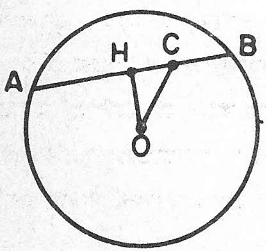
בעיות מינימום-מכסימום בשיטות אלמנטריות

מאת: ע. נניני

תרגום: נ. חטיבה

במאמר זה נראה כיצד ניתן לפתור בעיות מסוימות של ערך קיצון (בעיות מינימום-מכסימום) מבלי להשתמש בנגזרות.

נתון מעגל שמרכזו O, ונקודה C בתוכו. כל מיתר AB העובר דרך הנקודה C, מתחלק על ידה לשני קטעים AC, CB (שרטוט 1). ידוע המשפט הגיאומטרי לפיו מכפלת שני הקטעים האלה קבועה עבור כל המיתרים העוברים דרך C.



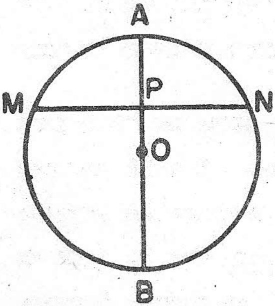
נסמן ב-H את אמצע המיתר AB. ברור כי OH⊥AB. אם נתבונן בכל המיתרים AB העוברים דרך C, נראה כי אורך OH יהיה הגדול ביותר כאשר H תתלכד עם C. במקרה זה OC⊥AB וקיים AC = CB. ככל שהמיתר דרך C רחוק ממרכז המעגל הוא גם קצר יותר.

הדגמנו:

<u>עקרון 1</u>. סכום שני מספרים ממשיים חיוביים, אשר מכפלתם קבועה, הוא מינימלי כאשר שני המספרים שווים זה לזה.

כאשר רוצים להשתמש בבניה גיאומטרית ברור כי עבור מכפלה קבועה יש לבחור ברדיוס מתאים. במקרה שהמכפלה היא p^2, הרדיוס חייב להיות לא קטן מ- p (אחרת לא יהיה מקום למיתר AB).

נתבונן שנית במעגל שמרכזו O. יהיו AB קוטר של המעגל, P נקודה כלשהי על הקוטר ו- MN מיתר המאונך ל- AB העובר דרך P (ראה שרטוט 2).



ידוע כי: $AP \cdot PB = MP \cdot PN = MP^2$

כאשר P מתקרבת למרכז המעגל O, הסכום $AP+PB$ (שהוא אורך הקוטר) אינו משתנה, בעוד שהמכפלה MP^2 גדלה (כי המיתר MN גדל). ברור כי מכפלה זו מקבלת ערך מכסימלי כאשר הנקודה P מתלכדת עם O.

<u>עקרון 2</u>. מכפלת שני מספרים ממשיים חיוביים שסכומם קבוע היא מכסימלית כאשר המספרים שווים. (אפשר להראות שעקרון 2 הוא בעצם תוצאה של עקרון 1).

ניקח עתה שני מספרים ממשיים וחיוביים x,y שמכפלתם קבועה. נחקור באילו תנאים יש לקומבינציה ליניארית הומוגנית של x ו- y, $z = mx + ny$, ערך מינימלי כאשר m,n קבועים, חיוביים וממשיים. ברור כי המכפלה $(mx)\cdot(ny) = (mn)\cdot(xy)$ אף היא קבועה ולכן לפי עקרון 1, יהיה z מינימלי כאשר $mx = ny$. זה מוליך אותנו ליחס: $x:y = n:m$.

לכן:

<u>עקרון 3</u>. אם לשני מספרים ממשיים חיוביים x,y יש מכפלה קבועה, כל אחת מהקומבינציות הליניאריות ההומוגניות שלהם בעזרת מספרים ממשיים חיוביים m,n מקבלת ערך מינימלי כאשר x ו- y מתייחסים באופן הפוך ל- m ו- n. (אפשר להראות שעקרון זה הוא הכללה של עקרון 1).

נניח עתה שסכום הריבועים של שני מספרים ממשיים חיוביים x ו- y הוא קבוע: $x^2+y^2=s^2$. המכפלה x^2y^2 תהיה מכסימלית כאשר $x^2=y^2$ (ראה העקרון 2), וכן המכפלה $x^2y^2=(xy)^2$ תקבל ערך מכסימלי כאשר המכפלה xy תקבל ערך מכסימלי.

מכאן נובע:

<u>עקרון 4</u>. המכפלה של שני מספרים ממשיים חיוביים אשר לריבועיהם יש סכום קבוע, היא מכסימלית כאשר המספרים שווים.

אפשר להסיק מסקנות רבות ממה שמצאנו עד כה. נראה כמה מהן:

דוגמא 1. הוכח כי למשולש ישר זוית, בעל יתר קבוע, יש שטח מכסימלי כאשר ניצביו שווים. הוכחה: נסמן ב- x ו-y את הניצבים וב-s את היתר, אזי $x^2+y^2=s^2$ (משפט פיתגורס). מעקרון 4 נובע ששטח המשולש $\frac{1}{2}x\cdot y$ הוא מכסימלי כאשר $x=y$.

תוצאה א - מלבן החסום במעגל נתון, הוא בעל שטח מכסימלי כאשר הוא ריבוע.

תוצאה ב - מלבן שאלכסונו נתון, הוא בעל שטח מכסימלי כאשר הוא ריבוע.

דוגמא 2. הראה כי בין כל המלבנים בעלי אותו היקף, הריבוע הוא בעל השטח הגדול ביותר.

הוכחה: תכונה זו נובעת באופן מיידי מעקרון 2.