על בעיות ופתרונן

מאת: ש. אביטל, המחלקה להכשרת מורים, הטכניון, חיפה

בתיקי שבבים מתפרסמת סדרה של בעיות אשר פתרונן ניתן בתיק העוקב. אפשר להניח שמטרת הסדרה היא לתת בידי המורה רעיונות לבעיות אותן אפשר לשלב בתוכנית הרגילה, ולעניין בהן תלמידים, כך שישמשו אמצעי הנעה לגיוון התוכנית.

כדי להשיג מטרה זו, נראה לי, כי יהיה זה מן הראוי לשפר את הגישה לכמה מן הפתרונות, בצורה שתעשיר את ערכן השימושי בכיתה. למען נוכל לראות מה צריך להיות טיב השיפור, ננתח תחילה את מהות ההבדל בין בעיה לבין חידה. נראה לי כי ההבדל הוא במידת הקשר שבין השאלה הנשאלת לבין תחומים שונים במתמטיקה. ככל שהקשר בין השאלה הנשאלת לבין שאלות אחרות מעמיק יותר, השאלה ניתנת להרחבה על-ידי תוספת, או שינוי של נתונים, היא חדלה להיות חידה והופכת לבעיה שהעיסוק בה מרחיב ומפרה את דרכי החשיבה המתמטית שלו.

ברור מאליו שאין כאן דיכוטומיה, להיפך, החידה והבעיה הן שני קצוות של רצף בהתפתחות המתמטיקה. הננו עדים לא פעם לכך, שחידה מנותקת מכל קשר נהפכת בידיים של אמן יוצר, לבעיה מעמיקה הפותחת פתח לתורה שלמה. כך למשל קרה לחידה של גשרי קניגסברג, אשר פתרונו של אוילר סלל את הדרך לפיתוח תורת הגרפים. כך גם קרה לחידת קירקמן, על תלמידות ביה"ס, כאשר נתגלה הקשר שלה לבעיית הקיום, או אי הקיום, של גיאומטריות פרויקטיביות סופיות. במסגרת זו אפשר לראות גם את בעיית הטריסקציה של זוית שהביאה, כבר ביוון הקדומה, לפיתוח תורת חתכי החרוט, ואפשר להוסיף כהנה וכהנה.

נקודה חשובה שנייה שכדאי להפנות אליה את תשומת הלב בפתרון הבעיות המופיעות בשבבים היא דרך הפתרון עצמו. מתמטיקאי המפרסם את מאמריו בעיתון מדעי כותב בשביל אנשי מקצוע המעורים היטב בנושא ומכירים את עיקר התפתחות הדברים עד למאמר זה. לפיכך משתדל הוא לתאר את פתרונו בצמצום מכסימלי, בליטוש משוכלל, שיהיה מועט המחזיק את המרובה. כמעט תמיד דרך הפתרון המתוארת במאמר איננה זו שהובילה אותו לפתרון. הדרך שהובילה לפתרון היא הרבה פעמים ניתוח צעד אחר צעד של הקשרים בין הנתונים, והתיאור הניתן במאמר הוא תוצאה של רציונליזציה וארגון מחדש, תוך מטרה להגיע למה שמכונה לפעמים "פתרון אלגנטי". כותב המאמר בטוח שהקוראים המצויים היטב

בנושא המאמר יתגברו בנקל על הסתום בגישה ה"אלגנטית" ויעריכו דווקא דרך זו*.
בבעיות המיועדות לנו, למורים, חיוני להראות בצורה ברורה את הרעיון העיקרי המוביל לפתרון, בצורה שאפשר להביאו בכיתה. כמו כן חינני לרמוז לפחות לאפשרויות של הרחבה והכללה, בדרך שתבליט את הקשר בין בעיה זאת לבין תחומים רחבים יותר של המתמטיקה.

נדגים גישה זאת בפתרון אחת הבעיות שהופיעו בתיק האחרון של <u>שבבים</u>. (שאלה מס' 4 בפתרונות שניתנו במאמר המכונה "בעיות").

איברי הסדרה $\{a_n\}$ מקיימים $a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}$

לכל... $n = 0,1,2,\ldots$, $a_0 = 0$ ויש לבדוק האומנם מקבלים a_n ערך שלם לכל n שלם?

עיון קל בבעיה מעלה את ההשערה שהמקדמים 5 ו 24 המופיעים בנתון אינם מקריים, אלא ה- 24 הוא כנראה $5^2 - 1$. ננסה לכן נוסחה מגדירה כללית:

$$a_{n+1} = ka_n + \sqrt{(k^2-1)a_n^2 + 1} \qquad \ldots \quad (1)$$

נפתור את הבעיה הכללית בעקבות הפתרון שניתן לבעיה.

בכל חקירה כזו טבעי לפשט על-ידי העלאה בריבוע.

$$(1) \Longrightarrow (a_{n+1}^2 + k^2a_n^2 - 2ka_{n+1}a_n = k^2a_n^2 - a_n^2 + 1)$$

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 = 2ka_{n+1}a_n + 1 \qquad \ldots \quad (2)$$

זה צריך להיות נכון לכל <u>$n \geq 0$ שלם</u>. לפיכך בשביל $n \geq 1$ נוכל להציב $n-1$ במקום n ונקבל:

$$a_n^2 + a_{n-1}^2 = 2ka_na_{n-1} + 1 \qquad \ldots \quad (3)$$

מהמשוואות (2) ו (3) נובע כי:

$$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 = 2ka_n(a_{n+1} - a_{n-1})$$

---

* אומנם גם עבור קוראים כאלה לא תמיד כן הוא הדבר. אמר פעם מתמטיקאי מן המובחרים, שבכל פעם שפואנקרה(Poincaré) אומר במאמר évidemment זיעה קרה מכסה אותו, כי ייקח לו שעות להבין מדוע זה "מובן מאליו".

בהנחה: $a_{n-1} \neq a_{n+1}$ נוכל לצמצם ב- $(a_{n+1} - a_{n-1})$ ונקבל:

$$a_{n+1} = 2ka_n - a_{n-1}$$

אנו רואים איפוא כי מהתנאי: $a_{n+1} \neq a_{n-1}$

נובע כי a_n הוא מספר שלם לכל n , והמקרה $k = 5$ הוא פרטי בלבד.

חקירה פשוטה תגלה את הדברים הבאים:

המקרה $k = \frac{1}{2}$ מוביל לסדרה מחזורית שאורך המחזור שלה 6;

המקרה $k = 1$ מוביל לסדרה אריתמטית;

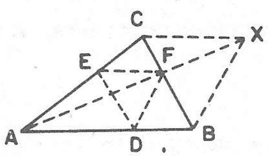
המקרה $k = 1\frac{1}{2}$ מוביל לסדרה שיש לה קשר מעניין עם סדרת פיבונצי, וכו׳.

חבל לכן שלא נרמז לקוראים רמז כלשהו על מהות התוצאה, שהיא לאין ערוך יותר עשירה באפשרויות הרחבה, מאשר המקרה הפרטי של הבעיה הנתונה.

נדגים עתה את דברינו בדוגמה ממאמר אחר שאף הוא מופיע בתיק מס׳ 3 של שבבים. הפעם מדובר במאמר בשם "המשולש הנצחי" של ברינט ואוסטין (Bryant and Austin). המאמר עוסק בבעיה: כיצד לחסום משולש שווה צלעות בתוך משולש ABC נתון.

במאמר נתונים חמישה פתרונות לבעיה. בכולם מופיע הפתרון deus ex machina אומנם כל הפתרונות מנומקים וניתן רמז להוכחת נכונותם. אולם היינו מרוויחים הרבה אילו ניתן רמז – מה יכול להיות הרעיון המכוון את גילוי דרך הפתרון. במיוחד בולט הדבר בפתרון מס׳ 4 שהרעיון המונח ביסוד שלו הוא מתיחה או כיווץ הומותיטי. המשולש DEF המבוקש הוא פשוט העתק הומותיטי של המשולש שווה הצלעות BCX .

בדרך זאת היה הפתרון מתקשר לרעיון היסודי של גישה לגיאומטריה של ביה"ס באמצעות טרנספורמציות של המישור.



ציור 1

היה רצוי גם כי המתרגם יציע דרך פתרון נוספת, אשר גם היא מבוססת על טרנספורמציה של המישור.

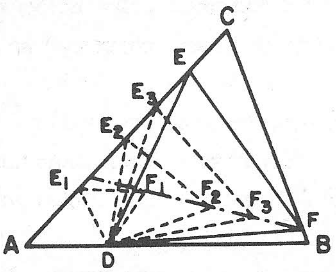
נבחר נקודה D על הצלע AB, כקודקוד אחד של המשולש. זו צריכה להיות "נקודה טובה" לפי המדובר במאמר. עתה נניח שניחשנו את מקומו של קודקוד שני E_1, על הצלע AC. ניחוש זה קובע את מקומו של הקודקוד השלישי F_1.

ע"י שינוי מקומה של E_1 ל- E_2, E_3 וכו׳, מתקבלת ההשערה ההסתכלותית כי כל הנקודות F_i ערוכות על ישר אחד!

ואומנם ישר זה הוא תמונה של הישר, שעליו נמצאת הצלע AC, בסיבוב ב- 60° מסביב לנקודה D כמרכז!

נקודת החיתוך של הישר המסובב עם BC נותנת את הפתרון.

בדרך זאת אפשר לפתור הרבה מאוד בעיות בנייה מן הסוג הניתן במאמר. בהדרכה מתאימה, בגישה האינדוקטיבית, יכולים גם תלמידים חלשים להגיע לניסוח ההשערה ואף להוכחה.



ציור 2