מחוץ לשעות קבלה

מאת: צבי שור, גמנסיה "אהל שם", רמת-גן

לעתים רחוקות בלבד תוכל לנצל שעור, הניתן מחוץ לתוכנית הקבועה ("מלוי מקום"), כשעור ללימוד החומר השוטף. בדרך כלל אין התלמידים ששים לשעור כזה. הדרך היעילה ביותר ל"העביר" שעור שלא מן המנין, ובמיוחד בכיתה ש"אינה שלך" היא להגיש נושא מחוץ לתוכנית.

נושאים מתאימים לכך יש לרוב, עליך פשוט להיות ער לעניין: בהיתקלך בבעיה, בחידה או בקוראך מאמר, שקול בין היתר אם הוא מתאים למטרה זו. אם כן, עבד אותו לשעור מסוג זה, העלהו על הכתוב, שמור אותו בתאך בביה"ס, ובהזדמנות קרובה נסה אותו בכיתה המתאימה.

בתיקי "שבבים" א' וב' מופיעים מספר מאמרים המתאימים למטרה זו. המאמרים הם:

א) "צופנים בינאריים" - לכיתה ז' תוך כדי לימוד הנושא "שיטות הבסיס", או לאחר מכן.

ב) "אכילס והצב" - לכיתות ט' - יא'.

ג) "דמוקרטיה וסטטיסטיקה" (חלקו הראשון) - לכיתות ח'-ט'.

ד) "פתרון גיאומטרי למשוואה ריבועית" - כיתה י'. לאחר פתירת משוואה ריבועית בדרך גרפית.

ה) "אלה תולדות π" חלקים שונים מתאימים לכיתות ז'-יב'.

ו) "בעיות" - ציין ליד כל בעיה (לפי פתרונה), לאיזו כיתה ותקופה היא מתאימה.

לכיתות טובות תוכל למצוא חומר רב ב"גליונות מתמטיקה".

להלן נגיש הצעה קצרה נוספת, רעיונות נוספים יובאו ב"שבבים" הבאים.

מספרים פיתגוריים

צא מהדוגמה $3^2 + 4^2 = 5^2$ ובקש "שלשות פיתגוריות" נוספות. בין התשובות תהיינה שלשות פיתגוריות בעלות גורם משותף, כלומר שלשות שהן כפולה של $3^2 + 4^2 = 5^2$.

באופן כללי קיים: $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow (na)^2 + (nb)^2 = (nc)^2$

נתעניין לכן רק ב"שלשות יסודיות" (חסרות גורם משותף).

תוכל לבחון את המקרים הבאים:

(1) האם יתכן כי רק לשניים מבין השלושה גורם משותף? - לא ייתכן! מדוע?

(2) תהי (x,y,z) שלשה פיתגורית יסודית, כלומר $x^2 + y^2 = z^2$ (I)

(א) היתכן ש-x ו-y יהיו זוגיים? - לא! מדוע?

(ב) היתכן ש- x ו- y יהיו אי-זוגיים? - לא! כי אז

$$x^2 + y^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4(m^2+n^2+m+n) + 2$$

קבלנו מספר המתחלק ב- 2 ואינו מתחלק ב- 4 ולכן בודאי אינו z^2.

נוכל להניח כי x זוגי ו- y אי-זוגי (הדגש כי יכולנו לבחור ההיפך).

(3) מ- (I) נקבל: $x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$

נסמן: $n = z - y$ $\quad m = z + y$

מכאן: $x^2 = m \cdot n\,;\ y = \frac{m-n}{2}\ ;\ z = \frac{m+n}{2}$ (II)

(4) m ו- n אי-זוגיים.

התלמידים יחקרו בעצמם.

(5) m ו- n זרים זה לזה.

(בדרך השלילה) נניח $n = kn_1$ $\quad m = km_1$

$$z = \frac{m+n}{2} = k\,\frac{m_1+n_1}{2}$$

$$y = \frac{m-n}{2} = k\,\frac{m_1-n_1}{2}$$

ל- z ול- y גורם משותף k. וזו סתירה להנחה שהשלשה (x,y,z) יסודית.

(6) סיכום: m ו-n א) אי-זוגיים ב) זרים זה לזה ג) מכפלתם ריבוע (x^2).

(7) מכאן נובע כי m ו- n כל אחד ריבוע.

$m=u^2, n=v^2$ כאשר u ו- v זרים זה לזה.

בהציבנו את u^2 ו- v^2 במקום m ו-n בשורה (II) נקבל:

$$x = u \cdot v\ ;\quad y = \frac{u^2-v^2}{2}\ ;\quad z = \frac{u^2+v^2}{2} \qquad \text{(III)}$$

התלמידים יציעו דוגמאות מספריות. תוך בחירתן הדגש כי: v,u אי-זוגיים, זרים זה לזה ו $u>v$.

האם הוכחנו לעיל, שכל הדוגמאות שנבחר (בתנאים הנזכרים) תהיינה נכונות? - לא! הוכחנו משפט הפוך: תנאי הכרחי ש (x,y,z) תהיה שלשה פיתגורית יסודית, בה x זוגי, הוא: אפשר לבטא את x, y ו- z בצורות הכתובות ב- (III) כאשר u ו- v זוג מספרים אי-זוגיים, זרים, וכן $u>v$.

בקש מהתלמידים להוכיח את המשפט ההפוך. אם לא נותר פנאי בשעור, יבצעו זאת החובבים כ"שעורי בית" (קרי בהפסקה על הלוח).