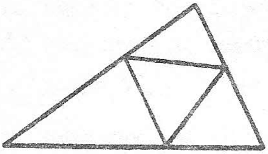
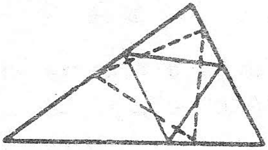
המשולש הנצחי

מאת: Bryant and Austin
תרגום: א. דכטר



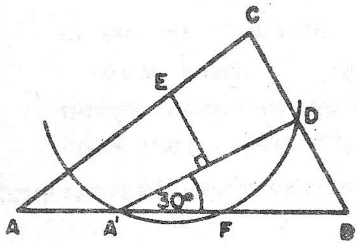


לא מכבר הצגנו בפני כיתה של מתמטיקאים צעירים בעיה: "נתון משולש, מצא שלוש נקודות, כל אחת על צלע אחרת, כך שהן תהיינה קודקודים של משולש שווה צלעות". (ראה ציור).

נהנינו מאוד ממבחר הפתרונות האלגנטיים וכן מהכללה מעניינת של התוצאות. אנו מביאים כאן כמה מן הבניות האפשריות. ראשית נשים לב לעובדה שלבעיה זו אין פתרון יחיד.

מסיבה זאת, הבניות השונות המתוארות להלן עשויות ליצור משולשים שווי צלעות שונים. בכמה מקרים דרושה תשומת לב בבחירת הנקודה הראשונה. היטיב לבטא זאת אחד מחברי הכיתה באמרו: "הנקודה הראשונה נבחרת באופן הגיוני!" וכאן נניח שזה המצב תמיד ונתעלם מאותן נקודות ש"אינן הגיוניות".

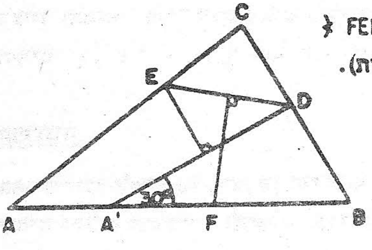
נתון ΔABC



1. א. בחר נקודה A' כלשהי על הצלע AB ומצא נקודה D על הצלע BC כך ש-$\sphericalangle DA'B = 30^\circ$

   ב. בנה אנך אמצעי לקטע $A'D$ שיחתוך את הצלע AC בנקודה E .

   ג. בנה מעגל שמרכזו E ורדיוסו ED שיחתוך את הצלע AB בנקודת A' ו- F . המשולש DEF הוא משולש שווה צלעות.

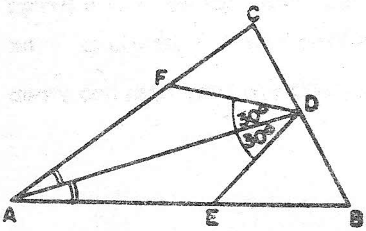


(נימוקים: מתכונות הזוית במעגל נובע כי $\sphericalangle FED = 2\sphericalangle FA'D = 60^\circ$
ולכן, מאחר ש- $ED = EF$ נובע ש- ΔDEF הוא משולש שווה צלעות).

2. צעדים א ו- ב כמו בדוגמא הקודמת.

   ג. בנה אנך אמצעי לקטע ED . אנך זה חותך את הצלע AB בנקודה F . ΔDEF הוא אותו משולש שווה צלעות שנבנה בדוגמא הקודמת.

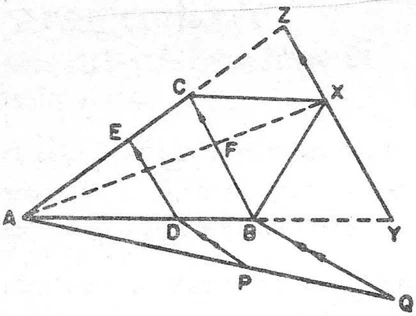
3. א. בחר נקודה D על הצלע BC כך ש-AD חוצה את $\sphericalangle BAC$.



   ב. בחר בנקודה E על AB ובנקודה F על AC כך ש- $\sphericalangle EDA = \sphericalangle FDA = 30^\circ$. DEF הוא משולש שווה צלעות.

(נימוקים: המשולשים DEA ו-DFA חופפים ולכן $DE=DF$
המשולש DEF הוא שווה צלעות).

4. בדוגמא זו אנו בונים משולש שווה צלעות עם אילוץ נוסף:
אחת מצלעותיו מקבילה לאחת מצלעות המשולש הנתון,
לדוגמא, הצלע BC.



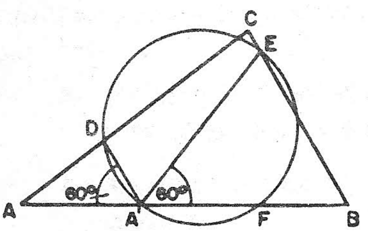
א. בנה משולש שווה צלעות BCX (ראה ציור).

ב. העבר ישר דרך X שיהיה מקביל לצלע BC ויחתוך את המשך הצלע AB בנקודה Y ואת המשך הצלע AC בנקודה Z.

ג. העבר קטע APQ כך ש: $\measuredangle YAQ$ חדה וגדולה מאפס ו- AP=AB ו- AQ=AY.

ד. קבע נקודה D על AB כך ש: PD||QB, ונקודה E על AC כך ש: DE||BC. תהי F הנקודה בה חותך BC את AX.
ΔDEF הוא משולש שווה צלעות עם DE||BC.

(נימוקים: המשולש DEF החסום במשולש ABC הוא פשוט גירסה "מוקטנת" של המשולש BCX החסום ב- AYZ).

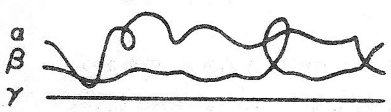


5. א. בחר A' כלשהי על AB ומצא נקודה D על AC ונקודה E על BC כך ש: $\measuredangle DA'A = \measuredangle EA'B = 60°$

ב. בנה מעגל דרך הנקודות D, E ו-A' החותך את AB פעם נוספת, בנקודה F. ΔDEF הוא משולש שווה צלעות.
(נימוקים: מתכונות זוית המעגל נובע ש-
$\measuredangle DFE = \measuredangle DA'E = 60°$ ($\measuredangle FDE = \measuredangle FA'E = 60°$)

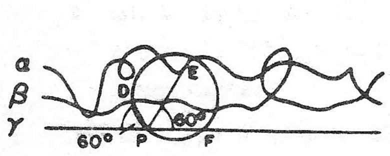
לבסוף נציג הכללה מפתיעה של הבנייה דלעיל:

<u>בעיה</u>



בציור הנמצא לפניך מצא שלוש נקודות, כל אחת על אחד מן הקוים α, β ו- γ, כך שהן יהוו קדקדיו של משולש שווה צלעות.

<u>פתרונות</u>



באפשרותנו לאמץ כל אחת מן הדוגמאות 1, 2 ו- 5 לפתרון בעיה זו שהיא כללית בהרבה. למשל, כבדוגמא 5, בחר P על γ ובנה נקודות D ו- E כמודגם. עתה, בנה מעגל דרך D, E ו- P החותך את γ גם בנקודה F ויתקבל משולש שווה צלעות DEF.

מפתיע כמה הנאה עדיין ניתן להפיק מן "המשולש הנצחי".

V.W. Bryant and A.K. Austin, "An Inscribed Equilateral Triangle", <u>Mathematics Teaching</u> No. 54, Spring 1971, pp. 8-9. Used by permission.