היום יום X בשבת

מאת פרופ׳ י. גיליס

1. <u>הצגת הבעיה</u>

מטרתנו במאמר זה לפתח נוסחה המאפשרת לקבוע את היום בשבוע של כל תאריך הניתן לפי הלוח האזרחי. הלוח המקובל כיום ברוב ארצות העולם הוא הידוע בשם "הלוח הגרגוריאני". לפי לוח זה יש בכל שנה רגילה 365 יום, מחולקים לחודשים כדלקמן:

ינואר	31	יולי	31
פברואר	28	אוגוסט	31
מארס	31	ספטמבר	30
אפריל	30	אוקטובר	31
מאי	31	נובמבר	30
יוני	30	דצמבר	31

כמעט כל השנים אשר מספרן לפי הספירה הנוצרית מתחלק ב-4 נחשבות כשנים מעוברות, ומוסיפים להן יום אחד בסוף פברואר. מספר הימים בשנה מעוברת הוא איפוא 366 ובחודש פברואר של שנה כזאת יש 29 יום. אמרנו "כמעט כל השנים ..." כי ישנן גם יוצאות מן הכלל. שנים שמספרן מתחלק ב- 100 אינן שנים מעוברות, אלא אם כן מספרן מתחלק ב- 400.

דוגמא:

השנים 1900, 1789, 1947, 1967 אינן מעוברות.

והשנים 2000, 1776, 1600, 1948 מעוברות.

למען הקל על החשבון נעביר, למטרת מאמר זה, את התחלת השנה לראשון למארס, ונראה את ינואר ופברואר כשני החדשים האחרונים של השנה הקודמת. כדי למנע אי-הבנה נסמן את התאריך הרגיל בצורה המקובלת, ואילו כשנכתוב תאריך בצורה החדשה נעטר אותו בכוכבים.

לדוגמא; ה- 15 באוגוסט 1962 יכול להיכתב כ- 15.8.62 או כ- *15.6.62*. כמו כן *12.12.1921* = 12.2.1922 וכו׳.

ניקח כנקודת מוצא את יום *1.1.1600*. תאריך זה נוח למדי מאחר שהלוח הגרגוריאני הוכנס לשימוש בשנת 1582. אם נדע את היום בשבוע של *1.1.1600* ומספר הימים שחלפו מאז עד לתאריך מסוים נוכל בנקל לחשב את היום בשבוע של תאריך זה. למעשה אין צורך לדעת את מספר הימים אלא רק את השארית כשמחלקים מספר זה ב- 7.
נשתמש במאמר זה בסימון $x \equiv y \pmod m$ כש- x, y הם מספרים שלמים (לאו דוקא חיוביים) ומשמעותו הוא ש- $(x-y)$ מתחלק ב- m באופן מדויק (ללא שארית). לפיכך, אם ידועים לנו שני תאריכים הרחוקים x ו- y ימים בהתאמה מתאריך המוצא ונדע כי $x \equiv y \pmod 7$ אזי שני התאריכים האלה חלו באותו יום בשבוע.

סימון שני שנזדקק לו הרבה במשך המאמר הוא $[\alpha]$, עבור כל מספר ממשי α, ופירושו <u>החלק השלם של α</u>, ז.א. המספר השלם הגדול ביותר שאינו עולה על α.
לדוגמה $[4.0]=4,\ [3.9]=3,\ [7.2]=7,\ [-3.1]=-4$

2. <u>מספר השנים המעוברות</u>

מהאמור לעיל ידוע כי חישוב מספר הימים בין *1.1.1600* עד לתאריך אחר כלשהו תלוי בין השאר במספר השנים המעוברות בין התאריכים האלה. בסעיף זה נחפש איפוא פונקציה $f(N)$ והיא מספר השנים המעוברות בין השנה 1600 והשנה N, כולל האחרונה ולא הראשונה, ז.א. עבור כמה מספרים שלמים y המקיימים $1600<y\leqslant N$ היתה (או תהיה) השנה y מעוברת. הערכים של y בתחום זה שהם כפולות של 4 הם המספרים $4x$ המקיימים $1600<4x\leqslant N$ ז.א. $400<x\leqslant\frac{N}{4}$ ומספרם איפוא הוא $[\frac{N}{4}]-400$. מאידך לא יהיו כל השנים האלה מעוברות כי יש להוציא מהכלל את אלה שהן כפולות של 100 (פרט לאלה שהן כפולות של 400). הכפולות של 100 הן השנים $100x$ כש- $1600<100x\leqslant N$ ז.א. $16<x\leqslant\frac{N}{100}$

ולכן מספרם הוא $16 - [\frac{N}{100}]$. כמו כן המיעוט מבין אלה שהן כפולות של 400 יהיו המספרים x המקיימים $N \geq 400x > 1600$ ומספרם יהיה איפוא $4 - [\frac{N}{400}]$.
מספר השנים המעוברות בין 1600 ל- N יהיה איפוא

$$\{[\frac{N}{4}] - 400\} - \{[\frac{N}{100}] - 16\} + \{[\frac{N}{400}] - 4\}$$

ז.א.

$$[\frac{N}{4}] - [\frac{N}{100}] + [\frac{N}{400}] - 388 \ .$$

אם נכתוב $N = 100C + D$ כש- $0 \leq D < 100$
(דוגמא: בשנת 1967 יהיה $C = 19$, $D = 67$).
נקבל:

$$[\frac{N}{4}] = [25C + \frac{D}{4}] = 25C + [\frac{D}{4}]$$

$$[\frac{N}{100}] = [C + \frac{D}{100}] = C$$

ובסוף נסתכל במספר $[\frac{N}{400}] = [\frac{C}{4} + \frac{D}{400}]$.

ברור כי $\frac{C}{4}$ הוא בצורת מספר שלם + ζ כשהערכים האפשריים עבור ζ הם $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0 . מאחר ש- $D<100$ אנו רואים ש- $\frac{D}{400} < \frac{1}{4}$ ולכן החלק השלם של $\frac{C}{4} + \frac{D}{400}$ יהיה שווה לזה של $[\frac{C}{4}]$. מכל זה נובע כי המספר המבוקש של שנים מעוברות הוא

$$\{25C + [\frac{D}{4}]\} - C + [\frac{C}{4}] - 388$$

ז.א.

$$24C + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] - 388$$

3. <u>מספר הימים מ- *1.1.1600* עד *1.1.N*</u>

מספר הימים מ- *1.1.1600* עד *1.1.N* יהיה מורכב מ-

(i) 365 ימים מכל שנה רגילה

(ii) 366 ימים מכל שנה מעוברת

ולכן יחד יהיה שווה ל- 365 כפול מספר השנים בכלל פלוס מספר השנים המעוברות. אם נכתוב שוב $N = 100C + D$ נקבל:

$$365 \{100 (C-16) + D\} + 24C + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] - 388$$

ונסמן את הפונקציה הזאת ב- $\Phi(C, D)$.

4. היום בשבוע

נניח עכשיו ש-*1.1.1600* חל ביום a בשבוע ואילו *1.1.100C+D* חל ביום b . אז ברור כי

$$
\begin{aligned}
b - a &\equiv \phi(C,D) \pmod 7 \\
&\equiv 364\{100(C-16)+D\}+\{100(C-16)+D\}+ \\
&\quad +21C+3C+[\tfrac{C}{4}]+[\tfrac{D}{4}]-388 \pmod 7 \\
&\equiv 100(C-16)+D+3C+[\tfrac{C}{4}]+[\tfrac{D}{4}]-385-3 \pmod 7 \\
&\equiv 2(C-16)+D+3C+[\tfrac{C}{4}]+[\tfrac{D}{4}]-3 \pmod 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b - a &\equiv 5C + D + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] - 35 \pmod 7 \\
&\equiv 5C + D + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] \pmod 7
\end{aligned}
$$

ז.א. $b \equiv a + 5C + D + [\frac{C}{4}] + [\frac{D}{4}] \pmod 7$

עכשיו נסמן ב- b_m את היום בשבוע של *1.m.100C+D*, ראינו איפוא כי

$$b_1 \equiv a + 5C + D + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}] \pmod 7$$

מטבלת החדשים שבתחילת המאמר אנו רואים מיד כי

$$b_2 \equiv b_1 + 3 \pmod 7$$

(מאחר שבמארס ישנם 31 יום).

כמו כן

$$
\begin{aligned}
b_3 &\equiv b_2 + 2 \equiv b_1 + 5 \pmod 7 \\
b_4 &\equiv b_3 + 3 \equiv b_1 + 8 \pmod 7 \\
b_5 &\equiv b_4 + 2 \equiv b_1 + 10 \pmod 7 \\
b_6 &\equiv b_5 + 3 \equiv b_1 + 13 \pmod 7 \\
b_7 &\equiv b_6 + 3 \equiv b_1 + 16 \pmod 7 \\
b_8 &\equiv b_7 + 2 \equiv b_1 + 18 \pmod 7 \\
b_9 &\equiv b_8 + 3 \equiv b_1 + 21 \pmod 7 \\
b_{10} &\equiv b_9 + 2 \equiv b_1 + 23 \pmod 7 \\
b_{11} &\equiv b_{10} + 3 \equiv b_1 + 26 \pmod 7 \\
b_{12} &\equiv b_{11} + 3 \equiv b_1 + 29 \pmod 7
\end{aligned}
$$

מעניין כי אפשר לסכם את כל הנוסחאות האלה על-ידי

$$b_m = b_1 + [2.6m - 2.2] \pmod 7$$

מכל זה ידצא כי b_m , היום בשבוע של *1.m.100C+D* מקיים

$$b_m \equiv a+5C+D+[\tfrac{C}{4}]+[\tfrac{D}{4}]+[2.6m-2.2] \pmod 7$$

ומזה נובע מיד כי התאריך *n.m.100C + D* יפול ביום x המקיים

$$x \equiv b_m + (n-1) \pmod 7$$

$$\equiv (a-1) + n + 5C + D + [\tfrac{C}{4}] + [\tfrac{D}{4}]+[2.6m-2.2] \pmod 7$$

5. הנוסחה הסופית

עדיין לא קבענו את המספר a , היום בשבוע של *1.1.1600* . אולי היינו יכולים למצוא אותו באיזה לוח עתיק אבל קל יותר להשתמש בתאריך ידוע.
למשל,חג העצמאות תשכ"ז חל ביום 15.5.1967 שהוא *15.3.1967* וזה היה ביום ב׳, מכאן

$$2 \equiv a-1+15+95+67+[\tfrac{19}{4}]+[\tfrac{67}{4}]+[7.8-2.2] \pmod 7$$

$$= a + 176 + 4 + 16 + 5$$

$$= a + 201$$

$$\equiv a - 2 \pmod 7$$

ומכאן $a \equiv 4$

נוכל איפוא לסכם בכך שהיום בשבוע של *n.m.100C+D* הוא x כש-

$$x \equiv 3+n+5C+D+[\tfrac{C}{4}]+[\tfrac{D}{4}]+[2.6m-2.2] \pmod 7$$

$$= n+5C+D+[\tfrac{C}{4}]+[\tfrac{D}{4}]+[2.6m+0.8]$$

ניתן כמה דוגמאות:

(א) 29 נובמבר 1947

תאריך זה הוא *29.9.1947* ולכן

$$x \equiv 29+95+47+4+11+[23.4+0.8] \pmod 7$$
$$= 210$$
$$\equiv 0 \pmod 7$$

ז.א. שהיום נפל בשבת.

(ב) 2 נובמבר 1917. *2.9.1917*

$$x \equiv 2 + 95 + 17 + 4 + 4 + 24 \pmod 7$$
$$= 146$$
$$\equiv 6 \pmod 7$$

ז.א. יום ו'.

(ג) 14 יולי 1789 *14.5.1789*

$$x \equiv 14 + 85 + 89 + 4 + 22 + 13 \pmod 7$$
$$\equiv 3 \pmod 7$$

ז.א. יום ג'.

טבלה לקביעה מיידית של ימי השבוע לכל עת (1906 - 2017)

Ev	(א) שנה			I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1906	1934	1962	1990	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
7	35	63	91	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
*8	*36	*64	*92	3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
9	37	65	93	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
1910	38	66	94	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
11	39	67	95	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
*12	*1940	*68	*96	1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
13	41	69	97	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
14	42	1970	98	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
15	43	71	99	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
*16	*44	*72	*2000	6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
17	45	73	01	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
18	46	74	02	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
19	47	75	03	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
*1920	*48	*76	*04	4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
21	49	77	05	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
22	1950	78	06	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
23	51	79	07	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
*24	*52	*1980	*2008	2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
25	53	81	09	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
26	54	82	10	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
27	55	83	11	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
*28	*56	*84	*12	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
29	57	85	13	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
1930	58	86	14	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
31	59	87	15	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
*32	*1960	*88	*16	5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
33	61	89	2017	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

(ב) חודשים Mona'e-...

(ג) ימי השבוע Días d.l.Sem.-Tag d.W. A hét napjai

א	1	8	15	22	29	36
ב	2	9	16	23	30	37
ג	3	10	17	24	31	
ד	4	11	18	25	32	
ה	5	12	19	26	33	
ו	6	13	20	27	34	
ש	7	14	21	28	35	

פתרון:

השאלה: לאיזה יום נופל 25 בינואר 1909: התשובה: ליום ב'. הפתרון: מחפשים את השנה בטבלת (א). באותה שורה תחת החודשים מוציאים את החודש לפי טבלה (ב). למס' 25 (יום בחודש ינואר) מוסיפים את המספר, שנמצאנו תחת חודש ינואר, כלומר 5. התוצאה היא 30. בטבלת (ג) נמצא מס' זה תחת יום ב'.

לפי אותה שיטה: 9 במאי 1945:
9 ועוד 2 = 11 = יום ד'
10 במרץ 1961:
10 ועוד 3 = 13 = יום ו'

שנים מעוברות (* = פברואר 29 יום)