על ההנאה וההפתעה בפתרון בעיות גיאומטריות ואלגבריות

מאת: פרופ׳ ש. אביטל
המחלקה להכשרת מורים, הטכניון, חיפה

מדי פעם נשמעות בחוגים של מורים הטענות כי חשיבה מתימטית ניתנת לפיתוח בביה"ס התיכון רק באמצעות הגיאומטריה. אני משער שאלה הטוענים זאת מתכוונים לכך, שבתחום הגיאומטריה אפשר בקלות לנסח שאלות ובעיות הדורשות מעט מאוד ידע ובכל זאת דרושה העמקת מה כדי להגיע לפתרון. בהעמקה זאת קשור בדרך כלל אפקט של הפתעה ועמו רגש של הנאה המופיע כאשר הלומד מגלה פתאום את הפתרון. תופעה זאת כונתה על-ידי פסיכולוגים מסויימים בשם ה"אפקט של האהה!" מקור ההפתעה הוא על פי רוב בתופעות הבאות המלוות את הפתרון:

1. מתגלה פתאום קשר פנימי בין הנתונים, קשר שתחילה לא שמנו לב אליו. גילוי קשר זה מחיש את הפתרון.

2. מתגלה קשר בין הנתונים לבין טענה אחרת הידועה לנו היטב ממקור אחר ובגלל הקשר הזה הפתרון נעשה פתאום מיידי.

3. הידע הדרוש להבנת הבעייה, ואף לפתרונה, הוא מצומצם ורובו ככולו הוא בתחום בו אנו עסוקים ברגע זה ללא צורך באסוציאציות רחוקות.

4. הפותר את הבעיה מתרשם שיש בפתרונו משום יצירה ולא רק שימוש ישיר באלגוריתם שפותח בשבילו.

5. הפתרון הוא בדרך כלל קצר ואינו דורש שלבים רבים שאת תוצאותיהם יש לאכסן בזיכרון כדי להשתמש בהם בשלב מאוחר יותר.

נוסף לכל אלה ייתכן ודווקא חוסר התועלתיות הישירה, יחד עם המוחשיות שבציור בבעיות הגיאומטריות,היא גורם חשוב בהנאה שיש ללומד מפתרונן. כל המשווה את הבעיות הגיאומטריות עם השימוש המיפרז בבעיות "מעשיות" כביכול באלגברה, יבין למה אנו מתכוונים.

אם כי נכון הדבר שקל למצוא בגיאומטריה האויקלידית הנלמדת בבתי הספר, שאלות ובעיות הממלאות את כל הדרישות הללו אין זה נכון לאמור שאי אפשר למצוא שאלות מסוג זה גם באלגברה. נראה שלא התרגלנו בעצמנו ולפיכך אף לא הרגלנו את תלמידינו לגשת לבעיות אלגבריות בדרך שיתמלאו התנאים שהזכרנו.

נביא כאן כמה דוגמאות מתחום התוכנית המסורתית שיצביעו על כך שהדבר אפשרי גם בתחום האלגברה.

בטרם נמשיך נציין, שנשתמש במאמר זה במונחים המקובלים כיום: בנוסף למונח "משוואה" נשתמש גם במונח <u>תבנית פסוק</u>, במקום "שורשי משוואה" נדבר על <u>ערכי האמת של תבנית הפסוק</u>, ובמקום "קבוצת השורשים" נאמר <u>קבוצת האמת.</u> התחום שנתרכז בו ידון במציאת קבוצת האמת של תבניות פסוק ריבועיות.

נתבונן בשאלה הבאה:

מצא את קבוצת האמת של תבנית הפסוק

$$ax^2 + bx + c = 0$$

כאשר $a \neq 0$ אבל $a + b + c = 0$. (רצוי שהקורא יפתור כל שאלה, שתופיע במאמר, בטרם ימשיך לקרוא את הדיון בשאלה זו).

במהלך הדיון נניח שהתלמיד למד למצוא את קבוצת האמת של תבניות פסוק מסוג זה על-ידי פירוק לגורמים ועל-ידי שימוש בנוסחה. אין אנו מניחים שהתלמידים הכירו את משפטי ויאטה (Vieta), כלומר, את המשפטים על הסכום והמכפלה של ערכי האמת של משוואה ריבועית.

אם נציב $-a-b$ במקום c בנוסחת הפתרון נמצא כי קבוצת האמת של התבנית היא $\{1, \frac{c}{a}\}$.

עתה באה השאלה:

התוכלו לנמק, בדרך שונה מזו שבה השתמשתם בפתרונכם, שאומנם שני איברים אלה $\frac{c}{a}$, $\{1$ הם האיברים של קבוצת האמת?

כאשר נשאלה שאלה זאת בכיתה די מוכשרת נתגלה להפתעתו ולהפתעת הפותרים, כי נדרש מאמץ שכלי מסויים כדי לראות על-ידי הצבה רגילה שהתנאי $a + b + c = 0$ הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $x = 1$ יהיה אחד מערכי האמת של התבנית.

התלמיד יכול לגלות את ערך האמת השני על-ידי כך שיציב $-a-b$ במקום c במשוואה ויפרק לגורמים כי הרי:

$$ax^2 + bx - a - b = 0 \Rightarrow a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(ax + a + b) = 0$$

נשאל עתה: התוכלו לבנות שאלות דומות לנ"ל באותו תחום? אם הלומד הבין את הרעיון, הרי עליו לראות מיד שהתנאי $a - b + c = 0$ יביא לקבוצת אמת המכילה את

$$x_2 = -\frac{c}{a} \qquad x_1 = -1$$

אולם חשוב שהתלמיד ינסה להכליל את הבעיה ולגלות תנאים הכרחיים ומספיקים לכך שאחד מערכי האמת של תבנית הפסוק $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ יהיה אחד המספרים ... ,4 ,3 ,2. רצוי שהתלמיד יחקור תחילה שרשרת של מקרים פרטיים ואז ייגש למקרה הכללי של קיום ערך אמת $x = k$ כאשר k מספר נתון. התלמיד צריך לגלות שתנאי הכרחי ומספיק לכך הוא $ak^2 + bk + c = 0$. למרות שתוצאה זו ברורה לנו לגמרי, מתברר שדווקא תרגום תוצאה זאת לתכונות המספריות הדרושות מן המקדמים (לדוגמא: כדי שאחד מערכי האמת יהיה $x = 3$ הכרחי ומספיק לבחור מקדמים המקיימים $9a + 3b + c = 0$) הוא דבר המפתיע את התלמיד.

גישה שונה תתקבל אם נצא ממשואה פרטית, שאחד מערכי האמת שלה הוא 1,

למשל: $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ועם פתרונה נשאל אלו תכונות צריכים לקיים המקדמים של תבנית פסוק מסוג זה כדי להבטיח שאחד מערכי האמת אומנם יהיה 1?

שימוש בהצגה $(x - 1)(x - x_2) = 0$ אינו מוביל ישירות לפתרון. אך ע"י פיתוח התבנית

$$1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad a \neq 0$$

נקבל:

$$(2a+b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow a + b + c = 0$$

כלומר, הוכחנו בדרך שניה ש- $a + b + c = 0$ הוא תנאי הכרחי לכך ש- $x = 1$ יהיה אחד מערכי האמת של התבנית $ax^2 + bx + c = 0$ (או ש- $x = 1$ כערך אמת הוא תנאי מספיק לכך ש- $a + b + c = 0$). גם בדרך זאת נוכל להכליל ולחקור את המסקנות מן הדרי ש- $x = k$ יהיה ערך אמת של התבנית הריבועית הנידונה.

סוג דומה של שאלות, שדנים בהן במציאת ערכי אמת של תבניות ריבועיות, הן השאלות שבהן נדרש הפותר לקבוע כיצד יש לבנות מן המקדמים של משוואה ריבועית נתונה תבנית חדשה שערכי האמת שלה הן פונקציות רציונליות מסויימות של ערכי האמת של המשוואה הנתונה. מקובל לפתור בעיות אלה על-ידי שימוש במשפטי ויאטה. גישה זאת הופכת את הטיפול לאלגוריתמי, לפעולות של "הצבה בנוסחה", שיש בהן יותר חישוב מאשר חשיבה.

אין ספק שהתלמיד יעמיק את הבנתו בתפקיד המקדמים במציאת קבוצת האמת של תבנית פסוק ריבועית, אם יעמידו אותו בפני בעיות כאלו בטרם למד את משפטי ויאטה, או בטרם עסק באופן כללי בטרנספורמציות של המערכת. רצוי שהתלמיד יחקור תחילה בעיות מן הסוג שתארנו הן בתבניות עם מקדמים מספריים והן בתבניות עם מקדמים כלליים.
דווקא פתרון ישיר של בעיות כאלה, שלא לפי משפטי הסכום והמכפלה של ערכי האמת, יעמיק את ההבנה של השפעת השתנות המקדמים על ערכי האמת של משוואה ריבועית.

בדרכים דומות לזו שפיתחנו, כלומר תוך שימוש בנוסחה למציאת ערכי האמת של התבנית, יוכל התלמיד לחקור את הבעיות:

כיצד יש לבנות את המקדמים של תבנית פסוק ריבועית חדשה מן המקדמים של התבנית

$$ax^2 + bx + c = 0$$

כדי ש-

א) ערכי האמת יגדלו כל אחד ב- k
ב) ערכי האמת יגדלו כל אחד פי k
ג) ערכי האמת יהיו הריבועים של ערכי האמת של התבנית הנתונה
וכדומה.

לשם הדגמה נפתור כאן בדרך זאת את הבעיה הבאה:

קבוצת האמת של התבנית הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ כאשר $c, a \neq 0$ היא $\{x_1, x_2\}$.

כיצד נוכל להביע את המקדמים החדשים על-ידי פעולות אלגבריות במקדמים הנתונים כדי שקבוצת האמת תהיה $\{\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\}$.

על ידי הצבת $\frac{1}{x}$ במקום x (הנחנו $c \neq 0$ ולכן $x_{1,2} \neq 0$) יראה התלמיד כי המשוואה $cx^2 + bx + a = 0$ מספקת את הדרוש.

אולם גישה עוד יותר מעניינת, שהפותר לפיה יהנה מחווית מהסוג שהזכרנו, היא לרשום באופן פורמלי

$$\frac{1}{x} = \frac{2a}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

כפל המכנה והמונה ב- $-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}$ נותן $\frac{2a(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})}{b^2 - b^2 + 4ac}$

פישוט וצמצום ב- $2a$ נותן עתה $\frac{1}{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$

ואלה הם ערכי האמת של התבנית $cx^2 + bx + a = 0$. דרך זו מבליטה בצורה אחרת מה קורה בפתרון כאשר מחליפים את המקדם a של x^2 באיבר החופשי c ולהיפך.

בהזדמנות זאת אפשר לעשות קפיצה לאחור ולשאול שאלה דומה ביחס למערכת משוואות ממעלה ראשונה. כלומר, נוכל לשאול כיצד יש לשנות את המקדמים של מערכת התבניות:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

אשר קבוצת האמת שלה $\{(x,y)\}$ כדי לקבל מערכת אשר קבוצת האמת שלה היא $\{(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})\}$

כאן אולי רצוי להתחיל בכל כיתה בדוגמאות מספריות. אמנם במקרה זה יש יותר מפתרון אחד, אבל תוך כדי חקירתו מעמיק התלמיד את ההבנה של הקשר בין המקדמים והפתרון.

נוכל להצביע על דוגמא נוספת לשאלה אולי קצת יותר קשה: מה צריכים להיות המקדמים בתבנית הפסוק $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ כדי שקבוצת האמת שלה תהיה $\{a, b\}$?
(שים לב: התבנית $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ איננה מקיימת את התנאים!)

הראינו מספר דוגמאות של בעיות אלגבריות שיש בהן העשרת החשיבה כפי שיש לבעיות גיאומטריות. עלינו לזכור שאמרנו כי לבעיות גיאומטריות ישנו יתרון נוסף שקשה למצוא דוגמתו באלגברה והיא הויזואליות שלהן. הציור ממלא תפקיד מרכזי בחקירתן ובנסיון להתמודד עימן. זהו יתרון חשוב והוא אף מביא לכך שבתחומים רבים במו פיזיקה משתמשים בשפת הגיאומטריה, חבל לוותר על יתרון זה בחינוך המתמטי. בבעיה זו נשתדל לדון בפעם אחרת.