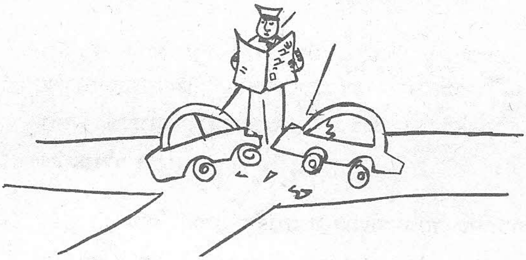


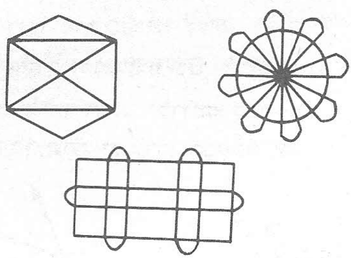
הקץ להצטלבויות דרכים

מאת: ו.ו. וילסון (W. W. Willson)

במשיכת קולמוס אחת

נצייר ציור מישורי במשיכת קולמוס אחת. נתחיל בנקודה A ונחזור אליה. ברור שציור זה יהיה קשיר*. מספר הקוים הנפגשים בנקודה B (השונה מ-A) חייב להיות זוגי, כי כאשר נגיע לנקודה B יהיה עלינו גם לעזבה. גם מספר הקוים הנפגשים בנקודה A, בנוסף לקו ההתחלה והסיום, חייב להיות זוגי. מכאן - מספר הקוים הנפגשים בכל נקודה בציור חייב להיות זוגי.

היפוכו של משפט זה נכון אף הוא, כלומר, ניתן לצייר במשיכת קולמוס אחת, (המתחילה ומסתיימת באותה נקודה), כל ציור מישורי קשיר אשר בכל נקודה שבו נפגשים מספר זוגי של קוים. משפט זה קשה יותר להוכחה מאשר המשפט המקורי. לא נוכיח אותו כאן ונפנה את הקורא לספרות. (עיין ברשימת הספרים בסוף המאמר). הקורא לא יתקשה לבדוק שציורים מהסוג הבא ניתן לצייר במשיכת קולמוס אחת.



ציור 1

להלן נניח איפוא את המשפט:

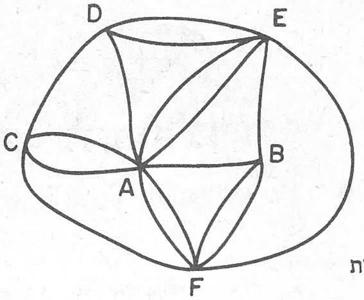
ניתן להפוך מערכת דרכים מישורית קשירה למערכת חד-סיטרית לחלוטין, באופן בו אפשר להגיע מכל נקודה בעיר לכל נקודה אחרת, אם ורק אם מספר הרחובות הנפגשים בכל צומת הוא זוגי. לתכנית עירונית כזאת נקרא מערכת חד-סיטרית מושלמת.

W.W. Willson, "How to abolish cross-roads", Mathematics Teaching No. 42, Spring 1968, pp. 56-59. Used by permission.

*ציור קשיר הוא ציור שבו אפשר להגיע מכל נקודה אל כל נקודה.

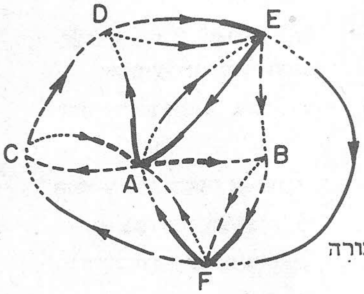
הקטנת מספר ההצטלבויות

נניח כי קיימת בעיר מערכת חד-סיטרית מושלמת בה נקודות מסויימות בהן מצטלבים שני זרמי תנועה או יותר. נתבונן לדוגמא בציור 2 (שנלקח ממאמר של אוילר (1)).



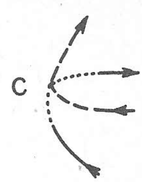
ציור 2

אפשרות אחת להפוך תוכנית זו למערכת חד-סיטרית מושלמת היא בדרך הבאה (ציור 3). (הקוים השונים מציינים את האופן בו עליך לנוע בצמתים: עליך לעזוב כל צומת באותו סוג קו שבו הגעת בו, ראה השרטוט). ברוב הצמתים מצטלבים כיווני התנועה האחד עם השני. רק בנקודה D אין הפרעה כזו. כיצד ניתן לשפר מצב עניינים זה כך שכיווני התנועה לא יצטלבו?

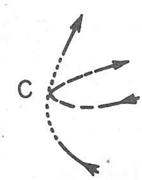


ציור 3

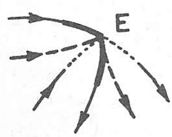
בנקודה C (למשל) מצטלבות הדרכים כמו בציור 4.
אנו יכולים לשנות את סוגי הקווים מבלי לשנות את כיווני החיצים בצורה המתוארת בציור 5.
ברור שכל נקודה בה נפגשות ארבע דרכים, או שהיא דומה לנקודה D או שאפשר לעשותה כזאת. ראה ציור 5.
כעת נתבונן בצומת כמו E אשר בה נפגשות שש דרכים (ציור 6):
נחפש כאן דרך כניסה הסמוכה לדרך יציאה (לדוגמא הכניסה המסומנת ------- והיציאה המסומנת ——→)
ונשנה את סימון דרך היציאה כך שתתאים לדרך הכניסה (ציור 7).



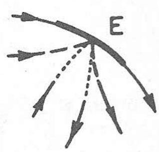
ציור 4



ציור 5



ציור 6

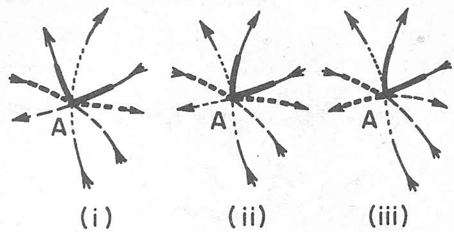


ציור 7

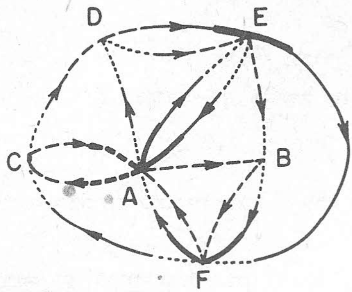
ע"י כך "הפרדנו" צמד דרכים, נותרו ארבע דרכים ושתי אפשרויות: א. הדרכים כמו במקרה האחרון. ב. הן מצטלבות וניתן להפרידן כמו בדוגמא הקודמת.

עתה צריך להיות כבר ברור כי אפשר לטפל באופן דומה בכל צומת, ויהיה מספר הדרכים הנפגשות בו אשר יהיה. מאחר שבכל צומת קיימות דרכי כניסה ודרכי יציאה במספר שווה, נוכל תמיד למצוא דרך כניסה ודרך יציאה הסמוכות זו לזו. ניתן לסמן צמד זה ע"י אותו סימון ובכך להורידו מן הדיון ואז נשאר צומת, בו מספר הדרכים קטן בשניים. אפשר להמשיך בתהליך עד למצב בו לא ישארו הצטלבויות. בצומת בו נפגשות $2n$ דרכים יש לחזור על התהליך $n-1$ פעמים לכל היותר.

לדוגמא, הנה סדרה אפשרית של הפרדת דרכים המבטלת את ההצטלבויות בצומת A (ציור 8):
אם נמשיך בדרך זו בכל הצמתים ניצור מערכת חד-סיטרית ללא הצטלבויות כלל (ציור 9).



ציור 8

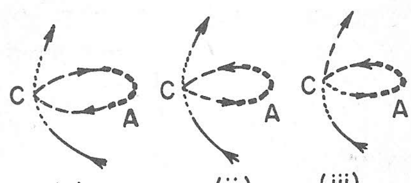


ציור 9

חיבור המעגלים מחדש

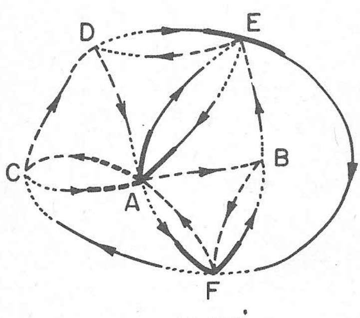
עלינו לתת לבנו לכך כי בשעה שביטלנו הצטלבויות, עשינו זאת במחיר "ניתוק המערכת". המערכת כבר איננה מושלמת משום שהיא מורכבת מחמישה מסלולים סגורים נפרדים, ואין אפשרות להגיע מן האחד אל השני. מצב זה אינו רצוי! למרבית המזל, אפשר להתגבר על תופעה זו בעזרת שינויים נוספים.

נבחר מסלול סגור, לדוגמא CDEF. נתבונן עתה במסלול שיש לו נקודה משותפת עמו, לדוגמא CA. (חייב להיות לפחות מסלול אחד כזה משום שמלכתחילה היה הציור קשיר.) במקרה זה, התנועה נעה דרך הנקודה C באותו כיוון בשני המסלולים. נהפוך את כיוון התנועה של אחד מהם, נאמר CA. עתה אפשר לשנות את סימון הדרכים ב-C כך ששני המסלולים יתחברו מבלי ליצור הצטלבות כלשהי. שלושת השלבים מוצגים כאן (ציור 10).

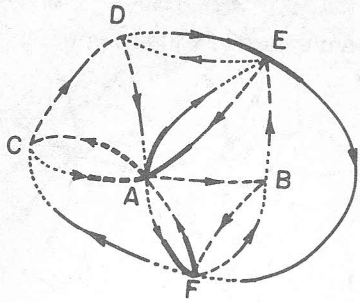


ציור 10

עתה נבחר מסלול סגור אחר, DEBFA, ונצרפו למערכת הקיימת בנקודה המשותפת שלהם D באותו אופן שבו צרפנו את המסלול הסגור הראשון. גם כאן עלינו לשנות תחילה את כיווני המסלול (ציור 11).



ציור 11



ציור 12

בכל שלב יתכן שכיווני הנסיעה של שני מסלולים העוברים בנקודת ההתחברות מנוגדים האחד לשני. במקרה זה אין צורך לשנות את כיווני הנסיעה כלל. כך ניתן כעת לצרף את המסלול AE למסלול העיקרי בנקודה E ואחר לצרף את המסלול ABF בנקודה F , ולקבל את התמונה המושלמת (ציור 12):

קיבלנו מערכת חד-סיטרית מושלמת ללא הצטלבויות.

רחובות דו-סיטריים

עד עתה היה הדיון מוגבל לציורים חד-כיוונים, כלומר לתוכניות עירוניות שאפשר לעשותן חד-סיטריות לחלוטין. כפי שהראינו לעיל אם יש בתוכנית נקודות בהן נפגשות דרכים במספר אי-זוגי חד-סיטריות הינה בלתי-אפשרית. למרות זאת יש לבעיה זו פתרון פשוט: להרשות תנועה דו-סיטרית בכמה מן הדרכים. אם קיים צומת אי-זוגי (היינו צומת בו נפגשות דרכים במספר אי-זוגי) חייב להיות צומת אי-זוגי אחר במקום אחר בתוכנית. הסיבה לכך היא כי המקומות היחידים בהם יתכן צומת אי-זוגי הם נקודת ההתחלה או נקודת הסיום של משיכת הקולמוס כאשר משרטטים את התוכנית על הנייר. **לא יתכן סיום ללא התחלה או התחלה ללא סיום.**

עתה נמצא דרך המחברת את שני הצמתים האי-זוגיים ונרשה בה תנועה דו-סיטרית או לפחות דו-מסלולית. למעשה הוספנו בכך דרך נוספת ביניהן וכך הפכנו את שני הצמתים לזוגיים מבלי לפגוע בזוגיות של אף צומת אחר הנמצא בדרך. בשיטה זו אפשר להפוך את כל הצמתים לזוגיים ולטפל במערכת שתתקבל בצורה שתארנו. בכך ביססנו תוצאה כללית ומפתיעה: אם מערכת הדרכים של עיר היא מישורית וקשירה, אזי ניתן לארגן אותה כך שיבוטלו בה כל ההצטלבויות.

References

(1) L. Euler, "The Seven Bridges of Konigsberg" (1736), reprinted in Newman, The World of Mathematics, Vol. 1, p. 573 George Allen & Unwin, 1960.

(2) O. Ore, Graphs and their Uses. p. 25 Random House, 1963.

(3) C. Berge, The Theory of Graphs and its Applications (tr. A. Doig), p. 165 Methuen & Co., 1962.