הטעיות ותועלתן בהוראה

מאת: אסתר הרמתי, בית הספר התיכון הדתי המקיף - אשקלון - אשדוד

שגיאות מסוימות חוזרות עוד ועוד, והרבה פעמים אינך מספיק לתקן אותן, והן חוזרות בהזדמנות הראשונה!
במקרה כזה יתכן כי הטעיה מכוונת אשר מראה את השגיאה בכל חומרתה, ועם זאת מסוגלת לשעשע, תשכנע את התלמיד יותר מאשר תיקון יבש של השגיאה.

אתן כאן כמה דוגמאות:

I. <u>פעולות חשבון עם 0:</u>

I (א) <u>תלמיד טוען: $0 \cdot a = a$</u>

תשובת המורה: "מצוין!! a מסמן מספר כלשהו; לא כן? ובכן, אתן לך 0 ל"י, אתה תכפיל אותן פי 1000 ועליך להחזיר לי 1000 ל"י! מסכים?"

I (ב) <u>תלמיד מחלק את שני האגפים של שוויון ב 0</u>

במקום להזכיר לו את איסור החילוק ב 0 כ "מצוות לא - תעשה", טוב להשיב לו על-ידי הטעיה מתאימה כדוגמת אלו הנתונות כאן. (הן מסודרות לפי קושין. על המורה לבחור הטעיה מתאימה לרמת הכיתה).

I (ב,1) המורה מתיר את המשוואה

בצורה הבאה: $6x - 14 = 15x - 35$

פרוק לגורמים בשני האגפים נותן $2(3x-7) = 5(3x-7)$

מחלקים את שני האגפים בגורם המשותף שלהם ומגיעים לתוצאה $2 = 5$
היכן השגיאה?

I (ב,2) הוכחה שמספר כלשהו שווה ל 0!
נתון: a מספר כלשהו ו $a = b$
נכפיל את שני אגפי השוויון הזה ב a, נקבל: $a^2 = a \cdot b$

נחסר מכל אגף את b^2: $a^2 - b^2 = ab - b^2$

פרוק לגורמים נותן: $(a-b)(a+b)=(a-b)b$

ומכאן המסקנה: $a + b = b$

לכן: $a = b - b$ או $a = 0$ מ.ש.ל.
היכן השגיאה?

I(ב,3) נוכיח: "כל שני קטעים נתונים שווים ביניהם".

נתונים שני קטעים x ו y בלתי שווים ו $x > y$.

נוכל בודאי לבנות משולש ABC בו הצלע AB

שווה ל x והקטע $y = EF$ מקביל ל AB.

(עיין בשרטוט). מדמיון

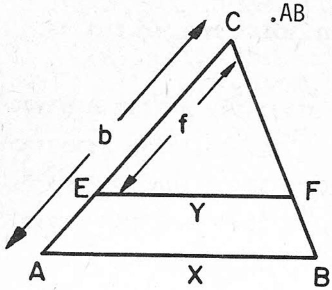
המשולשים ABC ו EFC

נובע $\frac{x}{y} = \frac{b}{f}$

או $xf = by$

נכפיל את שני האגפים ב $(x-y)$

ונגיע ל $x^2f - xfy = ybx - y^2b$



על-ידי פירוק לגורמים: $x(xf-by) = y(xf-by)$

מכאן המסקנה: $x = y$ בניגוד לנתון $x > y$!

היכן השגיאה?

II. <u>השימוש ב"משפט" אשר איננו משפט מתמטי!</u>

לדוגמה: אם לשני שברים שווים מונים שווים, שווים גם מכניהם".

"נוכיח את הטעות על-ידי הטעיה":

II(א) המורה מתיר את המשוואה

$$\frac{1 - x}{x - \frac{1}{7}} - 14 = \frac{15x - 3}{9 - x}$$

בצורה הבאה:

נעביר כל אגף למכנה משותף

$$\frac{1 - x - 14x + 2}{x - \frac{1}{7}} = \frac{15x - 3}{9 - x}$$

$$\frac{-15x + 3}{x - \frac{1}{7}} = \frac{15x - 3}{9 - x}$$

$$\frac{15x - 3}{\frac{1}{7} - x} = \frac{15x - 3}{9 - x}$$

מכאן נובע (לפי ה"משפט" הנ"ל!)

$$\frac{1}{7} = 9 \quad !!$$

II(ב) ההטעיה הבאה קשורה לחוקי חשבון בפרופורציה:

נתונה הפרופורציה

$$\frac{x+1}{a+b+1} = \frac{x-1}{a+b-1}$$

לפי חוקי הפרופורציה נובע

$$\frac{x+1-(a+b+1)}{a+b+1} = \frac{x-1-(a+b-1)}{a+b-1}$$

או (אחרי כינוס איברים דומים במונים)

$$\frac{x-a-b}{a+b+1} = \frac{x-a-b}{a+b-1}$$

ומכאן (לפי "החוק" הנזכר בהטעיה הקודמת)

$$a+b+1 = a+b-1$$

לכן $1 = -1$!!

היכן השגיאה?

ברור שהצגת ההטעיה לפני הכיתה אינה מספיקה כדי למנוע שגיאות דומות להבא. אבל <u>ס ק י ר ת ה ה ט ע י ה</u> על-ידי הכיתה עצמה נותנת אפשרות טובה להעמיק את המחשבה המתמטית ולקרב את הסבר השגיאה אל התלמיד. ההטעיה מעוררת את סקרנות הכיתה יותר מאשר הסבר יבש ועל-ידי כך מאפשרת ויכוח הנושא ובירור הבעיה.

בהמשך ההטעיה בקשר לחילוק ב 0 למשל, הכיתה תמצא (בהדרכת המורה) מה קורה, אם מחלקים מספר מסוים (1 או 5 או a) במספרים יותר ויותר גדולים, ואחרי כן במספרים יותר ויותר קטנים (שברים). כך התלמיד יתקרב בעצמו אל הקשר בין המושג "גדול מכל מספר ידוע" ו"קטן מכל מספר ידוע" ויבין על-ידי כך את סכנת פעולות החשבון עם 0 או עם ∞.

כדי להפיק תועלת מן ההטעיות מס' I (ב,1), II (א) ו II (ב) על התלמיד לפתור את המשוואות לפי הנעלם x והוא ימצא בעצמו את יסוד הטעות.

הטעיות מענינות אפשר למצוא בין היתר בספרים הבאים:

1) "Fallacies in Mathematics" by E.A. Maxwell, (Cambridge Univ. Press)

2) "Mathematical Recreations" by Northrop

3) "Wo steckt der Fehler" von W. Lietzmann, (Teubner, Stuttgart)

הטעיות מועטות יש בספר היפה: "בפרדס המספרים" ל-מ.נחשון.
(בעברית).

אני בטוחה שלכל מורה יש הזדמנות לאסוף בכיתותיו טעויות והטעיות מועילות !

הטעיות הן חומר מתאים לשעור האחרון בשליש או לשעור שניתן על-ידי מורה ממלא-מקום.