האם אתה מכיר את אביך?

מאת: הנס פרוידנטל
תרגום: חוה זנגר וחנה ליפסון

- האם אתה מכיר את אביך?
- כן.
- האם אתה מכיר איש זה העטוף בסדין?
- לא.
- אבל הוא אביך!

(לפי זקטוס אמפיריקוס, אדברסוס מתמטיקוס 10 VIII)

אפשר לדון בפרדוכס מפורסם זה מבחינה פילוסופית, הגיונית ובלשנית. ברצוני להתיחס לצד הפדגוגי שבו. "נתרגם" פרדוכס זה לשעור במתמטיקה. לשונו תהיה:

- אפילו את משפט תאלס אינך מכיר?!
- אני כן מכיר אותו.
- אבל לא פתרת תרגיל מס' 3.
- האם היה עלי להשתמש שם במשפט תאלס?
- כמובן!
- מדוע לא אמרת לי זאת?
- אינני יכול לגלות לך את הכל.

אולם, בצורה זו אין זה פרדוכס. או שמא כן? אם כן, הרי זה "פרדוכס פדגוגי". מדובר כאן במלה "להכיר". בעיני התלמיד פירושה: "לדקלם" את משפט תאלס; המורה דורש מהתלמיד להכיר את משפט תאלס אפילו בהיותו עטוף ב"סדין". התלמיד מוכן להכיר בצדקת דרישה זו באותם המקרים בהם מראים לו כיצד אפשר לגלות את תאלס. אך בעבודת הכיתה בשעור הבא, ממציא המורה שיטה חדשה "להחביא" את משפט תאלס. אולי קיימים מקומות מחבוא שאינם ידועים גם למורה? - ואז - אף הוא אינו "מכיר" את משפט תאלס! האם הוראת המתמטיקה היא משחק מחבואים? יש הסבורים שאין הדבר כן, אי לכך מקנים לתלמידים שיטות שבעזרתן אפשר להתמצא בכל מבוך שהוא. לצערנו, אין הטבע מבוך!

לפני מונח ספר לימוד קטן המיועד למוסדות החינוך שלנו. הוא פותח כמובן בתורת הקבוצות. העמודים הראשונים (4½ במספר), מכילים 30 הגדרות וסימונים, כאשר כל אחד מהם מלווה בדוגמא. אך, כמובן, אין משתמשים בספר באף אחת מהגדרות אלה. כשאוספים

Hans Freudenthal "Kennst Du Deinen Vater?" Translated from Der Mathematikunterricht, (Vol.20, No.5, October 1974). Used by permission of the publisher, Vilett Verlag, Stuttgart.

את כל ה-ז'רגון המודרני("General Abstract Nonsense") המוצע כיום במתמטיקה חדישה לבית הספר, נגיע על נקלה למאות של הגדרות וסימונים. במחקר מסויים שנערך בצרפת רצו לבדוק מה נקלט אצל התלמידים מחומר זה כעבור שנתיים של לימוד (בסוף שש שנות לימוד). המחקר מראה שהרוב אינו "מזהה את אביהם אפילו מתחת לצעיף קל".

גוברת כיום הנטיה ל"כתישת" חומר הלימוד והגשתו בכפית. תעשית המבחנים דורשת זאת! בלי מטרות ומטלות אין אפשרות לייצר מבחנים. יש להתאים את שיטת ההוראה לדרישה זו.

הנני מצטט משאלונים אמריקאיים:

הנושא: קבוצות

קבוצות זרות

1. למי יש איברים?
   א) מועדון כל האנשים שגילם למעלה מ- 150 שנה.
   ב) שדה ריק.
   ג) נבחרת כדורגל.

2. נבחרת כדור הבסיס שלך מכילה:
   א) איברים.
   ב) מכנים.
   ג) שברים.

6. אילו פסוקים נכונים לגבי כל הקבוצות הזרות?
   א) כולן שוות.
   ב) הן מכילות חמישה איברים.
   ג) אין להן איברים משותפים.

7. אילו פסוקים אינם נכונים לגבי כל הקבוצות הזרות?
   א) אין להן איברים משותפים.
   ב) הן מורכבות משתי קבוצות.
   ג) מספר איבריהן שווה.

10. כאשר מדובר בקבוצות זרות, התואר "זר" מציין
   א) קבוצות.
   ב) חיסור.
   ג) ממלא מקום.
   ד) פעולה.
   ה) גורם.

12. מה נכון לגבי קבוצות זרות וישרים מקבילים?

א) לישרים מקבילים יש נקודות משותפות, ולכן הם מהווים קבוצות זרות.

ב) משתי קבוצות נקודות זרות אפשר ליצור ישרים מקבילים.

ג) גם קבוצות זרות וגם ישרים מקבילים יכולים לחתוך זה את זה.

קבוצות שקולות

6. מה נכון לגבי <u>כל</u> הקבוצות השקולות?

א) הן קבוצות של בעלי חיים.

ב) לכל אחת יש שלושה איברים.

ג) מספר איבריהן שווה

12. מה נכון לגבי קבוצות שקולות וחיסור?

א) תוצאות החיסור של שני מספרים נקראת בשם קבוצה שקולה.

ב) תוצאת החיסור של איברי שתי קבוצות שקולות היא 0.

ג) תוצאת החיסור של מספר האיברים של שתי קבוצות שקולות היא 0.

אל תצחקו! ביום בהיר אחד תגיע "ספינת האוילים" הזאת גם לחופינו.

השיטה של חלוקת החומר ליחידות קטנות, "אטומיזציה", היא לא רק אידיאל ביהייביוריסטי, מתברר שהיא גם הדרך הנוחה ביותר לתכנון פרטי ההוראה. העוסקים בחינוך ובדידקטיקה כללית סבורים שהמתמטיקה היא הנושא המתאים ביותר לפרוק ליחידות קטנות. הרי במתמטיקה אפשר לרשום את כל המושגים, לתרגל ולבחון אותם כל אחד לחוד, בזוגות בשלשות וכו' עיוות כזה של תדמית המתמטיקה איננו נדיר!

אנו כמתמטיקאים צריכים להלחם נגד זה. עלינו להטעים כי המושגים בפני עצמם הם "חסרי נשמה", ורק בהקשר במערכת עשירה יש להם משמעות. הקשר זה חסר לעיתים קרובות במה שמכונה כיום "מתמטיקה מודרנית" על התלמיד ללמוד שפה אשר במשך הלימודים אין משתמשים בה כלל, וכאשר מגיעים לתכנים שאפשר לבטאם בעזרת שפה זו היא כבר נשכחה מזמן.
אין שואלים כבר בבית הספר את השאלה: "האם אתה מכיר את אביך?" או "האם אתה מכיר את משפט תאלס?" אלא שואלים שאלות בנוסח: "הגדר....." או - "מה פירוש הסימן ..." או אפילו לא כך אלא בהקשר עם מבחן רב ברירה, כדי שנוכל לומר לתלמיד: "אינך יודע מה פירוש הדבר".

את ההבדל בין מתמטיקה שהיא מובנת רק בהקשר למערכת שלמה, לבין המתמטיקה שעברה את תהליך האטומיזציה וכן משמעותה של המילה "להכיר" בכל אחת מהן - ברצוני להדגים בעזרת שתי דוגמאות. שתי הדוגמאות קשורות במושג המספר, הראשונה בזה של המספר המונה והשניה בזה של המספר הסודר. מושג המספר המונה הוא הזוכה כיום למירב ה"טיפול"!
יש להצטער כי בגלל "לעיסת יתר" של דברים טפלים שוכחים את הבעיות המשמעותיות.

על התהוותו של מושג המספר ידוע מעט מאוד. הפסיכולוגיה ההתפתחותית חוקרת את התפתחותו של אדם ממוצע וזו מתקבלת בתהליך של מיצוע ולכן היא כמובן רציפה. אולם כמעט אין ספק שההתפתחות הנפשית של הפרט איננה רציפה וכי אי הרציפות, בפרט בתהליכי למידה היא העיקר. נקודות אי רציפות אלה מתגלות רק מתוך מעקב רציף, ולכן נעלמות מעיניו של "פסיכולוג המעבדה". לאיש חינוך יש אולי סיכוי רב יותר לצפות בהן.

מה מופלאה התהוות מושג הצבע ומושג המספר! יום בהיר אחד המושגים ישנם! באשר למושג הצבע הצלחתי מדי פעם לצפות בהתהוותו הפתאומית. ילד (בן 3 שנים ו-4 חדשים) הצביע על תעלה שהיתה ידועה לו מכבר, שבה הופיעה לפתע פתאום - לקראת סוף הקיץ - פריחה צבעונית, הוא שאל "מהו האדום שם?" זה היה השימוש הראשון הספונטני של מילת צבע - בצורת שם עצם. הצבע נתגלה כעצם (העובדה שצבע הפריחה לא היה אדום אלא צהבהב-ירוק היא בעלת משמעות משנית).

אשר למושג המספר, מעודי לא הצלחתי, למרות מאמצים רבים, לצפות באי-הרציפויות, או שמא לא נמצאתי בקרבת מקום כאשר הילד גילה שאף עצמים,הסמויים מן העין,אפשר למנות והתרגש מתגליתו.

מה יכול להיות הגורם המכריע במבנה המספרים? המספר הוא תכונה של קבוצה ולא של עצם. אומרים "הסוס הוא חום" ו"סוסים חומים", "...שלושה סוסים", אבל לא "הסוס הוא שלושה". אכן, "שלוש" היא תכונה - של מי? של מה? לא של הסוסים אלא של "קבוצת הסוסים". "קבוצה" אומר המתמטיקאי. האם התגבשות ה"קבוצה" הוא הגורם המניע להתהוות מושג המספר? אני נוטה לתפיסה זו,כי ברמה גבוהה יותר הצלחתי להסביר את הכשלונות בתפישת מושג המספר על ידי העדר ביסוס של מבנה הקבוצות. לדיון זה אחזור בהמשך.

אני חייב לומר בבירור: אינני טוען, כפי שמקובל היום, שיש לפתח את <u>מושג</u> הקבוצה לפני שהילד מגיע למספרים. בנית <u>מושג</u> הקבוצה, אם היא מוצדקת בכלל, מצויה ברמה הרבה יותר גבוהה. מה שקובע הוא יצירת אוביקטים (נפשיים) שאחת מתכונותיהם הם המספרים ואוביקטים אלה אני מכנה, כנהוג, קבוצות. כאמור, נפוץ כיום בלבול: במקום בנית קבוצות, החשובות לתפיסת מושג המספר, מנסים להקנות לילדים את מושג הקבוצה. אפילו מרחיקים לכת ומנסים ללמד את הילדים מהו מושג המספר במקום מספרים. שוב, יש בכך דילוג על שלבים בתהליך הלמידה. בתהליך של התגבשות מושג הקבוצה ומושג המספר - נמצאת הבניה של קבוצות ושל מספרים בשלב הנמוך ביותר, ורק בשלב גבוה יותר מתגבשים <u>מושג</u> הקבוצה ו<u>מושג</u> המספר.

בבניה הרציונלית של המתמטיקה אפשר להגדיר את המספרים כמחלקות של קבוצות שקולות. דוגמה זו חשובה בניתוח מתמטי של מושגים. בדומה לכך אפשר להגדיר משקל בעזרת קבוצות שקולות של גופים כבדים, קשיות חומרים בעזרת קבוצות שקולות של חומרים החורצים חריצים זה בזה וכו'. ההנחה שהמושגים מתפתחים כך או בדומה לזה, היא אבסורדית. ניסויי פיאג'ה אשר מתוכם רצו להסיק מסקנה זו, הוכיחו בדיוק את ההיפך. יחס השקילות שהוא ביסוד המספרים הוא בעיני המתמטיקאי התאמה חד-חד-ערכית. אולם אין זה מתקבל על הדעת שהתאמה זו משחקת תפקיד אצל הילד הלומד להכיר מספרים. מה שמכריע - היא תפיסת מושג הקבוצה ההכרה שקבוצת סוסים היא דבר, ותמיד אותו דבר, בכל מצב של עמידה ודהירה, כל זמן שאף סוס לא ברח או נוסף אתמול, היום, מחר. קשה כנראה לעקוב אחרי בנית קבוצות תוך כדי תהליך הלמידה והסיבה היא ברורה. אוצר המונחים הקונקרטיים לבנית קבוצה הוא דל. ברמה גבוהה יותר יש הרבה מונחים כאלה: משפחה, חברה, עם, אגודה, איגוד - הוסיפו עוד ואל תשכחו את המילה "קבוצה"; אבל מה תוכלו למצוא באוצר המלים של בן ארבע שיש בו כדי להעיד על כך שהוא יוצר קבוצות?

תנאי ליצירת קבוצות אם בכלל רצוי שיופיעו, הוא קיום הצורך בכך. בזמן הניסוי במעבדה דורשים מהילד שיראה אוסף מקרי של עצמים שונים כקבוצה. היכן כאן הצורך וכיצד נוצר?

ההשערה הפשוטה ביותר היא שהילד תוחם את רכושו, נאמר צעצועים מסוג מסויים, לעומת רכושם של אחרים. איבוד חפצים ישנים או הוספת עצמים חדשים הם מאורעות פשוטים וברורים, ואם אין כאלה, הקבוצה נשארת כפי שהיא.

מונח מקצועי הוא השימור. מושג זה הרבה יותר חשוב מאשר ההתאמה החד-חד-ערכית. מושג ההתאמה החד-חד-ערכית הוא מדרגה גבוהה יחסית; אין לגבש אותו אלא כאשר עוסקים בקבוצות זרות. כל הדוגמאות המדגימות התאמה חד-חד-ערכית, מבוססות על ההנחה שהקבוצות המיוחסות זו לזו הן זרות, אין דרך אחרת. קבוצות שאינן זרות, ובעיקר קבוצות המכילות זו את זו משבשות את פיתוח המושג במידה ניכרת. לפיכך מוגבל תחום השימוש של ההתאמה החד-חד-ערכית עד כדי כך שאינה מהווה בסיס מספיק למושג המספר.

לעומת זאת, השימור כעיקרון יוצר אוביקטים, הוא טבעי ופשוט. אלה המשתמשים בו בתיאוריה בלבד, אינם מייחסים אותו לאוביקט הנכון. מה שמתגבש מתוך עקרון השימור - אינו המספר כי אם הקבוצה. עקרון השימור הוא העקרון שהסברנו לעיל. אם דבר לא הלך לאיבוד ודבר לא נוסף, נשאר מה שהיה. אך ה"שימור" -אינו נוסחת קסם. אל נשלה את עצמנו בתקוה כי בעזרתו נוכל להסביר הרבה. המושגים נפח ומסה למשל מושתתים על עקרונות שימור שונים לחלוטין מאשר המקרה של קבוצה. כאשר כותשים גולה - מה נשמר כאן? מה כאן הפיך? - אם רוצים להשתמש במונח מקצועי אחר. הפסיכולוגים מסתמכים על העובדה שקיימת מערכת מושגים המנותקת מהמציאות, ואינם שואלים את עצמם באיזו מידה תהליך הניתוק נקבע על ידי סדרה של עובדות מהנסיון המעשי. אני מניח כי הילד תופס את המספרים כתכונות של קבוצות; אבל לא נראה לי שזה קורה בלי כל מניע. שבטים שלמים לא הגיעו לתפיסה זו. מדוע?

לא היה להם שום מניע. יהיו אשר יטענו כי לשבטים אלה אין שמות מספרים. נכון מאד. בחברתנו לומדים הילדים בגיל רך את שמות המספרים (וגם את שמות הצבעים) ואפילו לומדים לספור, אבל אינם יודעים מה לעשות עם זה. מונים חפצים, חוזרים ומונים אותם ומגיעים לאותה התוצאה, גם מבלי לשים לב לסדר העצמים. כך נוצרות האסוציאציות ההולכות ומתחזקות המובילות - כך אומרים - לגיבוש המספר. איני מאמין בלמידה רציפה, כאשר מדובר במושגים חשובים. אין רוכשים מושגים כאלה, כפי שלומדים את לוח הכפל. אני מחפש את אי-הרציפות, את החוויה, את הגורם המניע.

ומה יכול להיות גורם מניע כזה? אם רואים בקבוצה אוסף של נכסים, אפשר לפרש כמניע את הרצון לבדוק אם הנכס לא השתנה. כאשר קל לזהות את האיברים הבודדים של הקבוצה - כגון בני המשפחה, וכאשר אפשר להשקיף על הקבוצה בשלמותה, אין מניע חזק לבדיקה כזאת. המניע יכול להופיע פתאום; הילד רוצה להוודע האם הכל עוד נמצא, אני מניח שהילד יספור את העצמים מסביבו כי למנות הוא למד בדרך כלל לפני שיצר את מושג המספר. כיצד עלה בדעתו לראות בקביעות המספר המונה קריטריון לקביעות הקבוצה הנידונה?

העליתי קודם השערה, אולי התגלתה נקודת אי-הרציפות המכרעת במנייתן של קבוצות הסמויות מן העין, ובהתרגשות על תגלית זו? ובאמת עשויה תגלית זו להביא לקריטריון המראה כי הקבוצה לא השתנתה. הילד מונה את הקבוצה הנראית לעין, הקבוצה נעלמה; אבל עדיין היא ניתנת להמנות גם בזכרון, זמן רב אחרי שנעלמה; הנה היא חוזרת שוב ותוצאת המניה לא השתנתה.

אני חוזר: השערתי היא כי בשלב ראשון נוצר מושג הקבוצה, כגון אוסף "נכסים". המספרים מתהווים רק כתכונות של קבוצות. המניע ליצירת המספרים הוא הבקרה ל"התמדת" הקבוצה. רוכשים את אמצעי הבקרה תוך מנית קבוצות נעדרות, נעדרות בחלקן או נעדרות לזמן מה. עד לשלב זה אין ההתאמה החד-חד-ערכית משחקת תפקיד. גם אם מתברר לילד שלכל האנשים אותו מספר אצבעות, ושבכל תיבות הצעצועים מאותו סוג אותו מספר קוביות בניה, עדיף לשער שכאן מדובר בתהליך השוואה בין מבנים חופפים, דומים או שווים מבחינה פונקציונלית ולא בתהליך של התאמה חד-חד-ערכית. אם אמצעי ההשוואה האלה אינם מספיקים אזי נגשים למניה. הילד לומד מהר שזהו האמצעי היעיל ביותר. יש להמציא תחבולות מרובות, אם רוצים לכפות על הילד השוואה באמצעות ההתאמה החד-חד-ערכית. בדרך כלל אנו משווים קבוצות באמצעות קבוצת המספרים, כי על פי רוב המדובר בשתי קבוצות שאינן נוכחות בעת ובעונה אחת. אם עלינו לערוך את השולחן לששה אנשים, חייבים אנו למנות שש צלחות. לאחר מכן אמנם שמים את הסכינים ואת המזלגות בהתאמה חד-חד-ערכית. גם כשמלמדים ילדים בבית הספר, ילדים אשר בדרך כלל כבר מכירים את המספרים: ניתן להם לספור במקרים שגם המבוגר סופר ונאפשר להם להשתמש בהתאמה החד-חד-ערכית באותן הנסיבות בהן גם המבוגר משתמש בה.

תוך הסתכלות בילדים אין מבחינים רק בהתפתחות מושג המספר אלא גם בכשלונות של השימוש בו. האם הם יודעים להשתמש בטרנסיטיביות לגבי השוואת המספר המונה, לגבי השוויון, לגבי הגודל? האם ההתאמה החד-חד-ערכית עשויה לתרום כאן משהו? לא מצאתי דבר כזה.

לא מכבר ערכתי ניסוי ופתחתי בשאלה הידועה: "האם ישנם שני אנשים אשר מספר שערות ראשם הוא שווה?" שאלה זו, הקרובה לעקרון המגרות של דיריכלה (Dirichlet), היא כביכול, סימן ההיכר של מושג המספר המונה. אף על פי שידעתי כבר כי שאלה זו קשה מדי, פתחתי בה, נוהג אני לרדת מן הכבד אל הקל על מנת לחזור ולעלות לאחר מכן.

בהמשך שאלתי: הנמצאים בכיתתך שני ילדים שיום הולדתם באותו החודש? האם זה כך בכל כיתה? מה צריך להיות גודל הכיתה כדי שימצאו בה שני ילדים אשר יום הולדתם חל באותו החודש? - 10, 11, 12, 13...? הנמצאים בבית ספרך שני ילדים (מורים) שיום הולדתם חל באותו תאריך? האם זה כך בכל בית ספר? מה צריך להיות גודל בית הספר כדי שנוכל להיות בטוחים ששנים מילדיו (מוריו) נולדו באותו תאריך? (וריאציות עם "כפר" במקום "בית ספר").

כבר אצל ילדים בני 8 היתה התגובה על כל השאלות האלה חיובית. התשובות ניתנו בכח שכנוע כזה, שלא דרשתי נימוקים וגם לא הייתי מקבל אותם. המתמטיקאי היה אומר: הקבוצה x של הילדים הותאמה באמצעות יום ההולדת על הקבוצה y של החודשים: אם לכל היותר נולד ילד אחד בחודש, הרי ההתאמה היא חד-חד-ערכית, כלומר מספר הילדים איננו גדול ממספר החדשים.

הילדים שבפניהם הצגתי את השאלות האלה, למדו חשבון לפי השיטה המסורתית, בלי התאמה חד-חד-ערכית. מה יכלו להיות שיקוליהם - הבלתי מודעים? אולי טענו כך: לילד אחד יש יום הולדת בינואר, לאחד בפברואר, לאחד במרץ וכן הלאה, מכאן נקבל כי מספר הילדים הוא לכל היותר כמספר החדשים. אינני חושב שכך היה הדבר, אסביר מיד מדוע.
שאלתי הבאה בניסוחה הראשון היתה כך:
למרבי-רגליים יש לכל היותר 1000 רגליים. האם יש שני מרבי-רגליים בעלי אותו מספר רגליים?

התשובה היתה: "ח,ח,ח... לכל מרבי-רגליים יש 34 רגליים". אינני יודע אם עובדה זו נכונה אך הילד למד או קרא זאת. ניסיתי לגשת לבעיה בדרך הראויה למתמטיקאי: "נסכים בינינו שמרבה הרגליים הוא בעל חיים שיש לו לכל היותר 1000 רגליים". הילד צחק לשמע התירוץ הזה, לא קיבל אותו ושמח שהצליח "לסדר" אותי. בחרתי בדוגמא אחרת: בקופסת גפרורים (משומשת) נמצאים לכל היותר 100 גפרורים. הישנן שתי קופסאות גפרורים המכילות מספר שווה של גפרורים? לפי נסיוני לא הצליחו בני 8 בהתרת הבעיה. בני 10, אשר בהדרכתי

עוסקים במתמטיקה בקביעות, הצליחו בה אף כי היססו לענות. (לאחר מכן באה ההעברה לבעיית השערות) היכן כאן ההבדל, במה נבדלת שאלה זו מקודמתה? לכאורה יכול היה הילד גם כאן לטעון כך: בקופסה אחת 0 גפרורים, באחת גפרור אחד, באחת 2 גפרורים וכו', ובכן לכל היותר 101. ובכל זאת, כנראה שעבור הילד שאלה זו שונה. מדוע? כיון שטבעי למספר את החודשים לפי סדרם אך לא את קופסאות הגפרורים לפי מספר הגפרורים שבהן.

נהרהר בדבר כמתמטיקאים! עתה, כמובן, x היא קבוצת קופסאות הגפרורים, בתור y נבחר את הקבוצה {100,...,1,0} ו- f תהיה ההתאמה המתאימה לקופסא את מספר הגפרורים שיש בה. בדוגמאות הראשונות היתה y קבוצת החודשים או קבוצת ימי השנה, וזו קבוצה מהעולם הממשי. אולם הרעיון להשתמש בקבוצה חלקית של N, כלומר, באמצעי מתמטי, אינו מתקבל על הדעת! קושי נוסף הוא שההתאמה f אינה ניתנת להמחשה. גם כאן היה רצוי ש- y תהיה קבוצה המתקבלת ומתבקשת מעצם הבעיה. אם כן איזו קבוצה מתבקשת עבור y? כמובן, הקבוצה של מספר הגפרורים בקופסאות, אך זו אינה קבוצה מוחשית ביותר. המספרים מ- 0 עד 100 אינם צריכים להופיע כשלעצמם אלא כמספרים מונים של גפרורים. בשעה שהילד ניגש להתרת הבעיה, עליו להעלות על דעתו - אם כי בלא יודעין - את הקבוצה הזאת, ואם הוא מתקשה הפעם יותר מאשר בסדרת השאלות הראשונה, הסיבה היא מהותה של הקבוצה.

כדי לפתור בעיה זו, אין הילד חייב לדעת מהי קבוצה, אבל הוא צריך להיות מסוגל לגבש אוביקטים מסוימים שיפעל בהם כבקבוצות. מבוגרים רואים את השאלות הראשונות ואת השאלה האחרונה כאיזומורפיות, וגם אני עשיתי זאת עד שהראו לי הילדים כי אני טועה.
בשני המקרים פועל "עקרון המגירות" המעתיק קבוצה אחת על שניה. "עקרון המגירות" - יפה אמרת! המגירות הן החדשים ולתוכם מכניסים את הילדים. כן, זה אפשרי. אבל אם המגירות הן מספרים מונים של הגפרורים, כיצד מכניסים אליהם את הקופסאות? מתוך גישה שטחית דברנו על איזומורפיות של הבעיות בשעה שלאמיתו של דבר האיזומורפיות אינה קיימת. אם יודעים באיזו קבוצה y לבחור, כלומר, אם קובעים את הקבוצה הנכונה כ- y, אז הבעיות הן איזומורפיות. חוזרים לפזמון הישן: אתה אפילו לא יודע מהי קבוצה. כן, אבל אם הקבוצה עטופה בסדין, אין אני יכול להכיר אותה.

תורת הקבוצות, כפי שמלמדים אותה כיום בבית הספר, אינה שדה אימונים שבו יכול התלמיד להכיר קבוצות. הסגנון נע בין הגדרות פורמליות של קבוצות מצד אחד ובין המחשות מוטעות מצד שני, עתים שתיהן ביחד. סבורים שבעזרת ציורים על הניר, בדיאגרמות של וון,* אפשר לייצר קבוצות. אמנם אפשר לעשות זאת, רק לא לגבי אותן הקבוצות שכדאי להציג. את ההעתקה המתאימה לבן-האדם לא את הקבוצה אלא את מספר שערות ראשו - אפשר להדגים בעזרת ציור, אבל רק בדיעבד, רק לאחר שהבינו את הבעיה. לגבי מושג הקבוצות הרבה יותר חשוב ומשמעותי להציג קבוצות שאין לצייר אותן על הניר.

John Venn *

השימוש הרב בקבוצה האוניברסלית שמציירים אותה בלי כל היסוס על הניר ואשר לגביה יוצרים את הקבוצה המשלימה היא אופינית לדבקותם של מחברי ספרי לימוד להיעזר בהמחשה מוטעית זו. כל זמן שיוצרים המחשות נאיביות אפשר להשלים עם גישה זו. אבל מלבד זאת קיימת הגדרת הקבוצה האוניברסלית כקבוצה קבועה המכילה את כל הקבוצות האמורות לעמוד לדיון. למזלנו אין דנים בשום מקום בקבוצה של כל הקבוצות, אולם כבר חצי עמוד אחרי כן נזכרים: N-הטבעיים, Z-השלמים, Q-הרציונליים, R-הממשיים ואחרי עוד כמה עמודים קבוצות המכפלה, קבוצות החזקה, אם כי רק לגבי קבוצות סופיות. למזלו הספיק התלמיד בינתיים לשכוח את הקבוצה האוניברסלית, ובזה לא הפסיד מאומה, כי המושג היחידי שלמענו הונהגה קבוצה זו, הוא המשלים אשר בו אין משתמשים כלל וכלל (אין להסיק מזה שמשתמשים בשאר המושגים).

בסוף ברצוני להציג דוגמא אחרת. אולי לא יראה הקורא מיד את הקשר עם נושאנו אבל יכירו בסוף הדיון.

לפני כמה חודשים ערכנו כנס של ארבעה ימים למפקחים ולאחראים להוראה בבתי הספר המקצועיים. לענף זה של ההוראה התיכונית, שהוא אצלנו המקיף והמוזנח ביותר, הצענו מקור למציאת חומר לימודים (לא תכנית לימודים). כוונתנו היתה להבהיר למפקחי בתי הספר את מטרותינו בהוראת המתמטיקה בבתי הספר המקצועיים. בנוסף להרצאות קיימנו שם גם תרגילים ברמה קצת יותר גבוהה למשל ברמת המורים. המשתתפים לא היו מתמטיקאים אלא אנשים שלא זכרו הרבה מהמתמטיקה שלמדו פעם בבית הספר.

בין היתר נתנו סידרת תרגילים בתורת ההסתברות. המשתתפים עבדו בקבוצות של 2 עד 4 ועסקו בדפי עבודה. תוך כדי עבודתם חזרו ונתקלו במשולש פאסקאל ששיחק שם תפקיד חשוב, אך לא הגיעו לפורמלזציה. שעה שהסתכלתי במשתתפים אמר לי אחד מהם "אני מרגיש כאן כמו בחברת חרשים-אלמים" וכשפני לבשו ארשת של תמהון, המשיך: "כמו מכונות חישוב המבצעות פעולות ולא יודעות מה הן עושות".

ניתחתי את תצפיותיו, ובערב, כשהרציתי, אמרתי להם בערך כך: היום פתרתם תרגילים מתורת ההסתברות, וכדי לפתור אותם, פיתחתם, חישבתם ועיינתם במשולשים הנקראים על שמו של פאסקאל. הסקתם מסקנות לגבי המשולשים האלה על סמך שיקולים מעשיים. הסברתם לשכניכם ולעצמכם את ההגדרה של משולש פאסקאל וחזרתם עליה בעזרת תנועות מסוימות של האצבע על הניר בליווי הערות כגון: "זה פלוס זה הוא זה" אצבעכם עלתה וירדה בתוך המשולש של פאסקאל בזמן שרציתם להוכיח משהו. הנני מצהיר שזו היא מתמטיקה אמיתית. המתמטיקאים הדגולים ביותר לא פעם פועלים כך, בפרט בשעה שחוקרים שטח חדש. אמנם אין זאת השיטה היעילה ביותר להעביר מידע לאחרים או להחדירו לזכרון. השפה צריכה להוליד אמצעים מושלמים יותר. איפה אמצא אותם?

השפה בה השתמשתם היום אחר הצהרים מאופיינת על-ידי הדגמות. הוא שפה כללית אך היא מוצפת כינויי רמז כגון "הזה, הזאת, ההוא, האלה" הדורשים את תנועת האצבע, היא שפה

פרימיטיבית. ננסה עתה לפעול בלי אצבע, אך בלי לוותר על הבהירות שזוכים בה בעזרת האצבע.

וותרו על ההדגמה (לאחר מכן חזרתי כמה פעמים על הניסוי, והדבר נעשה בהדרגה). "זה פלוס זה מצד ימין נותן את זה שלמטה". "זה פלוס זה נותן את השכן מלמטה". "ושני שכנים ביחד נותנים את השכן התחתון". "כל מספר הוא הסכום של שכניו העליונים"! יפה, אמרתי, אבל מה זה "שכן" ו"למעלה". ספר זאת לעיוור, שאינו רואה את המשולש שלך, או הודע על ממצאיך טלפונית! אז גם על המשולש יש לוותר. ממספרים את השורות האופקיות מלמעלה. אני מציע להתחיל ממספר 0: בשורה ה-0 נמצא רק פעם אחת המספר אחד, בשורה מס' 1 נמצא המספר אחד פעמיים וכו'. סופרים בתוך השורות, משמאל לימין, וגם כאן מתחילים ב-0. והנה המבנה האריתמטי של משולש פאסקאל. האיבר ה-(k+1) בשורה ה-(n+1) הוא הסכום של האיבר ה-k והאיבר ה- (k+1) בשורה ה- n. סוף סוף אני מציע סמל מתמטי; מסמנים את האיבר ה-k בשורה ה-n $\binom{n}{k}$. ובכן,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

הנה הנוסחה למקדמים הבינומיים. עכשיו נוכל גם לרשום את הנוסחה אשר אליה התכוונתם כאשר החליקה אצבעכם לאורך קו משופע:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \ldots + \binom{q}{1} = \binom{q+1}{2}$$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{q}{2} = \binom{q+1}{3}$$

וכו'

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \ldots + \binom{q}{p} = \binom{q+1}{p+1}$$

חשבו, כיצד מוכיחים את הנוסחה?!

לא הסברתי לכם את הבעיה הנ"ל כדי ללמד אתכם פרק של מתמטיקה פורמלית, אלא כדי ללוות אתכם בתהליך למידה ולהחדיר לתודעתכם את פרטיו של תהליך זה (בעת ובעונה אחת מהווה כל זה גם בשבילי תהליך למידה שאני מחדירו לתודעתי אני). הדגש הושם כאן פחות על המתמטיקה של משולש פאסקאל, ויותר על פיתוח ההבנה של משמעות המושגים פורמליזציה ואלגוריתמציה במתמטיקה. השפה המתמטית איננה המצאה שרירותית ואף לא ז'רגון המנותק מתכנו. היא מתפתחת באופן טבעי בשני שלבים של הפשטה, או, מוטב להגיד פורמלזציה. בראשונה מחסלים את ההדגמה הפרימיטיבית של שפת היום-יום המצריכה את ה"שימוש באצבע". זה נעשה על ידי החלפתה ביחסים בעלי אופי גרפי או גיאומטרי כגון "שכן" או "למעלה". לאחר מכן "מחלצים" גם את האמצעים הגרפיים ומחליפים אותם באמצעי סדר מופשטים יותר, כגון המיספור במספרים טבעיים. בהמשך מגיעים, כביכול, לשלב השלישי, בו מחליפים את שאריות השפה היום-יומית כגון "האיבר ה-k בשורה ה-n"

ו"סכום" בסמלים מתמטיים. בשלב הרביעי מחליפים את המלה "וכן הלאה" בהכנסת אות חדשה,המציינת את האיבר הכללי.בשלב החמישי שאותו לא פירטתי מחליפים את "שלוש הנקודות" בסמל הסכום. כך מתפתחת השפה המתמטית, וכך פיתחתי אותה בפניכם, ולא על ידי הגשתה לשולחן ערוך. הקורא בודאי לא התעלם מהעובדה שהערותי הנ"ל אינן מתיחסות לשפה המתמטית בלבד אלא גם לאחד מתכניה המשמעותיים; לאספקט הסידורי של המספרים הטבעיים, כלומר לפורמליזציה המתמטית של חווית זרימת הזמן. קשה למצוא תופעה העש:יה להראות כה ברור את כל פרטי הפורמליזציה כמו זו של משולש פאסקאל.

ולבסוף: מדוע אין משיבים על השאלה: " האם מכיר אתה את האיש עטוף בסדין?"
כך: "קודם כל הסר את העטיפה!" אין משיבים כך כי זה היה מקלקל את כל התענוג.
תשובה זו מראה את השיבושים היסודיים שבהוראה. אם מה שנמצא בסדין הוא מתנה והרי מותר לחשוב על חומר הלימוד כמתנה, אזי התענוג הגדול ביותר, הוא להסיר את העטיפה, לאט, בהדרגה, כדי להגביר יותר ויותר את המתח, את ההפתעה ממה שמשערים שנמצא בעטיפה. ולבסוף כאשר העטיפה הוסרה לגמרי: "אני מכיר את אבי".

כידוע אין המשל מדוייק לגמרי. לא עטפתי שום דבר, רק פתחתי את החבילה, וזה נקרא גם פיתוח!