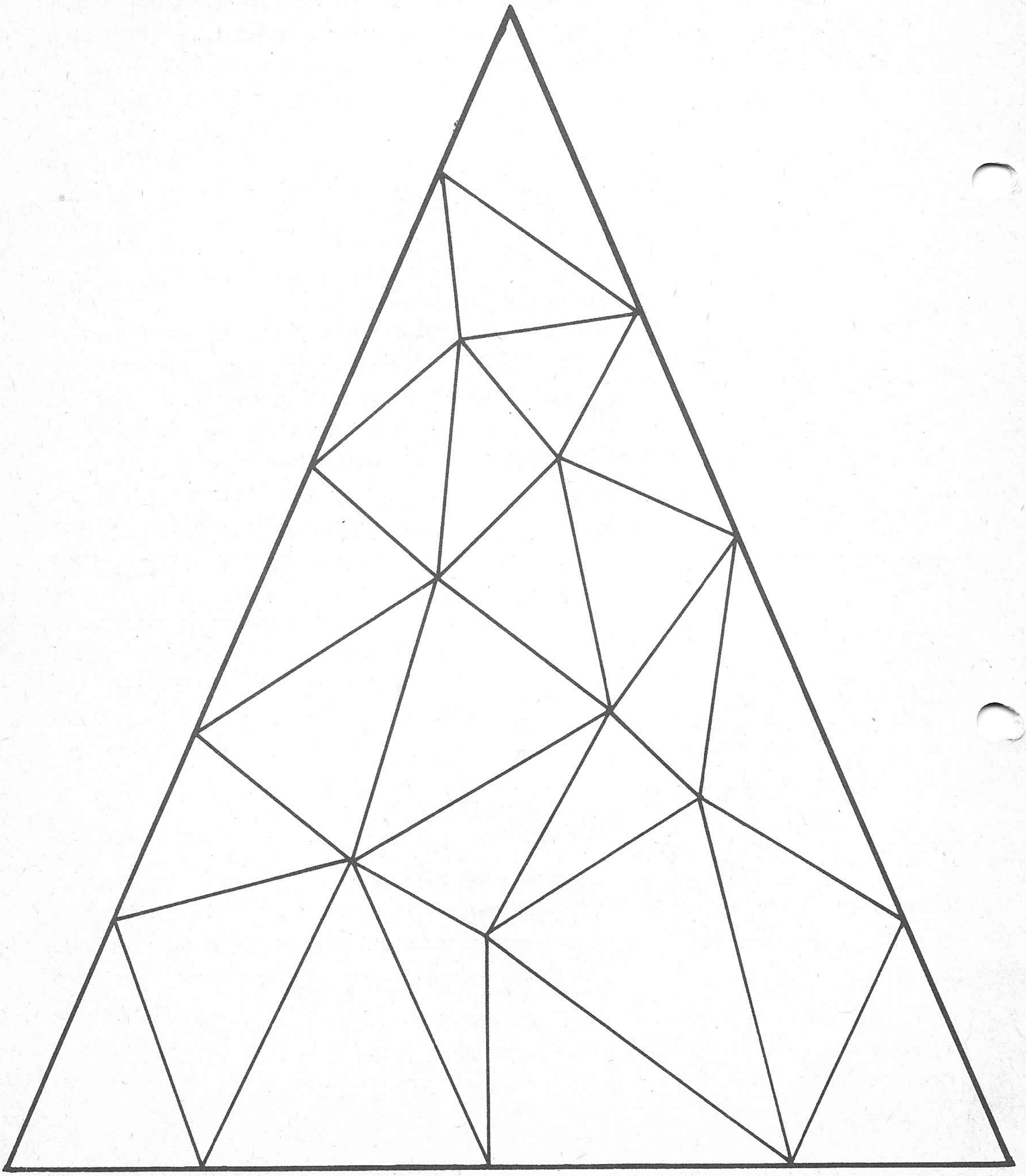
הלמה של שפרנר

מאת: עמוס אלטשולר, אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

שבבים-עלון מורי מתמטיקה תיק מס' 4



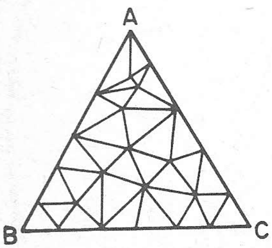
למה (Lemma) הינה "משפט קטן", או משפט עזר. משפט המכונה כך אינו בהכרח "קטן" מבחינת איכותו וחשיבותו. אדרבא, יש משפטים כבדי משקל במתמטיקה אשר משום מה דבק בהם השם למה. דוגמא בולטת של תופעה זו היא הלמה של שפרנר (Sperner) המשמשת נושא לדיוננו זה.

הלמה של שפרנר היא אחד המשפטים היפים במתמטיקה (אך זה כבר כמובן ענין של טעם...). וזאת משום שטענתה פשוטה ומעניינת, אפשר לנסחה ולהבינה בעזרת משחק שגם ילד בן 7 יבינו וימצא בו ענין, את הוכחתה לא קל למצוא לבד, אך היא מפתיעה בפשטותה, ושמושיה כבדי משקל.

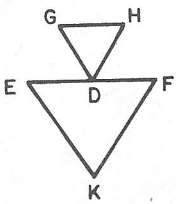
לא ניתן ללמה זו ניסוח פורמלי ומדויק, אלא נציגנה בעזרת משחק. אנו מציעים לקורא להכין את לוח המשחק, (לשם כך יש להצטייד בגליון ניר, עט ושלשה צבעים), ולשחק בו, לפחות באחת משתי הגירסאות אשר נתאר, עוד לפני שהוא ניגש לעצם טענת הלמה ולהוכחתה.

לוח המשחק

מציירים משולש ABC, ומחלקים אותו למשולשים קטנים על-ידי הוספת קודקודים וצלעות.
הקודקודים החדשים רשאים להיות הן על הצלעות של המשולש ABC והן בתוכו, אך כמובן לא מחוצה לו. הדרישה היחידה היא שכל קודקוד אכן יהיה קודקוד בכל משולש בו הוא נוגע, ולא יהיה קודקוד עבור משולש אחד - וסתם נקודה בתוך צלע עבור משולש אחר. כלומר, אסור המצב המתואר בציור א',
שם D קודקוד של המשולש DGH אך אינו קודקוד במשולש EFK (ולכן EDFK הוא למעשה מרובע.
אפשר לתקן זאת על-ידי הוספת צלע DK).
פרט לכך אין כל הגבלות, ואנו עשויים להגיע למשל למצב אשר בציור ב'.



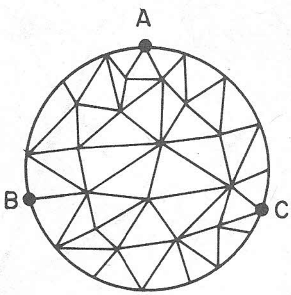
ציור ב'



ציור א'

עתה נצבע את הקודקודים A, B, C בשלושה צבעים שונים.
למשל: A - אדום, B - ירוק, C - כחול. לוח המשחק מוכן.

נעיר עוד, כי הצלעות אינן חייבות להיות דוקא ישרות, אף לא צלעות המשולש ABC. אדרבא, צורה נעימה יותר לעין תתקבל אם נצייר את לוח המשחק כמעגל המחולק ל"משולשים", אשר בו שלוש הנקודות A, B, C הן קודקודים שעל שפת המעגל, כבציור ג'.



ציור ג'

תאור המשחק

גירסה א': משחק ליחיד.

השחקן צובע את כל הקודקודים אשר בלוח המשחק בעזרת שלושת הצבעים אדום, ירוק, וכחול, כל קודקוד בצבע אחד. הצביעה שרירותית, פרט למגבלה אחת: קודקודים הנמצאים על הצלע AB (של המשולש המקורי) אסור שייצבעו בצבע של C (בדוגמא שלנו - כחול), הקודקודים שעל BC לא ייצבעו באדום (הצבע של A), ואלו שעל AC לא ייצבעו בירוק (הצבע של B). (או בניסוח חיובי: הקודקודים שעל כל צלע ייצבעו רק בצבעי הקודקודים שבקצות אותה צלע.) אין כל הגבלה בצביעת הקודקודים שבתוך המשולש ABC (כמובן, יש להשתמש רק בשלושת הצבעים שלנו, אך אין כלל הכרח להשתמש בכל השלושה).

המטרה: להגיע לידי כך שלא יהיה אף משולש שקודקודיו צבועים בכל שלושת הצבעים. לשם קיצור נקרא לצלע אשר שני קצותיה נצבעו בשני צבעים שונים "צלע יפה", ולמשולש אשר כל צלעותיו "יפות" נקרא "משולש יפה". ברור כי תנאי הכרחי ומספיק שמשולש יהיה יפה הוא ששלושת קודקודיו נצבעו בשלושת הצבעים השונים.

מטרת המשחק היא להגיע לידי כך שכל הקודקודים יהיו צבועים לפי הכללים, ולא יהיה אף משולש יפה.

גירסה ב': משחק לשניים

כל שחקן בתורו צובע קודקוד אחד. השחקן אשר אגב צביעת קודקוד יצר משולשים יפים, זוקף אותם לחובתו, וצובר נקודות שליליות כמספר המשולשים היפים אשר יצר. מנצח השחקן אשר בסוף המשחק רשומים לחובתו <u>פחות</u> משולשים יפים, ואילו זה שצבר יותר משולשים יפים - הפסיד.

הרקע למשחקים האלה היא הלמה הבאה:

<u>הלמה של שפרנר: מספר המשולשים היפים הוא אי-זוגי</u>

לפי זה, מאחר ש-0 הוא מספר זוגי, הרי שבגירסה א' של המשחק אי אפשר כלל להגיע למטרה הנכספת, כי יהיה תמיד לפחות משולש יפה אחד! זוהי מסקנה אשר לרבים קשה לעכלה גם אחרי קריאת הוכחת הטענה, ורבים הם שיהיו מוכנים שוב ושוב לנסות לבצע את הבלתי אפשרי! התוצאה המכסימלית אליה יכול השחקן הבודד להגיע היא משולש יפה אחד בלבד, וקל מאוד להגיע לכך. (למשל באופן הבא: נצבע כל קודקוד שעל הצלע AB, פרט ל-B עצמו, באדום (שהוא צבעו של A) וכל קודקוד שאינו על הצלע AB בכחול (צבעו של C)). הלמה של שפרנר מאבדת בגירסה זו של המשחק, את טעמה.

המסקנה הנובעת מן הלמה של שפרנר לגירסה ב' של המשחק, היא שאי אפשר להגיע לתיקו. אחד מן השניים ינצח תמיד, והפרש הנקודות יהיה מספר אי-זוגי. כאן אין המשחק מאבד את טעמו, אדרבא - הוא נעשה מעניין יותר ככל שמרבים לשחק בו, כיון שכל שחקן משתדל לא רק להימנע מיצירת משולשים יפים, אלא גם להכריח את יריבו ליצרם!

הוכחות

ניתן ללמה של שפרנר שתי הוכחות, אשר במבט שטחי היבן דומות למדי זו לזו, אך יש ביניהן הבדל עקרוני חשוב, המתבלט דוקא על רקע הדמיון הפורמלי שביניהן.

הוכחה א'

לכל צלע שבלוח המשחק ניחס משקל. משקל הצלע יהיה 0 אם שני קודקודיה צבועים באותו צבע. המשקל יהיה 1 אם שני הקודקודים צבועים בצבעים שונים (דהיינו המשקל הוא 1 אך ורק כאשר הצלע "יפה"). גם לכל משולש ניחס משקל, ומשקל זה יהיה סכום המשקלות של צלעות המשולש. משקל המשולש יסומן ב- $\omega(\Delta)$. ברור איפוא ש- $0 \leq \omega(\Delta) \leq 3$. נבדוק ביתר פרטות את כל האפשרויות:

אם כל קודקודי המשולש Δ צבועים באותו צבע, אז משקל כל צלע ב-Δ הוא 0 ולכן $\omega(\Delta) = 0$.

אם שני קודקודים צבועים באותו צבע והקודקוד השלישי בצבע אחר, אז יש שתי צלעות יפות וצלע אחת בעלת המשקל 0, ולכן $\omega(\Delta) = 2$.

אם שלושת הקודקודים צבועים בשלושה צבעים שונים, אז משקל כל צלע הוא 1, ולכן $\omega(\Delta) = 3$.

אנו רואים איפוא כי לא יתכן $\omega(\Delta) = 1$. אך מה שיותר חשוב לענינו היא המסקנה: $\omega(\Delta)$ אי זוגי אם ורק אם Δ הוא משולש יפה.

לכן, כדי להוכיח את הלמה של שפרנר, די להוכיח כי סכום המשקלות של כל המשולשים הוא מספר אי זוגי, כלומר, אילו היה סכום המשקלות של כל המשולשים (נסמן סכום זה ב- $\Sigma\omega(\Delta)$) מספר זוגי, עדיין לא היה זה מונע את קיומם של משולשים יפים, וגם לא היה מוכיח את קיומם. זה היה גורר רק שמספר המשולשים היפים הוא זוגי (וגם 0 הוא מספר זוגי). אך אם $\Sigma\omega(\Delta)$ הוא אי זוגי, אז בהכרח מספר המשולשים היפים הוא אי זוגי, ובפרט נובע מזה שיש לפחות משולש יפה אחד.

עתה, $\Sigma\omega(\Delta)$, שהוא סכום המשקלות של כל המשולשים, שווה לסכום המשקלות של כל הצלעות של כל המשולשים, כלומר לסכום המשקלות של כל הצלעות אשר בלוח המשחק, כאשר כל צלע פנימית - כלומר צלע שאינה על אחת הצלעות AB, BC, AC - נספרת פעמיים, שכן היא שייכת לשני משולשים, וכל צלע חיצונית - כלומר צלע הנמצאת על היקף המשולש ABC - נספרת פעם אחת, שכן היא שיכת רק למשולש אחד.

נסמן ב- ε את סכום המשקלות של הצלעות הפנימיות, וב- $\omega(A\text{-}B)$ ($\omega(B\text{-}C)$, $\omega(C\text{-}A)$) את סכום המשקלות של הצלעות אשר על הצלע AB (ובהתאמה: BC, CA) של המשולש הגדול, ואז:

$$\Sigma\omega(\Delta) = 2\varepsilon + \omega(A\text{-}B) + \omega(B\text{-}C) + \omega(C\text{-}A)$$

ולכן, כדי להראות ש-$\Sigma\omega(\Delta)$ אי זוגי, די להראות כי $\omega(A-B) + \omega(B-C) + \omega(C-A)$ אי זוגי, ולשם כך די להראות כי כל אחד משלושה מחוברים אלה הוא אי זוגי.

נתבונן איפוא ב-$\omega(A-B)$. זהו סכום המשקלות של הצלעות אשר על הצלע AB של המשולש הגדול. נתחיל להתקדם על צלע זו, החל מ-A, לכיוון B. A אדום. אם הקודקוד הראשון שנפגוש אף הוא אדום, משקל הצלע שעברנו עליה הוא 0. אם הוא ירוק, משקל הצלע הוא 1. נניח שהוא אדום, ונמשיך להתקדם, כל זמן שאנו פוגשים קודקודים אדומים בלבד, משקלות הצלעות הם 0. המשקל יהיה 1 רק כאשר לראשונה ישתנה הצבע ויהיה ירוק. מעתה, כל זמן שאנו פוגשים קודקודים ירוקים בלבד, יהיו המשקלות 0, עד אשר לראשונה נפגוש קודקוד אדום, ואז משקל הצלע המתאימה יהיה 1.

כלומר: $\omega(A-B)$ שווה למספר חילופי הצבעים במעבר מ- A ל- B. אך מאחר שאנו מתחילים באדום ומסיימים בירוק, ובדרכנו פוגשים קודקודים ירוקים ואדומים בלבד, ברור שמספר חילופי הצבעים הוא אי זוגי, ולכן $\omega(A-B)$ הוא אי זוגי.

אותה הוכחה פועלת גם עבור $\omega(B-C)$ ו- $\omega(C-A)$ וסיימנו.

הוכחה ב'

לצורך הוכחה זו, נשתמש במספרים במקום בצבעים. דהיינו: במקום "צבע אדום" נאמר צבע מס' 1, הירוק הוא צבע מס' 2, והכחול - 3. צלע נקראת "טובה" אם קודקוד אחד שלה צבוע במספר 1 והקודקוד השני צבוע במספר 2. לכל משולש Δ נייחס משקל $\omega(\Delta)$, שונה מאשר בהוכחה א': $\omega(\Delta)$ הוא מספר הצלעות הטובות במשולש Δ.

ברור כי: $\omega(\Delta) \leq 2$, ונבדוק את האפשרויות:

אם $\omega(\Delta) = 0$ אז צבע מס' 1, או צבע מס' 2 (או שניהם) איננו ב-Δ כלל.

אם $\omega(\Delta) = 1$ אז אחד מקודקודי Δ צבוע ב-1, השני ב-2 והשלישי ב-3, כלומר Δ משולש יפה.

אם $\omega(\Delta) = 2$ אז צבע מס' 3 איננו מופיע כלל ב- Δ.

כלומר, $\omega(\Delta)$ אי זוגי אם ורק אם המשולש Δ הינו יפה.

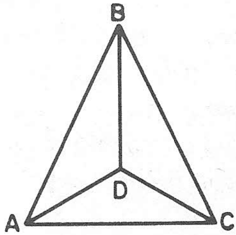
לכן, בדיוק כמו בהוכחה א', די להראות כי $\Sigma\omega(\Delta)$, סכום המשקלות של כל המשולשים, הוא אי זוגי.

אך שוב, בדומה להוכחה א', $\Sigma\omega(\Delta) = 2\alpha + \beta$ כאשר α הוא מספר הצלעות הטובות הפנימיות במשולש ABC (וכל צלע טובה כזו נספרת פעמיים, שכן היא שייכת לשני משולשים) ו- β הוא מספר הצלעות הטובות שעל שפת המשולש ABC. אך כל הצלעות הטובות שעל שפת המשולש ABC נמצאות על הצלע AB, ומספר הצלעות הטובות שעל הצלע AB שווה למספר חילופי הצבעים שם במעבר מ- A ל- B לאורך הצלע, וכבר ראינו בהוכחה א' כי מספר זה הוא אי זוגי וסיימנו.

ההבדל בין שתי ההוכחות

על מנת להבין את ההבדל שבין שתי ההוכחות, ננסח את הלמה של שפרנר עבור מקרה אחר, תלת-ממדי, וננסה להוכיחה. כאן במקום המשולש ABC תבוא פירמידה משולשת ABCD (ציור ד׳) וקודקודיה נצבעים בצבעים 1, 2, 3, 4.

מחלקים את הפירמידה ABCD לפירמידות קטנות במספר שרירותי ע״י הוספת קודקודים, צלעות ומשולשים.
קודקודים חדשים יכולים להיות על הצלעות AB, BC,...
על הפאות ABC, ABD, ... ובתוך הפירמידה ABCD.
על-ידי כך מתחלקת כל פאה של הפירמידה ABCD למשולשים, בדומה למצב בגירסה הראשונה של הלמה של שפרנר.



ציור ד׳

את כל הקודקודים (פרט ל- A, B, C, D, שהם כבר צבועים) צובעים עתה בצבעים 1, 2, 3, 4 באופן כמעט שרירותי. המגבלה היחידה היא שהקודקודים אשר על הפאה BCD לא ייצבעו בצבע מס׳ 1 (הצבע של A), ובדומה לכך לגבי יתר הפאות.

הקודקודים שעל הצלע AB לא ייצבעו בצבעים 3 ו-4 (הצבעים של C, D), וכן לגבי יתר הצלעות של הפירמידה ABCD. או בניסוח חיובי: כל קודקוד רשאי להיצבע רק באחד מצבעי קודקודי האלמנט הקטן ביותר בו הוא נמצא (צלע, פאה, או פירמידה).
פירמידה תיקרא "יפה" אם ארבעת קודקודיה צבועים בכל ארבעת הצבעים. טענת הלמה של שפרנר במקרה זה היא שבכל צביעה כנ״ל, מספר הפירמידות היפות הוא אי זוגי (ולכן לפחות 1).
טענה זו נכונה. באופן טבעי, היינו רוצים להוכיחה כפי שהוכחנו את הלמה במקרה הדו-ממדי. והנה מתברר, כי את הוכחה א׳ אי אפשר להתאים למקרה זה, ואילו ההוכחה ב׳ פועלת כאן היטב, וכמעט ללא שינויים, כדלקמן:

משולש ייקרא "טוב" אם קודקודיו צבועים בכל שלושת הצבעים 1, 2, 3. המשקל $\omega(\pi)$ של כל פירמידה π יהיה מספר המשולשים הטובים אשר בה (הפאות). בנקל נראה כי $\omega(\pi)$ אי זוגי אם ורק אם π פירמידה יפה. לכן די להראות כי $\Sigma\omega(\pi)$, סכום המשקלות של כל הפירמידות שלנו, הוא אי זוגי.
אך $\Sigma\omega(\pi) = 2\gamma + \delta$, כאשר γ הוא מספר המשולשים הטובים <u>שבתוך</u> הפירמידה ABCD (וכל משולש כזה נספר פעמיים, בהיותו משותף לשתי פירמידות קטנות) ו- δ הוא מספר המשולשים הטובים אשר על שפת הפירמידה ABCD. כל δ המשולשים הטובים הללו נמצאים בהכרח בפאה ABC, ולפי הניסוח של המקרה הדו-ממדי של הלמה של שפרנר הם יפים שם, ולכן לפי הלמה של שפרנר במקרה הדו-ממדי, δ אי-זוגי, וסיימנו.
במלים אחרות: אפשר לבנות את הוכחה ב׳ עבור הלמה של שפרנר במקרה ה- n-ממדי, כך שלמעשה תהיה הוכחה באינדוקציה על n, כאשר n מספר טבעי כלשהו, והלמה מנוסחת באופן מתאים. הקורא שאין לו מושג על גיאומטריה ממימד גדול מ-3, יסתפק בערכים 1, 2, 3 עבור n. לעומת זאת הוכחה א׳ שלנו טובה רק למקרה הדו-ממדי, ותו לא.

תרגילים:

הקורא יוכל לבדוק את מידת הבנתו את כל הנאמר לעיל, על-ידי שינסה לפתור את התרגילים הבאים, שהם קלים ואין בהם כל התחכמויות.

תרגיל 1: נסה ליישם את הוכחה א' למקרה התלת-ממדי, וציין בדיוק באיזה שלב הנסיון נכשל.

תרגיל 2: נסח את הלמה של שפרנר למקרה החד-ממדי, והוכיחנה בעזרת וריאציה מתאימה של הוכחה ב'.
לפי זה, אפשר להתחיל את ההוכחה האינדוקטיבית עבור המקרה ה- n-ממדי של הלמה של שפרנר, כבר במקרה $n = 1$.

תרגיל 3: נדון שוב במקרה הדו-ממדי, אלא שבמקום משולש, בצא הפעם ממצולע N בעל n צלעות, אשר יחולק למשולשים. משתמשים שוב בשלושה צבעים בלבד, כאשר n הקודקודים של המצולע N כבר צבועים בשלושה צבעים אלה.
המגבלה בצביעה כאן היא, שהקודקודים החדשים אשר על כל צלע של N ייצבעו רק בצבעי שני קודקודי אותה צלע. השאלה האם טענת הלמה של שפרנר (כלומר: מספר המשולשים היפים הוא אי זוגי, או יש לפחות משולש יפה אחד) נכונה גם במקרה זה, תלויה לא רק במספר n, אלא גם באופן בו צבועים n קודקודי המצולע N .

נסה בדיוק את התנאים, בהם תהיה טענת הלמה של שפרנר נכונה במקרה זה. (לפחות עבור $n = 4, 5, 6$).

לסיום נעיר, כי בעזרת הלמה של שפרנר אפשר להוכיח משפטים כבדי משקל במתמטיקה, אשר המפורסם שבהם הוא משפט נקודת השבת של Brouwer, אולם על כך בפעם אחרת.