פתרון גאומטרי למשוואה רבועית

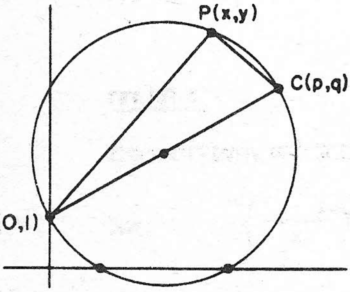
מאת: נחמיה בן ברוך, הטלוויזיה הלמודית

מבוא

מורה המתמטיקה מצווה לתור אחר כל הזדמנות להציג בפני תלמידיו קשר בין ענפי המתמטיקה השונים, על מנת להעמידם על האחדות היסודית של המתמטיקה.

הנה נרשא המקשר בין גיאומטריית-המישור לבין האלגברה. כשנתונה משוואה ריבועית כללית: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ידועים הפתרונות הגיאומטריים שלה, לפיהם מתקבלים שורשי המשוואה הממשיים: x_1, x_2 בנקודות החיתוך של הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ והישר $y = 0$, או בנקודות החיתוך של הפרבולה $y = ax^2$ והישר $y = -bx - c$.

פתרון גאומטרי אלטרנטיבי מעניין[1], המתואר להלן, מיוחס לדקרט (Descartes ,1596-1650), לקרליל (Thomas Carlyle, 1795-1881 הידוע כאחד מגדולי הסופרים הסקוטיים, אך היה גם מתמטיקאי חשוב) ואחרים.



הפתרון של דקרט וקרליל

אם נסמן ב-p ו-q את סכום ומכפלת שורשי המשוואה בהתאמה אזי קיים: $p = \frac{-b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$ והמשוואה הריבועית תירשם בצורה:

$$x^2 - px + q = 0$$

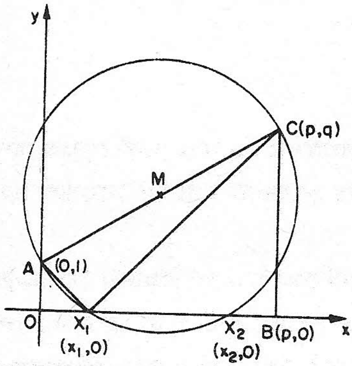
במערכת צירים קרטזית שבה נשתמש באותה יחידה לציר ה-x ולציר ה-y, נסמן את הנקודות: $A(0,1)$, $C(p,q)$. יהי הקטע AC כקוטר, נבנה מעגל.

טענה: שורשי המשוואה הריבועית הנתונה: x_1 , x_2 מתקבלים בנקודות חיתוך מעגל זה עם ציר ה-x .

הוכחה א׳

$\measuredangle AX_1C = 90°$ (זוית היקפית הנשענת על קוטר במעגל)

$\measuredangle AOX_1 = 90°$



נובע כי: $\measuredangle OAX_1 = \measuredangle CX_1B$

מאחר וגם $\measuredangle CBX_1 = 90°$

נקבל כי: ΔX_1BC דומה ל- ΔAOX_1.

ולכן: $$\frac{AO}{X_1B} = \frac{OX_1}{BC} \qquad (1)$$

לפי הציור: $AO = 1$, $OX_1 = x_1$

$BC = q$, $X_1B = p - x_1$

נציב ב-(1) ונקבל $$\frac{1}{p - x_1} = \frac{x_1}{q}$$

ומכאן $q = (p - x_1)x_1$ או $x_1^2 - px_1 + q = 0$

ולכן x_1 הוא שורש של המשוואה $x^2 - px + q = 0$.

ההוכחה ל- x_2 דומה.

הוכחה ב׳

הקואורדינטות של מרכז המעגל הם $\left(\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$. יהיה r מחוג המעגל

אזי: $$r^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2$$

משוואת המעגל היא לפיכך:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2$$

והחיתוך עם ציר ה- x ניתן על-ידי הצבת $y = 0$ במשוואת המעגל.

נקבל: $$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2$$

או $$x^2 - px + q = 0$$

כלומר, המעגל חותך את ציר ה- x בנקודות שפוסקיהן שורשי המשוואה הריבועית הנתונה.

הוכחה ג׳

תהא P נקודה כלשהי על המעגל. אזי $\measuredangle APC = 90°$

השיפוע של AP הוא $\frac{y-1}{x}$ ושל PC הוא $\frac{y-q}{x-p}$.

לכן: $1- = \frac{y-q}{x-p} \cdot \frac{y-1}{x}$ (מכפלת שיפועי שני ישרים מאונכים היא 1 –).

מכנה משותף: $(y-1)(y-q) = -x(x-p)$.

על-ידי כך קבלנו שוב את משוואת המעגל וכעת נמשיך כמו בהוכחה ב׳.

---

1) לפתרון גאומטרי זה מעלה, שבנייתו נעשית בעזרת סרגל ומחוגה בלבד בעוד שהפתרון הגאומטרי הראשון מצריך בניית פרבולה.

מקורות:

Amos Nannini: Geometric Solution of a Quadratic Equation; Mathematics Teacher, Vol.LIX, No. 7, November 1966, pp.647-649.

Peter A. Wursthorn: The Position of Thomas Carlyle in the History of Mathematics; Mathematics Teacher, Vol.LIX, No. 8, December 1966, p.757.