"התקדמות בשלבים קטנים"

שעורים ראשונים בטריגונומטריה

מאת: נירה חטיבה, בית הספר "תיכון חדש", תל אביב

מבוא

בתיק מס' 3 של "שבבים" הופיע מאמר בשם "קוים מנחים למבנה של שעור במתמטיקה" שעובד על פי מאמר של ד"ר שרגא ישורון. במאמר זה הציע המחבר שלושה עקרונות מתודיים בהוראה. הראשון בהם - "התקדמות בשלבים קטנים" אומר, כי על המורה לפרק את החומר הנלמד ליחידות קטנות של ידיעות אלמנטריות, וכל ידיעה כזו תילמד בנפרד.

כדי להדגים עקרון זה, אנסה כאן לפרק נושא לימודי לידיעות אלמנטריות. בחרתי כהדגמה את הנושא "שעורים ראשונים בטריגונומטריה", מהסיבות הבאות:

א. נושא זה ניתן להצגה בדרכים רבות והשיטות בהן מציגים מספר יחידות לימודיות בבת אחת מבלבלות את התלמידים ומקשות עליהם את הבנת הנושא.

ב. נושא זה, לפי החלוקה לשעורים וליחידות לימודיות המפורטת להלן, נוסה על ידי באופן מעשי בשנת הלימודים הזו (תשל"ה) בכיתה י"א ביולוגית טובה. לדעתי, (על פי הבחינות שערכתי) החומר נקלט יפה.
החלוקה לפי שעות, כפי שמפורטת כאן, מתאימה לכיתה ריאליסטית, ואילו לכיתה ביולוגית בינונית או חלשה ולהומניסטית, הקצב יהיה איטי יותר בהתאם לכיתה.

ג. בהזדמנות זו אציג גישה השונה במקצת מזו המקובלת במרבית ספרי הלימוד הנהוגים בארץ. רשימת ספרי לימוד בעברית העוסקים בה בחלקה תמצא בסוף המאמר.

הרקע המתמטי הדרוש לתלמידים

<u>אלגברה</u>: הגדרת פונקציה כהתאמה של אברי קבוצה אחת (תחום) לאיברי קבוצה שניה (טווח) כך שלכל איבר של התחום מתאים איבר אחד ויחיד של הטווח. תיאור פונקציה: בטבלת התאמה, בתבנית (נוסחה) ובגרף במערכת צירים.
תכונות של פונקציה וביטויין בגרף כמו: חיוביות ושליליות, זוגיות ואי זוגיות, עליה וירידה.

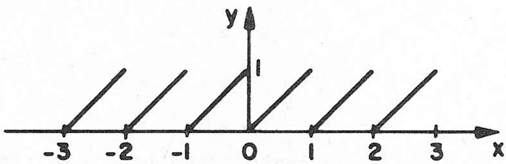
<u>גיאומטריה</u>: מידות של זויות וקשתות במעגל במעלות. חפיפה ודמיון של משולשים. המשפט על המשולש שזוויותיו הן: $90°$, $60°$, $30°$. סימטריה לגבי נקודה ולגבי ישר, משפט פיתגורס.

שיעור מס' I

1. מבוא: הכרת תכונות המחזוריות של פונקציות.

2. תופעות מחזוריות בטבע (יום ולילה, גיאות ושפל).

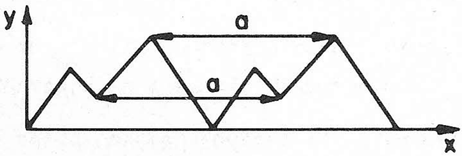
3. גרף של תופעה מחזורית
(שרטוט על סרט ניר של בדיקה באלקטרוקרדיוגרמה, שרטוט של הפונקציה $y = x-[x]$)



הסבר: $[x]$ הערך השלם של x הוא המספר השלם הגדול ביותר שאיננו גדול מ x.
לדוגמה: $[2.98] = [2.3] = 2$ $\qquad$ $[-2.98] = [2.3] = -3$

<u>הערה:</u> אם התלמידים אינם מכירים את $[x]$ מלימודיהם הקודמים, מספיק לתת את הגרף ללא ציון תבנית הפונקציה.

4. משמעות המחזור היסודי a בגרף:



5. ביטוי המחזוריות של פונקציה בתבנית: $f(x+a) = f(x)$

6. ביטוי כללי לכל המחזורים של הפונקציה $f(x+na) = f(x)$ כאשר n שלם.

7. תנועה מעגלית כתנועה מחזורית פשוטה.

8. ארבעת הרביעים במעגל. סימונם נגד כיוון השעון באותיות רומיות I, II, III, IV.

9. הגדרת קשת בת α° במעגל ה"טריגונומטרי" (מעגל ברדיוס R) כקשת שנקודת קצה אחת שלה קבועה בנקודה $(R,0)$ וקצה השני "נייד" בנקודה כלשהי על המעגל, ומידתה במעלות α.

הערה: העדפתי לעסוק בשעורים הראשונים במידת זוית במעלות בלבד. מורים שאינם מסכימים עמי יכניסו כאן את מושג הרדיאן ולהלן, לכל נושא שאציין במעלות יחליפו את המידה ברדיאנים. רצוי רק בצורת כתיבה אחת (ראה מבוא סעיף א.)

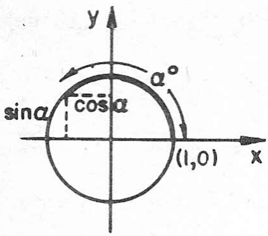
10. מעלות הקשתות התוחמות את הרביעים. למשל את הרביע הראשון תוחמות הזויות 0° ו-90°. משמעות קשת בת 30°, 45°, 70°, 140°, 220°, 300°.

11. התלכדות נקודת הקצה הניידת של הקשתות: 40°, 400°, 760° וכדומה.
ובאופן כללי התלכדות נקודת הקצה של הקשתות: α, $360+\alpha$, $360\cdot n+\alpha$, n שלם חיובי.

שיעור מס' II

12. מעגל היחידה (לשם נוחיות נעסוק תחילה במקרה בו R=1 ואחר כך נחזור למעגל הכללי).

13. הגדרת סינוס וקוסינוס במעגל היחידה
כערכי y ו-x של נקודת קצה הקשת (הנייד).
הסימון: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$. שרטוט קשתות שונות במעגל ולכל אחת מהן - שרטוט הסינוס והקוסינוס.

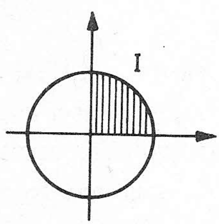


הערות

א) אמנם הוגדרו כאן סינוס וקוסינוס ביחד - דבר זה מתבקש מן ההגדרה אך בשעורים הקרובים נעסוק במפורט רק בסינוס ולאחר שנסיים את כל הנושאים הקשורים בו **בלבד**, נחזור להגדרה זו ונעבור לקוסינוס.

ב) הסינוס והקוסינוס מוגדרות כאן כפונקציות של קשת הנמדדת במעלות ולא של זוית מרכזית כפי שנהוג, היות ונראה לי כי לתלמיד הרבה יותר קל מבחינה אינטואיטיבית להבין משמעות של קשת בת 400°, 800° וכדומה מאשר של זווית בת אותן מעלות.
מורה שאינו מסכים עמי - יגדיר בסעיף 9 במקום קשת, זוית במעגל הטריגונומטרי ויחליף "קשת" ב"זוית" בשלבים הבאים.

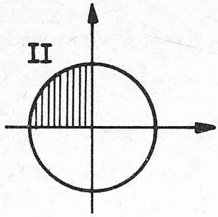
14. ערך הסינוס לפי ההגדרה לקשת בת 0°, בת 90°



15. חישוב ערך הסינוס לקשת בת 30°
(חזרה על המשפט הגיאומטרי המתאים).
ביטוי הערך במספר עשרוני $\sin 30°=0.5$

16. חישוב ערך הסינוס לקשתות בנות 60°, 45°. ביטוי אי רציונלי ואח"כ קירוב **על ידי** מספר עשרוני. ריכוז החישובים בטבלת התאמה:

x°	sinx°

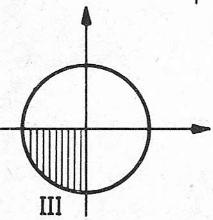


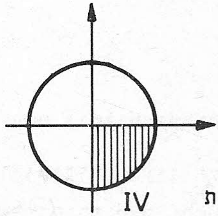
17. ערכי הסינוס של זויות ברביע השני וסימניהן וביטויים על ידי סינוס של זויות חדות

למשל: $\sin150°=\sin30°=\frac{1}{2}$

ובאופן כללי: $\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$

18. כמו 17 לרביע השלישי: $\sin(180+\alpha)=-\sin\alpha$

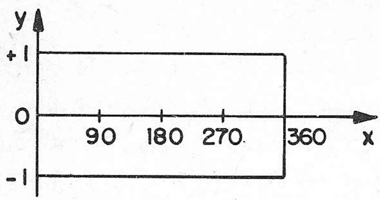




19. כמו 17 לרביע הרביעי: $\sin(360-\alpha)=-\sin\alpha$

אפשר לתת 18, 19 כתרגיל לתלמידים בכיתה או בבית

שיעור מס' III



20. תיאור גרפי של המחזור הראשון של פונקציית הסינוס.

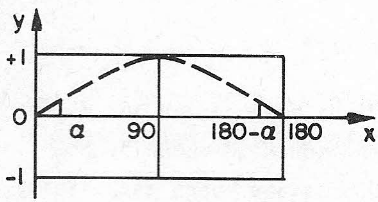
התחום: כל המספרים בין 0 ו 360

הטווח: כל המספרים בין 1- ו 1+

שרטוט מלבן במערכת צירים החוסם את פונקצית הסינוס כמתואר בשרטוט:

21. שימוש בלוח הסינוסים. מציאת הערכים ל- 30°, 45°, 60° והשוואתם לערכים שחישבנו ב 15, ו 16. מציאת 2-3 ערכים נוספים והוספתם לטבלת ההתאמה.

22. סימון הנקודות של טבלת ההתאמה בגרף וחיבורן על ידי קו רציף (מציינים הנחת רציפות הפונקציה).



23. מעבר לרביע השני: רשימת זוגות של קשתות ברביעים I ו II שיש להן אותו סינוס (100,80), (110,70), (120,60)...
סימטריה של גרף הסינוס לגבי הישר $x=90°$

24. רשימת זוגות של קשתות ברביעים II ו III המקיימות: $\sin(180+\alpha) = -\sin(180-\alpha)$
כמו: (170,190), (160,200).... סימטריה של הגרף לגבי הנקודה (180°,0). שרטוט הגרף לרביע השלישי.

25. כמו 23, לרביע הרביעי - תרגיל לתלמידים.

26. דיון בגרף מ- $0°$ עד $360°$: באילו רביעים הגרף מייצג פונקציה חיובית או שלילית, עולה או יורדת.

27. בהסתמך על 11, קיים: $\sin(\alpha+360n)=\sin\alpha$ עבור n טבעי. ממשיכים ימינה את גרף הסינוס למחזורים נוספים מ $360°$ עד $720°$, מ $720°$ עד $1080°$ וכדומה.

שיעור מס' IV

28. המשמעות של קשת שלילית בת: $-20°$, $-90°$, $-360°$.
התלכדות נקודות הקצה ולכן גם הסינוסים של זוויות מטיפוס α, $\alpha-360°$, $\alpha-360n°$, n שלם חיובי.

29. המשכת גרף הסינוס שמאלה מה $0°$ לקשתות שמספר מעלותיהן שלילי.
סיכום: הגרף סימטרי לגבי ראשית הצירים, הפונקציה אי-זוגית.

30. התלכדות נקודות הקצה ולכן גם הסינוסים של קשתות מטיפוס $\alpha+360n$ n שלם.
מכאן: $\sin(\alpha+360n)=\sin\alpha$, השוואה להגדרת המחזור היסודי של פונקציה סעיפים 4-6. המחזור היסודי של פונקצית הסינוס: $360°$.

31. מהן כל הזוויות אשר הסינוס שלהן 0, 1, -1 (עפ"י הגרף)?
המשמעות של פתרון כללי של משוואה טריגונומטרית (קבוצת האמת).

32. פתרון כללי של המשוואה: $\sin x=\frac{1}{2}$, להעזר בגרף. הישר $y=\frac{1}{2}$ חותך את גרף הסינוס בנקודות.....

שיעור מס' V

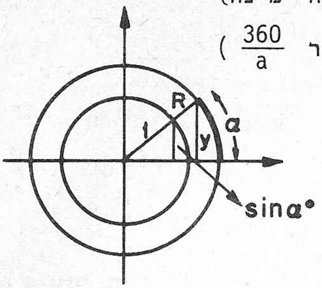
33. פתרון כללי של המשוואה $\sin x = k$ $\quad 0 < k < 1$

34. פתרון כללי של המשוואה $\sin x = -\frac{1}{2}$ ואחר כך $\sin x = k$ $\quad -1 < k < 0$

35. פתרון כללי של המשוואה $\sin ax = k$ $\quad -1 < k < 1$

36. פתרון כללי של המשוואה $\sin(ax+b) = k$ $\quad -1 < k < 1$

37. פתרון כללי של המשוואה $\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$



38. הגרף $\sin(x+b)$ ($b > 0$ הזזת $\sin x$ שמאלה. $b < 0$ הזזה ימינה)

39. הגרף של $\sin ax$ ($a > 1$ "כיווץ, $a < 1$ "ניפוח". המחזור $\frac{360}{a}$)

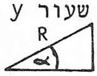
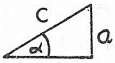
40. הגרף של $\sin(ax+b)$

41. הגדרת הסינוס במעגל כלשהו (שמחוגו R)

מדמיון משולשים: $\frac{y}{R} = \sin\alpha$ $\quad \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{R}{1}$

כלומר, לקשת α° במעגל שמחוגו R , מוגדר

הסינוס כיחס בין שעור y של קצה הקשת, ו- R

42. הוצאת המשולש  מהקשרו למעגל, החלפת האותיות  ושימוש

בסינוס לזוית חדה α במשולש ישר זוית : $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

שיעור מס' VI

43. פתרון בעיות במשולש ישר זוית כשנתונים α, c ומחשבים את a

44. כמו 43 - כשנתונים α, a ומחשבים c

45. כמו 44 - כשנתונים c, a ומחשבים α

שימוש בלוח לוג סינוס לחישובים.

מכאן חוזרים להגדרת הקוסינוס בסעיף 13, ועוברים על השלבים כמו לגבי הסינוס **אלא** במהירות רבה יותר (3-4 שעורים).

ספרים בעברית הנוקטים במידה זו או אחרת בגישה לנושא שהובאה במאמר זה הם:

1. "אלגברה" (פרק יא') בהוצאת המרכז להוראת המדעים, אוניברסיטת ירושלים.

2. "הפונקציות הטריגונומטריות" בהוצאת המחלקה להוראת המדעים של מכון ויצמן.

3. "אלגברה" (חלק ב') של זכריה נצר, בהוצאת הקיבוץ המאוחד.