הרהורים על "משפט מק-קי"

מוגש על ידי פרופ' ש. אביטל

ב[illegible]מס' 2 של "שבבים" התפרסם תרגום של מאמר מאת לורנס שרזר, הדן במשפט, האומר:

לכל שני שברים $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$

המק ימינו $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $a,b,c,d \in N$ (N קבוצת המספרים הטבעיים)

קיים $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

למשפט זה במאמר צרף פרופ' ברוקהיימר הוכחה מעניינת. ההוכחה מבוססת על כך שכל שבר $\frac{p}{q}$ אפשר ליצג על-ידי נקודה (p,q) במישור ובאמצעותה על-ידי הישר, שהשיפוע שלו הוא $\frac{q}{p}$.
מכאן הוא מגיע לכך ששלישית השברים $\frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{a}{b}$ מיוצגת על-ידי מקבילית אשר קודקוד אחד שלה הוא $(0,0)$ ושלושת הקודקודים האחרים הם (a,b) , $(a+c,b+d)$ ו- (c,d) .
מהסתכלות במקבילית זאת ובאלכסון שלה מתקבלת הוכחת משפט מק-קי.

שאלה ראשונה ששאלתי את עצמי היתה:
מניין הגיע פרופ' ברוקהיימר לרעיון זה? נסיוני החינוכי אומר לי, שהדרך הטובה ביותר לפתח בתלמידים דרכי חשיבה מתמטיים, היא להראות להם שפתרונות של בעיה אינם צומחים deus ex machina אלא מתפתחים מתוך הבעיה, או מתוך נושאים הקשורים בבעיה.

העוסק בפתרון בעיה מתמטית איננו עוסק בכך בחלל ריק. הוא בונה את פתרונו על סמך הנתונים של הבעיה ועל סמך כל אוצר הידע ודרכי החשיבה שרכש מקודם.

ההצגה של שבר $\frac{p}{q}$ בתור זוג סדור (p,q) ולכן בתור נקודה במישור, היא שיטה ידועה ביסודות האנליזה ובתיאור בעיות שונות בתורת המספרים. אם השבר $\frac{p}{q}$ הוא מצומצם, הרי כל ההרחבות שלו נמצאות על ישר העובר דרך הראשית ודרך הנקודה (p,q) .
הננו יכולים להניח לכן שהאסוציאציה לקשור את השברים $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ עם הנקודות (a,b), (c,d) ועם שתי הקרניים שראשיתן בנקודה $(0,0)$ והעוברות דרך הנקודות (a,b) (c,d), היתה טבעית אצל פרופ' ברוקהיימר. המעבר מכאן לשיפוע גם הוא טבעי, כי הרואה

נגד עיניו קרן זו ואת הנקודה (a,b) דרכה היא עוברת, טבעי שיראה תיכף את השיפוע $\frac{b}{a}$

נותרה השאלה כיצד הגיע פרופ׳ ברוקהיימר לרעיון של המקביליות?

אפשר שכאן שאל את עצמו פרופ׳ ברוקהיימר את השאלה: היכן במתמטיקה הננו משתמשים בחיבור מחר $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$? כאשר במקום את השברים מחברים את הזוגות הסדורים המייצגים אותם. התשובה המיידית היא בחיבור וקטורים (או בחיבור מספרים מרוכבים). המעבר מכאן למקביליות הוא מיידי.

אין לי כמובן שום ביטחון, שאומנם זו היתה דרך מחשבתו של פרופ׳ ברוקהיימר (אינני מתחרה באורי גלר) אבל אין לי ספק שתלמידינו יפיקו תועלת אם נדריך אותם לגילוי הוכחה יפה זו בדרך אסוציאטיבית כלשהי.

בהמשך, נשאל את עצמנו מספר שאלות נוספות שרצוי לעוררן כאשר הבעיה נדונה בכיתה. השאלה הראשונה תהיה כמובן (ואני מדגיש <u>כמובן</u>) מה יקרה אם $\frac{a}{b} < 0$? כאן מתברר שיש הבדל רב בין המקרים שבהם $a > 0$ ו- $b < 0$ לבין $a < 0, b > 0$. זה יכול להיות נושא מעניין לחקירה עצמית של תלמידים, בעיקר אם יתקיפו את הבעיה הן מנקודת הראות של ההוכחה האלגברית והן מנקודת הראות של ייצוג הבעיה במישור עם מערכת ייחוס קרטזית (לפי הדרך של פרופ׳ ברוקהיימר).

שאלה שניה שנשאל, מה באמת הקשר בין שתי הטענות שבכל מקרה ש- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ $a, b, c, d \in N$
קיים (1): $\frac{a}{b} < (\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2 < \frac{c}{d}$ ו-(2): $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$?
(שים לב! (1) נכונה גם כאשר אחד <u>או</u> שני השברים הם שליליים).
אולי ישנה דרך הוכחה <u>אחידה</u> שבעזרתה אפשר לאמת את שתי הטענות?
מתברר שאומנם כן הדבר:
נתבונן תחילה ב- $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2$ אם במקום $\frac{c}{d}$ נציב $\frac{a}{b}$ <u>נקטין</u> שבר זה!
אבל אז מקבלים $\frac{a}{b} < (\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2$. באותו אופן אם במקום $\frac{a}{b}$ נשים u <u>הגדלנו</u> את השבר ונקבל $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})/2 < \frac{c}{d}$.

בזאת הוכחנו טענה (1).

מתברר שגם טענה (2) אפשר להוכיח בדיוק באותה דרך!

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftarrow ad < bc$ (זכור כל המספרים חיוביים!) ומכאן $d < \frac{bc}{a}$.

נתבונן עתה בשבר $\frac{a+c}{b+d}$. אם במקום d נציב $\frac{bc}{a}$ נגדיל את המכנה ונקטין את כל השבר.

כלומר,
$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{a+c}{b+\frac{bc}{a}} = \frac{a(a+c)}{b(a+c)} = \frac{a}{b}$$

ההוכחה של אי השויון הימני ב-(2) נעשית בדרך דומה.

אפשר להוכיח משפט (1) גם בעזרת הצגת השברים במערכת ייחוס קרטזית. אומנם, דרך הוכחה זו נכונה גם כאשר המונה והמכנה של כל שבר הם בעצמם שברים, למשל בשביל זוג השברים $\frac{s/t}{p/q}$ ו- $\frac{u/v}{x/y}$ כאשר כל המספרים חיוביים.
אז נקבל משפט (1) מהזוג $\frac{a/b}{1}$ ו- $\frac{c/d}{1}$

שימו לב, בזאת קיבלנו דרך חדשה להוכחת המשפט שהממוצע האריתמטי של שני מספרים נמצא תמיד ביניהם. הוכחה שכדאי להביאה בכיתה.

אם טרם עייפתם אפשר להמשיך להרהר. אפשר למשל לשאול היכן במציאות הננו משתמשים בצורת ה"חיבור" $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$?

אחד המקרים שבו נעשה החישוב בדרך זו, הוא חישוב היחס של מספר השערים שקבוצת כדורגל הבקיעה למספר השערים שהיא ספגה. אם היחס עד ליום מסויים היה $\frac{a}{b}$ ובמשחקה, ביום זה, הקבוצה הבקיעה c שערים וספגה d שערים, הרי שהיחס החדש יהיה $\frac{a+c}{b+d}$.
(שים לב: במודל זה המכנה יכול לחיות אפס!).

בכל זאת חוזרת השאלה, היכן <u>במתמטיקה</u>, ממלא ה"חיבור" הזה תפקיד רציני גם כאשר מדובר בשברים. מתברר שהדבר קורה בסדרות שברים הנקראות סדרות Farey .
אם נרשום לפי סדרם את כל השברים <u>המצומצמים</u> בין 0 ל-1, כולל הגבולות, שהמכנה שלהם איננו גדול מ- n , הרי שכל שבר בסדרה זאת מתקבל מחיבור המונים וחיבור המכנים של שכניו מימין ומשמאל.

לדוגמא בשביל $n = 6$ נקבל את הסדרה: $\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}$

ואמנם $\frac{1}{6}=\frac{0+1}{1+5}$ $\quad \frac{1}{5}=\frac{1+1}{6+4}$ $\quad \frac{1}{4}=\frac{1+1}{5+3}$ $\quad \frac{1}{3}=\frac{1+2}{4+5}$

(ההוכחה דורשת רק אמצעים אלמנטריים, אבל היא איננה מיידית). דרך אגב חקירת התכונות של סדרות אלה יכולה אף היא להיות פרוייקט מעניין לתלמידי חטיבת הביניים.

שאלה טבעית תהיה גם כיצד מסתדרים השברים בקטע בין $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$? כלומר, מתי שברים אלה שווים? ואם הם שונים איזה מהם הוא הגדול?

התשובה יכולה להתקבל מביצוע החיסור $(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})/2-\frac{a+c}{b+d}=\frac{(ad-bc)(d-b)}{2bd(d+b)}$

ומכאן ברור שאם $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ שני השברים $\frac{a+c}{b+d}$ ו- $(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})/2$ יהיו שווים אם ורק אם $b = d$ ואמנם במקרה זה שתי התוצאות שוות תמיד. (מעניין אם תלמידים בכיתות היסוד, שאין להם המנגנון האלגברי, יגלו עובדה זו בדרך אינדוקטיבית?) אם השברים שונים, ברור שהסדר ביניהם תלוי רק בהפרש שבין d ו- b (בהנחה כי $ad-bc<0$). נסתפק בזאת לעת עתה, אבל יש עוד הרבה על מה להרהר.