פתרון בעיות מ"שבבים" 5

נערך על-ידי י.גיליס

1. מהן כל הפונקציות הממשיות המקיימות $f(x)\cdot f(y) = f(x - y)$

<u>פתרון</u>

ברור כי $f(x) \equiv 0$ הוא פתרון.

אחרת, קיים לכל x $f(x)\cdot f(0) = f(x)$

כלומר: $f(0) = 1$

נציב $x = y$ ונקבל $[f(x)]^2 = 1$

כלומר: $f(x) = \pm 1$

נציב $x = 2y$ $f(2y)\cdot f(y) = f(y)$ לכל y

היות ו $f(y) = \pm 1$ נקבל כי $f(x) = 1$

לכן $f(x) \equiv 1$ פתרון

2. מהם כל הפתרונות הממשיים של מערכת המשוואות

$$x_1 + x_2\cdot x_3\cdot x_4 = 2 \qquad x_3 + x_1\cdot x_2\cdot x_4 = 2$$

$$x_2 + x_1\cdot x_3\cdot x_4 = 2 \qquad x_4 + x_1\cdot x_2\cdot x_3 = 2$$

<u>פתרון</u>

א. נניח כי: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$

במקרה זה כל המשוואות הן: $x + x^3 - 2 = 0$

הפתרון הממשי של משוואה זו

מתקבל על ידי הפירוק: $(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$

לכן $(1,1,1,1)$ פתרון המערכת.

ב. נניח כי $x_1 = x_2 = x_3 = x$, $x_4 = y$ ו $y \neq x$

במקרה זה שלשת המשוואות הראשונות הן: $x + x^2y = 2$

והמשוואה האחרונה: $y + x^3 = 2$

על-ידי חיסור נקבל: $(x - y)(1 - x^2) = 0$

$x \neq y$ לכן $x = \pm 1$

אם $x = 1$, $y + 1 = 2$ נקבל $y = 1$

זה מקרה א.

אם $x = -1$, $y - 1 = 2$ נקבל $y = 3$

לכן $(-1,-1,-1,3)$ וכל הפרמוטציות של רביעיה זו הם פתרון.

ג. נניח כי $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = x_4 = y$ ו $y \neq x$

שתי המשוואות הראשונות הן: $x + xy^2 = 2$

שתי המשוואות האחרונות הן: $y + x^2y = 2$

נחסר: $(x - y)(1 - xy) = 0$

$x \neq y$ לכן $xy = 1$

נציב: $x + y = 2$

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

הפתרון היחיד הוא: $x = y = 1$

לכן אם $x \neq y$ מקרה זה לא יתכן.

ד. נניח $x_1 = x_2 = x$, $x_3 \neq x_4$

נחסר את המשוואה הרביעית מן השלישית

$$(x_3 - x_4)(1 - x^2) = 0$$

$x_3 \neq x_4$ לכן $x^2 = \pm 1$, שוב מקרה א.

ה. נניח עתה כי כל המשתנים שונים זה מזה. על-ידי חיסור המשוואה השניה מהראשונה נקבל $x_3x_4 = 1$ ו $x_1 + x_2 = 2$ באופן דומה מקבלים $x_i + x_j = 2$ לכל i ו j. לכן לפי השקול שב-ג' $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ סתירה להנחה שהם שונים.

3. נתון משולש אשר צלעותיו הן a, b ו c הגבהים במשולש הם: h_a, h_b, ו h_c
הוכח כי אם $a > b$ אז $a + h_a > b + h_b$

<u>פתרון:</u>

קיים $ah_a = 2s$ ו $bh_b = 2s$

לכן צריך להוכיח כי: $a + \frac{2s}{a} > b + \frac{2s}{b}$

כלומר יש להראות $(a - b)\left(1 - \frac{2s}{2b}\right) > 0$

$a > b$ וקיים $ab > 2s$ לכן מתקיים אי השוויון.

4. נתון $(x^2 + x + 1)^{19} = a_0x^{38} + a_1x^{37} + \dots + a_{38}$
הוכח כי $a_0^2 - a^2_1 + \dots + a^2_{38} = a_{19}$

<u>פתרון:</u>

נציב במשוואה $\left(-\frac{1}{x}\right)$ במקום x

נקבל: $\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{19} = \frac{a_0}{x^{38}} - \frac{a_1}{x^{37}} + \dots + a_{38}$

עתה נכפול את הפונקציה המקורית בפונקציה שהתקבלה.

{מכפלת שתי הפונקציות} $= \left(\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}\right)^{19}$

על-ידי הצבת x^2 במקום x במשוואה הנתונה נקבל:

$$(x^4 + x^2 + 1)^{19} = x^{38}\left(a_0x^{38} + a_1x^{36} + \dots + a_{19} + \frac{a_{38}}{x^2} + \dots + \frac{a_{38}}{x^{38}}\right)$$

המקדם של x^{38} הוא לכן a_{19}.

מצד שני a_{19} הוא הביטוי הקבוע במכפלת שתי הפונקציות.
נבצע את הכפל ונקבל:

$$a_{19} = a_0^2 - a_1^2 + \dots + a^2_{38}$$