מספר הערות אודות הפרבולה

מאת: מ. ברוקהיימר ו-י. סלומון, מכון ויצמן למדע

הקדמה

במאמר זה נתאר דרכים לשרטוט הפרבולה, (במאמר מאוחר יותר, נתאר מספר מצבים בהם היא מופיעה).

למאמר 2 חלקים, החלק הראשון מציג בניות של הפרבולה, החלק השני מביא הסברים והוכחות לבניות אלו.

מניחים שהפרבולה מוכרת ב-2 צורות:

1. גרף המשואה $y^2 = kx$ או משואות הדומות לה.
2. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות אשר מרחקן מנקודה קבועה (המוקד) שווה למרחקן מישר קבוע (המדריך).

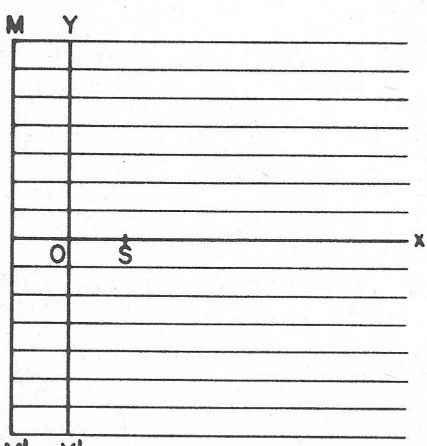
בהסברים ובהוכחות נשתדל לקשר בין הבניות והתאורים השונים לבין אחת משתי צורות ההצגה שלעיל.

בניות

1. נייר ועפרון בלבד

באופן מפתיע, ניתן "לשרטט" פרבולה על ידי עפרון וגליון של נייר שורות בלבד.

גזור את הנייר כך ששני קצותיו יהיו מאונכים לשורות הנייר. קפל את הנייר במקביל לאחד הקצוות 'MM (ראה ציור 1) התקבל הקפל 'YY.
בחר שורה OX בערך במרכז הגליון.
O היא הנקודה בה 'YY פוגע ב- OX .
סמן את הנקודה S שהיא נקודת המפגש בין 'MM לבין OX כאשר מקפלים את הנייר דרך 'YY.



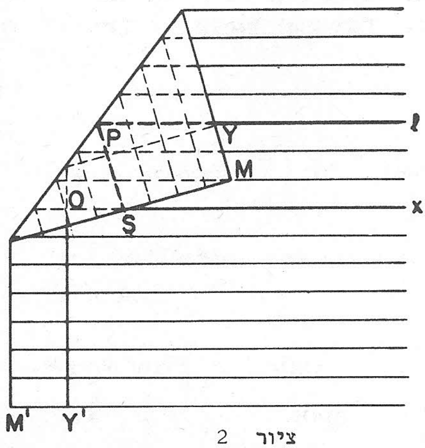
ציור 1

עתה נבנה את הפרבולה שהמדריך שלה הוא קצה הגליון 'MM, קודקודה O ומוקדה S.

בחר שורה כלשהי ℓ מעל ל- OX. קפל את גליון הנייר כך שהנקודה בה ℓ פוגעת בקצה 'MM תתלכד עם S. P היא נקודת המפגש של השורה ℓ והקפל (ראה ציור 2).

P היא נקודה על הפרבולה.

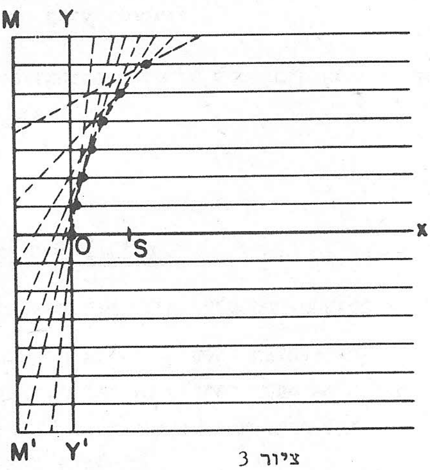
חזור על תהליך זה עבור שורות שונות מעל OX כדי לקבל נקודות רבות ככל הרצוי. כלומר, עד אשר ניתן יהיה לשרטט את החלק העליון של הפרבולה בדיוק סביר (ראה ציור 3).



ציור 2

כדי לקבל את החלק התחתון של הפרבולה קפל את הנייר ב- OX. עתה ניתן להשתמש בסיכה או בעפרון חד כדי לקבל את החצי התחתון של הפרבולה.

קל לראות מדוע מתקבלת כאן פרבולה.

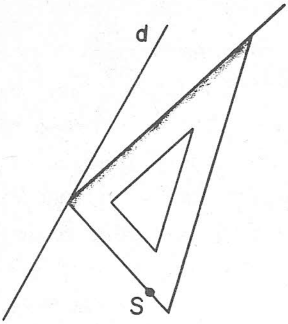


ציור 3

2. משולש ישר זוית

כאן משתמשים במשולש ישר זוית בלבד (וכמובן בעפרון).

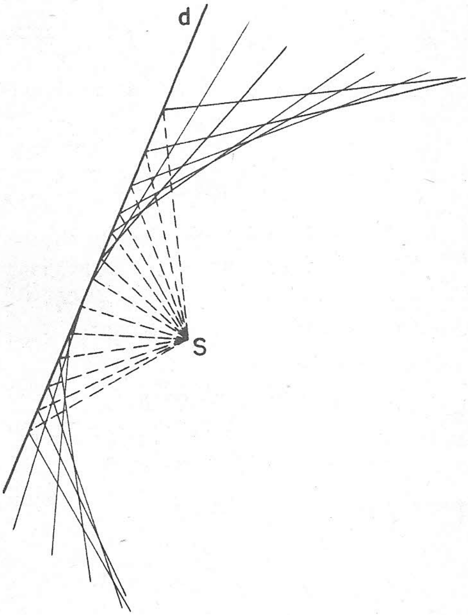
על נייר חלק שרטט ישר d.
בחר נקודה S (שמרחקה מ- d אינו גדול מהניצב הגדול של המשולש). (ראה ציור 4)
הנח את המשולש כך שקודקוד הזוית הישרה יהיה על הישר d ואחד הניצבים עובר דרך S.
שרטט ישר לאורך הניצב השני של המשולש.



ציור 4

חזור על תהליך זה עבור נקודות שונות על פני d, עד אשר "תופיע" פרבולה (ראה ציור 5).

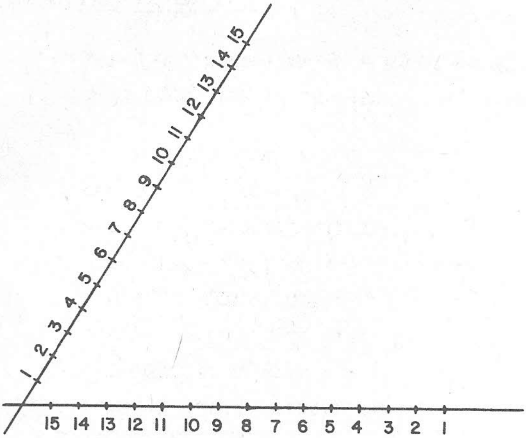
כאן, שורטטו, משיקים לפרבולה.



ציור 5

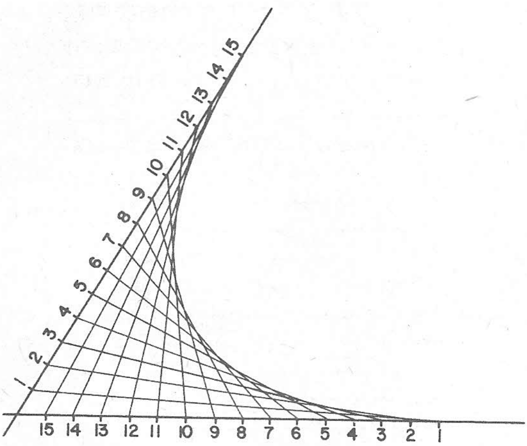
3. סרגל

על גליון נייר חלק שרטט 2 ישרים נחתכים (לאו דוקא בזוית ישרה). סמן על כל אחד מהישרים 15 נקודות במרחקים של סנטימטר אחד, החל מנקודת החיתוך. על אחד הישרים מספר את המרווחים מ-1 עד 15 ועל השני מספר את המרווחים מ-15 עד 1 (ראה ציור 6).



ציור 6

עתה חבר את הנקודות 1 עם 1 באמצעות ישר. את 2 עם 2 וכו' (ראה ציור 7).
מתקבלת פרבולה.



ציור 7

שים לב!

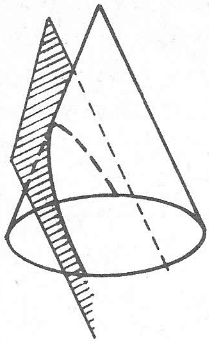
בבניות 2 ו-3 לא שורטטו נקודות על הפרבולה אלא משיקים לפרבולה. ניתן לקבל פרבולה על-ידי משיקים גם בבניה 1, כאשר הנייר הוא חלק.

במקרה זה הקפלים המתקבלים מהתלכדות נקודות שונות על 'MM עם S, הם משיקים לפרבולה.

4. חרוט

כאן הבנייה איננה כל כך פשוטה אבל היא בעלת חשיבות היסטורית: היוונים בנו בצורה זו פרבולה.

קח חרוט וחתוך אותו במישור מקביל לאחד הקוים היוצרים (ראה ציור 8). העקומה המתקבלת מחיתוך המישור והחרוט היא פרבולה.



ציור 8

מצורף לתיק גליון שממנו ניתן לגזור ולהדביק את המודל. אם לבית הספר יש סדנא ניתן לבנות חרוט מפלסטיק ולהדביק את המודל.

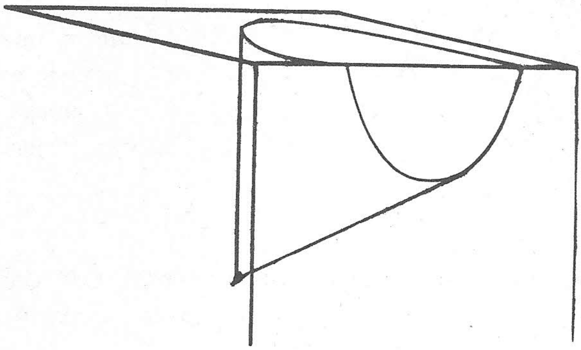
א. גזור את חצי העיגול עם המדבקות על פי הקוים החיצוניים העבים. (חיתוך א').

ב. הבא את הנקודה A לנקודה B רק ש- V יהיה קודקוד החרוט ו- VA הקו היוצר. הדבק את החרוט באמצעות המדבקה.

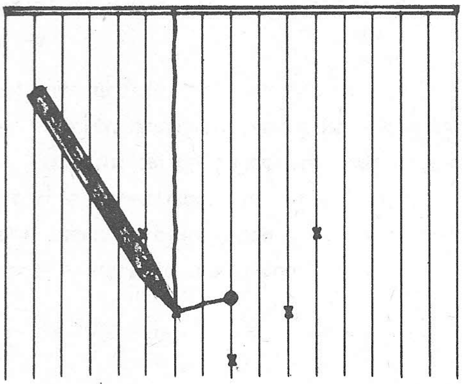
ג. עתה גזור את הקו המסומן על מעטפת החרוט. על-ידי כך קיבלת את החתך הפרבולי של החרוט. **(חיתוך ב').**

ד. כדי לבדוק שהחתך הוא באמת פרבולה ישנן שתי דרכים.
האחת: הצמד את החתך לפרבולה המשורטטת (ובדוק אם החתך מתאים בדיוק לפרבולה).
השניה: הדבק באמצעות המדבקות, את החרוט לעיגול המשורטט באופן שהנקודות C ו- D שעל בסיס החרוט יפלו על הנקודות המתאימות להן על המעגל.
גזור את המישור שעליו נמצאת הפרבולה והכנס אותו לחתך של החרוט העומד.
אם מלאת את הוראות הבניה, הפרבולה תתאים לחתך, והמישור יקביל לקו היוצר של החרוט.

ניתן להציג פרבולה גם על-ידי החזקת מקור אור נקודתי בחדר חשוך. מתקבל חרוט אור אשר יש להציבו כך שאחד הקוים היוצרים יהיה מְאוּנך לתיקרה. באופן זה הקו היוצר מקביל לקיר. הקיר ממלא את תפקיד המישור החותך את החרוט שעליו תופיע הפרבולה.



ציור 9



ציור 10

5. דגם

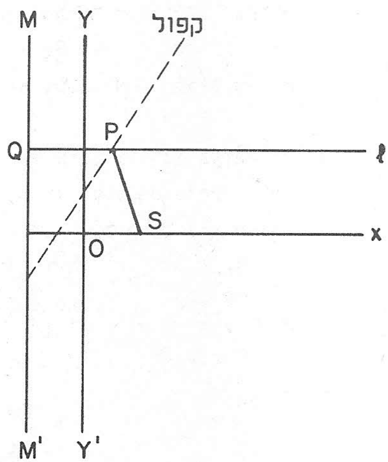
כיצד לשרטט את הפרבולה בעזרת המתקן המצורף?
קבע אורך מסוים לחוט. מתח את החוט בעזרת העפרון כך שחלק אחד של החוט יכסה חלק מאחת השורות. סמן את הנקודה שקיבלת והמשך באופן דומה בכל השורות הנותרות. הנקודות שסימנת יהוו פרבולה. אורכים שונים של החוט יתנו פרבולות שונות.
ניתן ליצור את המתקן על שקף שאפשר להקרינו לפני התלמידים דרך מטול עילי.
מורים ותלמידים בעלי יוזמה יכולים ליצור מתקנים מעניינים ומשוכללים יותר ליצירת פרבולות.

הוכחות

חלק זה דן בהוכחות לבניות השונות המופיעות בחלק הראשון. ההוכחות דורשות ידע מסוים בגיאומטריה אוקלידית, ובגיאומטריה אנליטית.

1. בנייה על-ידי נייר שורות ועפרון-בלבד

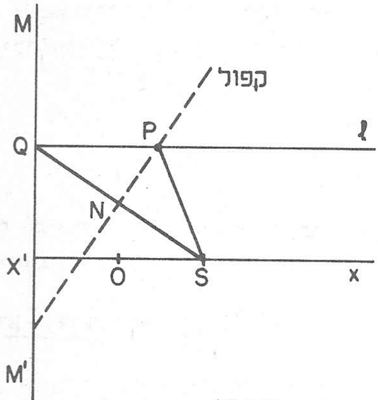
מתוך הבנייה ברור שכל נקודה P על העקומה המתקבלת בבניה זו, מקיימת כי מרחקה PQ מהמדריך 'MM שווה למרחקה PS מהמוקד S . (ראה ציור 11).



ציור 11

2. בנייה על-ידי משולש ישר זוית

נטפל בבניה זו על-ידי הצגת הקשר בינה לבין הבניה הראשונה. תחילה נראה כי הישר d המתואר בציור 4 הוא הישר 'YY בציור 11.
אחר כך נראה כי SQ והקפל שבציור 11 נפגשים בזוית ישרה על הישר 'YY .



ציור 12

כאשר מקפלים את הנייר כפי שמתואר בציור 12 הנקודות Q ו- S מתלכדות. הנקודה N היא אמצע SQ ו- PN ניצב ל- SQ .
יתר על כן, O הוא אמצע 'SX ולכן ON מקביל ל- 'MM, כלומר, ON הוא הישר 'YY (או d).
משמעות תוצאה זו היא כי הקו אותו ציירנו בעזרת המשולש הוא הקפל שקיבלנו בבניה הראשונה. נותר לנו להראות כי הקפל משיק לפרבולה.
אנו יודעים כי הנקודה P הנמצאת על הקפל נמצאת גם על הפרבולה. האם הקפל מכיל עוד נקודות הנמצאות על הפרבולה?

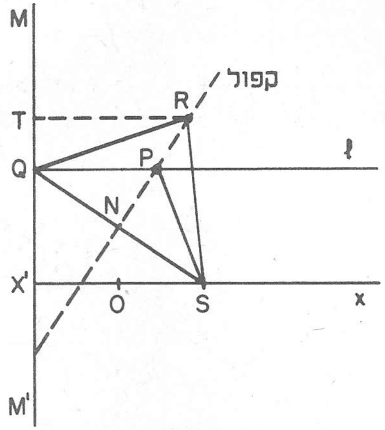
נתבונן למשל בנקודה R בציור 13

SR = RQ

אבל: RQ > RT

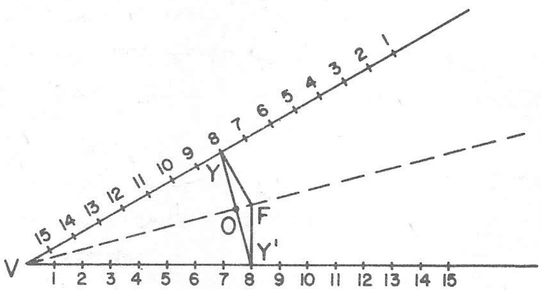
לכן: SR > RT

לכן R איננה נקודה על הפרבולה.
באופן דומה מראים כי כל נקודה R הנמצאת על הקפל (פרט ל- P) איננה נקודה על הפרבולה. לכן הקפל (או הישר המשורטט בבנייה השנייה) משיק לפרבולה.



ציור 13

3. בנייה על-ידי סרגל

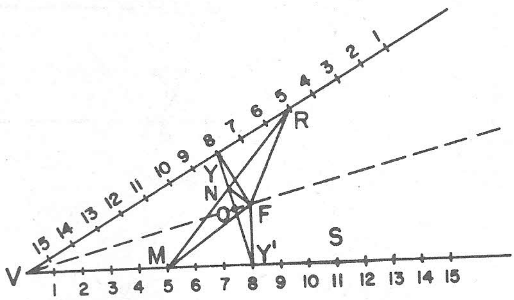


ציור 14

כאן יש להוכיח כי כל אחד מהישרים המחברים את t עם t ‏($t = 1,2...15$) משיק לפרבולה.

נתבונן בישר YY' המחבר את $t' = 8$ עם $t = 8$ וחותך את חוצה הזוית V בנקודה O (ראה ציור 14). אם אמנם פרבולה לפנינו אזי, על פי תכונות הסימטריה, יהיה YOY' משיק לפרבולה בקודקוד O ו- VO יהיה ציר הסימטריה שלה.

שרטט את הניצבים לישרים בנקודות Y ו- Y' ‏($t = 8$). תהי F נקודת הפגישה שלהם על VO. נראה שהקוים ששרטטנו בבנייה משיקים לפרבולה אשר מוקדה הוא F.



ציור 15

יהי RNM ישר כלשהו המתקבל בתהליך הבנייה. (בציור 15 זהו הקו המחבר את $t = 5$). נראה שהזוית FNR היא זוית ישרה ועל-ידי כך נקבל ש- RNM משיק לפרבולה. (ראה בניות והוכחות קודמות).

נתבונן במשולשים RFN ו- MFN

RN = NM (עיין להלן)

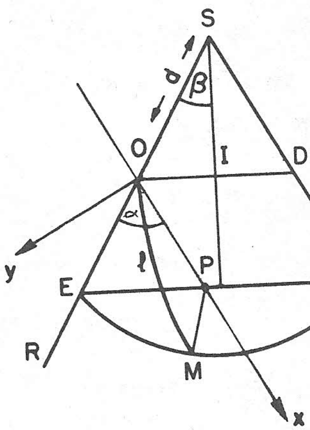
RF = FM (המשולשים $\Delta FY'M$ ו- ΔFYR חופפים)

FN צלע משותפת

לכן: $\sphericalangle RNF = \sphericalangle FNM = 90^\circ$

בכך השלמנו את ההוכחה. כדי להראות את השויון RN = NM נסמן את הנקודה t = 11 על הקרן התחתונה על-ידי S .
RS מקביל ל- YNY', ו- Y' היא נקודת האמצע של MS, לכן N היא אמצע MR .

4. חתך בחרוט



ציור 16

חתך של חרוט במישור המקביל לאחד הקוים היוצרים, חותך מהחרוט עקומה שהיא פרבולה.

יהי μ מישור המקביל לקו היוצר ST, החותך את החרוט בעקומה $M\ell O$ (נכון יותר לציין ש- μ מקביל למישור המשיק לחרוט בישר ST).
נוכיח שהעקומה $M\ell O$ היא פרבולה.
נעביר דרך קודקוד החרוט S מישור SRT מאונך ל- μ.
קו החיתוך בין המישור SRT והמישור μ הוא OX. המישור SRT הוא מישור סימטריה עבור החרוט, מכאן הישר OX יהיה ציר סימטריה עבור הפרבולה.

נסמן ב- α את הזוית שבין OX לבין הקו היוצר SR (במישור SRT), וב- β את זוית הפתיחה של החרוט. קיים: $\alpha = 2\beta$ (SI חוצה את $\measuredangle$ RST).
יהי d מרחק הנקודה O מ- S .

ניקח את OX כציר ה-x במערכת אשר בה משורטטת העקומה.
ב- O נעלה אנך OY ל- OX (במישור μ). OY יהיה ציר ה-y .

על העקומה $M\ell O$ נבחר בנקודה כלשהי M. נחפש את שעוריה של נקודה זו. לצורך זה נעביר דרך M מישור המקביל לבסיס החרוט שיחתוך את החרוט במעגל EMF, ואת הישר OX בנקודה P (ברור כי: $SE = SF$). מישור זה מאונך אף הוא למישור SRT. קו חיתוכו עם המישור μ הוא הישר MP. משום שגם מישור זה וגם המישור μ מאונכים למישור SRT קיים: $OP \perp MP$. שעורי M הם לכן:

$$x = \overline{OP} \quad , \quad y = \overline{MP}$$

משום ש- $\overline{MP}$ הוא חצי מיתר במעגל EMP קיים:

$$\overline{MP}^2 = \overline{EP} \cdot \overline{PF}$$

או:
$$y^2 = \overline{EP} \cdot \overline{PF}$$

יש למצוא את $\overline{EP}$ ואת $\overline{PF}$

במשולש EPO קיים:

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{PO}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\beta)} = \frac{\sin 2\beta}{\cos\beta} = 2\sin\beta$$

זאת אומרת:
$$\frac{\overline{EP}}{x} = 2\sin\beta$$

או:
$$\overline{EP} = x \cdot 2\sin\beta$$

נעביר דרך O ישר OD כך ש- EF מקביל ל- OD. קיים: $OI = ID$.

$$\overline{PF} = \overline{OD} = 2\overline{OI}$$ (OPFD היא מקבילית)

$$\overline{OI} = d\sin\beta$$

מכאן:
$$\overline{PF} = 2d\sin\beta$$

לכן:
$$y^2 = x \cdot 2\sin\beta \cdot 2d\sin\beta$$

$$y^2 = 4d\sin^2\beta \cdot x$$

כלומר:
$$y^2 = kx$$

וזוהי נוסחת הפרבולה.