ניתן להכליל את כל התוצאות שהבאנו, וכן להביא דוגמאות שימושיות כגון בנית לוח לוגריתמים בעזרת השטח מתחת ל $y = 1/x$.

הערכת השגיאה שהובאה בנספח זה מבוססת על שיקולים גיאומטריים - הסתכלותיים פשוטים ואין כל קושי להביאה בפני כתות ביה"ס התיכוניים. יתרה מזו, ההערכה נעשתה באופן המאפשר לבנות, בקלות יחסית, דגם להמחשת הנושא מאחר שאת המשולשים המהוים חסם מלעיל של השגיאה לכל פס ניתן לצרף, הלכה למעשה, למשולש יחיד ששטחו פרופורציוני הפוך לרבוע מספר הפסים. את מחקרנו זה אנו מתכוונים להרחיב בכיוון האמור, וכן לנסות הוראת פרקי מתמטיקה נומרית תוך העזרות באמצעי ההמחשה שפיתחנו.

ספטמבר 1975

מורים ומנהלים יקרים,

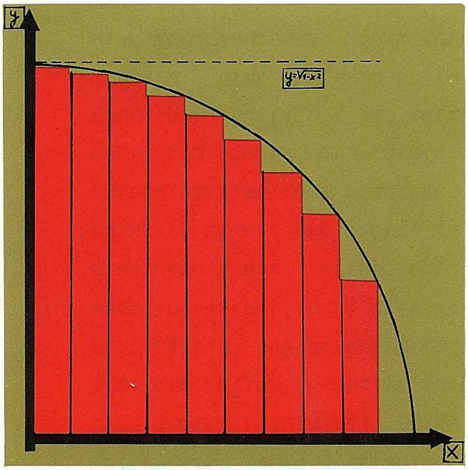
מוצע לכם בזאת אמצעי המחשה להוראת פרקי מתמטיקה נומרית בתכניות הלמודים. חומר זה מתאים במיוחד לבתי-ספר שהנהיגו (או עומדים להנהיג) למודי מחשב והרוצים ליישם למודים אלה בהוראת מתמטיקה.
הפרק הראשון המוצע הוא "חישוב שטחים בדיוק רצוי", נושא המובא בפירוט בחוברת המצורפת למכשיר ההמחשה. חומר זה מפתח את הגישה האלגוריתמית, את רעיון הקירוב ואת היכולת לא רק לדעת כיצד פותרים בעיה אלא גם לפתור אותה הלכה למעשה. בנוסף, מהוה פרק זה הכנה מצוינת ללימוד האינטגרל המסויים ושמושיו, לאלה מבין התלמידים שימשיכו במגמה ריאלית, טכנולוגית או ביולוגית. החומר מתאים לדעתנו גם לסמינארים המכשירים מורי-מתמטיקה, לבתי-ספר להנדסאים (במיוחד למגמת מחשבים ואוטומציה) ולמכללות לסוגיהן.
חומר מחשבון דיפרנציאלי. לאלו הלומדים חשבון דיפרנציאלי ניתנת האפשרות לבנות לעצמם לוחות לוגריתמים, לוחות סטטיסטיים ולחשב למשל, את e, את π וכו' עד מספר רצוי של ספרות מדויקות אחרי הנקודה. מאמר בענין זה יפורסם בקיץ זה בעלון מורי המתמטיקה "שבבים".
תכנית שלמה ועשירה במתמטיקה נומרית הובאה על ידינו בספר שיצא לאחרונה במהדורה אנגלית בשם "Computational Mathematics" ואשר מופץ ע"י "מפעלים אוניברסיטאיים להוצאה לאור", רחוב הנציב 28, תל-אביב, טלפון 75 90 25.
ניתן לרכוש את הספר בכתובת הנ"ל או במפעלי השכפול במוסדות להשכלה גבוהה.
אמצעי ההמחשה הנדון (שגודלו 100×100 ס"מ ואשר תצלומיו מופיעים בצד האחורי של דף זה) בצרוף חוברת מתאימה, פותח ע"י החתומים מטה ומיוצר ע"י חברת אמהד בע"מ ת.ד. 81, רחובות, טלפון 03-956678.
המתקן עשוי לוח מתכת ונושא מערכת קואורדינטות. השטחים מתחת לעקומות עשויים פורמייקה בהדפסת רשת. המתקן עשוי באיכות וגמר מעולים ומחירו 425.- ל"י.
פרטים נוספים ניתן לקבל:
א. "רמות" - רשות אוניברסיטאית - למחקר שימושי ופתוח תעשיתי בע"מ רח' לויטן 6, רמת-אביב, טלפון 03-419789
- יוזמת הפרוייקט.
ב. חברת אמהד בע"מ, רחובות, טלפון 03-956678
בגלל אופיו של המתקן - הוא מיוצר בסדרות קטנות ומוגבלות. מורים ומנהלים המעונינים לקבל את המתקן הנ"ל לקראת שנת הלמודים הקרובה, מתבקשים למלא את הספח המצורף ולשולחו בהקדם האפשרי לפי הכתובת: אמהד בע"מ, ת.ד. 81, רחובות.

פרופ' שלמה ברויאר
אוניברסיטת תל-אביב

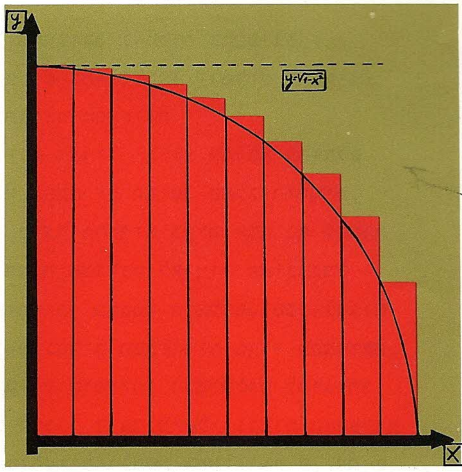
ד"ר אבישי ליבנה
הטכניון, חיפה

פרופ' גדעון צבס
אוניברסיטת תל-אביב

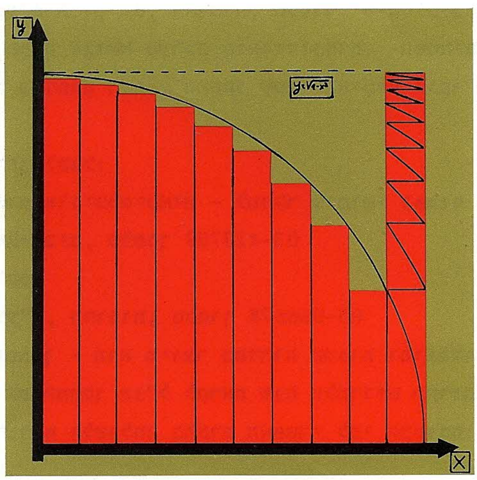
Our teaching-aid model for area computations via the rectangle rule. See exercises 3A/3, 3A/4, 3A/5, as well as exercises 4A/4, 4A/5.



The lower rectangles for $y = \sqrt{1 - x^2}$.



The upper rectangles for $y = \sqrt{1 - x^2}$.



The geometrical error bound, (See exercises 3A/2, 3A/3, 3A/4).

לכבוד
אמהד בע"מ
ת.ד. 81
רחובות

הנדון: **הזמנה**

אנו מזמינים בזה עבור מוסדנו את "לוח להדגמת חישובי־שטחים בדיוק רצוי" אשר פותח ע"י צוות מדעני אוניברסיטת ת"א והטכניון בחיפה.
אנו מצרפים צ'יק/המחאת דאר לפקודת אמהד בע"מ, על סך של 425.־ ל"י ומבקשים לשלוח לנו את המתקן לפי הכתובת להלן:

שם המזמין ______________________

המוסד ______________________

כתובת ______________________

טלפון ______________________

בכבוד רב,

חתימה: ______________________