דמוקרטיה וסטטיסטיקה

(שעור ראשון לתלמידים בני 15-14)

מאת: פסקיאל איקרה - מדריד תרגום: דוד קטורזה - בית שמש

מאמר זה נותן הצגה היוריסטית של נושא "יבש" מבחינה דידקטית. המדובר בהכנסת המושגים הראשונים בסטטיסטיקה תיאורית. אין כאן חידוש בתוכן ולא בשיטות הוראה. זהו רק שעור נסיוני שנעשה בכיתה לפי העקרון, שבגיל זה, על ההוראה לעבור את המסגרת הצרה של החומר הנלמד, על מנת לתת לתלמיד השכלה רחבה ככל האפשר ולא ספציפית בלבד.

הניסוי נעשה בכיתה בת 50 תלמיד (ניתן לצרף שתי כיתות).

התלמידים מתבקשים להעריך את גובה הלוח בס"מ. "מטר" (סרגל מידה) למדידה ישירה אין להם והם מציעים להעריך את הגובה ב"עין". המורה מציע בחירה של הערך הטוב ביותר של ה"מדידה". הבחירה היא חופשית. זאת אומרת, כל תלמיד מביע בחופשיות את ההערכה שלו, מבלי שיושפע על-ידי דעת חבריו. כל אחד רושם את הערכתו על דף נייר.

אוספים את הדפים. יש לנו אוסף של נתונים שיסומנו x_i וניגשים לספירת הקולות. מספר הקולות שמקבלת כל "מדידה" יקרא השכיחות שלה ויסומן ב- f_i. מתקבלת ההתפלגות הבאה:

x_i	f_i
130	2
132	1
135	3
138	2
140	4
142	4
143	3
145	5
148	2
150	3
152	3
153	4
154	6
155	7
160	1
סה"כ	50

איזה ערך יש לקבל כסביר ביותר עבור גובה הלוח?

אם נתחשב בערך שקיבל את המספר הגדול ביותר של קולות, עלינו לבחור ב-155 (קיבל 7 קולות). ערך זה יקרא שכיח מפני ששכיחותו היא הגדולה ביותר. ערך זה לא יכול לייצג את דעת כלל הכיתה, כיון שיש להתחשב בדעות המיעוטים כבכל דמוקרטיה אמיתית. במקרה שלנו, רוב תלמידי הכיתה לא בחר בערך זה והוא נראה גבוה מדי לגבי מרבית ההצעות.

התלמידים מציעים לבחור בערך מרכזי יותר. אך איזה?
אולי הערך הנמצא באמצע הרשימה: 145 המשאיר 7 ערכים מעליו ו- 7 ערכים מתחתיו? ערך זה הוא מרכזי ביחס לנתונים בלבד ולא ביחס למספר הקולות שניתנו. התלמידים מציינים ש- 154, לדוגמא, קיבל 6 קולות לעומת 135 שקיבל רק 3 קולות.

אנו מודים ל-
Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathematiques de Lyon.
עבור הרשות לפרסם המאמר.

נחפש אולי ערך המשאיר אותו מספר קולות משני צידיו (ולא אותו מספר נתונים).
נמצא ש- 148 שקיבל רק 2 קולות, מקיים תנאי זה כי 24 תלמידים בחרו ערכים נמוכים ממנו, ו- 24 תלמידים בחרו ערכים גדולים ממנו. ערך זה, 148 יקרא חציון. אם נבחר בו כמייצג את דעת הכיתה - נתחשב בדעת המיעוטים, אם כי באופן חלקי בלבד. ערך זה לא ישתנה אם נחליף, לדוגמא, את השכיחויות של 145 ושל 130 זו בזו.

x_i	f_i	$x_i f_i$
130	2	260
132	1	132
135	3	405
138	2	276
140	4	560
142	4	568
143	3	429
145	5	725
148	2	296
150	3	450
152	3	456
153	4	612
154	6	924
155	7	1085
160	1	160
סה"כ	50	7338

יוצא מכך שהחציון מייצג את דעת הכיתה טוב יותר מאשר השכיח, אולם אינו מספק אותנו לגמרי: יש להתייחס לכל נתון לפי מספר הקולות שקיבל, יחסית לכל הקולות. לכך נגיע על-ידי הממוצע האריתמטי.
אחרי תזכורת בדוגמאות פשוטות יותר, נגיע לחשבון הבא:

$$\bar{x} = \frac{7338}{50} = 146.76 \sim 147$$ ס"מ

ערך זה מתקבל פה אחד כערך הסביר ביותר של גובה הלוח. ברגע זה שולחים תלמיד להביא את ה"מטר" למדידה ישירה. המדידה נותנת אף היא 147 ס"מ, דבר המשמח את ליבם של התלמידים.

כאן מתעכבים לרגע כדי לראות איך גורמים סוביקטיביים משפיעים על הבחירה של התלמיד: המספרים "המעוגלים", המסתיימים ב- 0 או ב- 5 שכיחים יותר באופן יחסי, דבר המקובל מאוד בחיים היומיומיים. אבל למזלנו גורמים אלה אינם משפיעים באופן מעשי על התוצאות.

לאחר שהערך 147 התקבל כערך "נכון" כל תלמיד מרגיש את הצורך להעריך בכמה הוא טעה בבחירה שלו. הערך 147 לא ניתן על-ידי אף אחד. כולם טעו, מי יותר ומי פחות, מי כלפי מעלה ומי כלפי מטה. ניתן בקלות לחשב את הטעויות האלה בצירוף הסימן - או +, לפי כיוון הטעות, אם הנתון קטן או גדול מ- 147 בהתאמה.

טעות כזאת נקראת סטיה (מן הממוצע). לפי הסטיה כל אחד יודע עכשיו מה היתה דרגת הדיוק בהערכה שלו. כיצד מודדים את דרגת הדיוק של הכיתה כולה? כמו במקרה של קליעה למטרה מבינים שהדיוק טוב יותר ככל שהקליעות מפוזרות פחות.

מדד ראשון לפיזור זה ניתן על-ידי הפרש שני הערכים הקיצוניים. ($160 - 130 = 30$).
ההפרש הזה נקרא תחום. אבל ברור שמדד זה אינו אומר הרבה כי הוא מתחשב בשני ערכים בלבד (ערכים קיצוניים).

התלמידים מציעים לחשב את __הממוצע האריתמטי של הסטיות__ (בדומה לחישוב הממוצע של הנתונים). הנה החישוב:

$(\Delta x_i)f_i=(x_i-\bar{x})f_i$	$\Delta x_i=x_i-\bar{x}$	f_i	x_i
-34	-17	2	130
-15	-15	1	132
-36	-12	3	135
-18	-9	2	138
-28	-7	4	140
-20	-5	4	142
-12	-4	3	143
-10	-2	5	145
2	1	2	148
9	3	3	150
15	5	3	152
24	6	4	153
42	7	6	154
56	8	7	155
13	13	1	160
-12		50	

ממוצע הסטיות $= \frac{-12}{50} = -0.24 \sim 0$

החשבון נותן ערך אפס, מדוע? הרי יצאנו מערך מקורב של הממוצע 147. הערך המדוייק היה 146.76. אילו היינו משתמשים בערך זה, התוצאה היתה בדיוק 0. __תכונה אופיינית של הממוצע__ שיש לזכור היא שממוצע הסטיות מהממוצע הוא אפס. נותנים דוגמאות פשוטות נוספות של תכונה זו.

הבנת התכונה הזאת מרגיעה את אכזבתו של התלמיד שנתן הערכה רחוקה מן הממוצע (סטיה גדולה); הוא מבין עכשיו שבמושכו את ההערכה בכיוון אחד, הוא מנע מן הערך הנכון להמשך בכיוון ההפוך. __לכל אחד תפקיד בחיי החברה.__

כיון שאי אפשר להשתמש בממוצע הסטיות, איך בכל זאת אפשר להעריך את דרגת הדיוק של הכיתה? התלמידים מציעים לסלק את סימני המינוס ולהסתכל רק על הערכים המוחלטים של הסטיות.

כדי לתת משקל רב יותר לסטיות הגדולות מעדיפים לחשב את ממוצע ריבועי הסטיות הנקרא __שונות__ ולאחר מכן להוציא את שורש השונות, הנקרא __סטיית תקן__. נחשב אותה:

$(\Delta x_i)^2 f_i$	$(\Delta x_i)^2$	Δx_i	f_i	x_i
578	289	-17	2	130
225	225	-15	1	132
432	144	-12	3	135
162	81	-9	2	138
196	49	-7	4	140
100	25	-5	4	142
48	16	-4	3	143
20	4	-2	5	145
2	1	1	2	148
27	9	3	3	150
75	25	5	3	152
144	36	6	4	153
294	49	7	6	154
448	64	8	7	155
169	169	13	1	160
2920			50	

שונות $s^2 = \frac{2920}{50} = 58.4$

סטיית תקן $s = \sqrt{58.4} \sim 7.6$

איזו משמעות אפשר לתת למדד פיזור זה? התלמידים מעריכים כי התשובות הטובות חייבות לסטות מהממוצע לכל היותר בסטיית התקן.

$$\bar{x} - s \leqslant x_i \leqslant \bar{x} + s$$

והתשובות מחוץ לרווח זה יש לראותן כ"מוטעות". לכן, תשובה טובה x_i חייבת להיות ברווח $154.6 \leqslant x_i \leqslant 139.4$. רואים מיד כי ניתנו 34 תשובות כאלה המהוות 68% מתלמידי הכיתה. כדאי לציין גם שתלמידים שבחרו בשכיח, נתנו תשובה מוטעית במקרה זה.

בהמשך לשעור זה אפשר להשתמש באותה דוגמה להגדרת מושגים נוספים כגון: ריבעון, עשירון, שכיחויות מצטברות, שכיחויות יחסיות, היסטוגרם, מידגם, או אף להשתמש בה כהקדמה להסקה סטטיסטית.

אפשר לשאול את התלמידים למשל: מה אפשר להסיק אם מדידה ישירה בעזרת ה"מטר" שונה מן הממוצע שנתקבל בחישוב? ישיבו אולי שמספר התלמידים (או מספר הנתונים) לא היה מספיק גדול. ואם השוני יהיה קיים למרות מספר גדול של נתונים, או אם הבחירה שתיעשה בכיתה אחרת תיתן שוני מאותו סדר גודל לעומת המדידה הישירה, יש להסיק כאן שמכשיר המדידה (המטר) פגום. דבר זה יוכל לשמש הקדמה לתורת המדגמים או לבעית פיקוח האיכות. העובדה שהתלמידים יצרו בעצמם את האוכלוסיה עליה עבדו היא יתרון משמעותי. זה נותן לתוצאות, כמו הממוצע, משמעות מציאותית יותר, בה בשעה שבדרך כלל הממוצע הוא ערך מופשט בעיקר.

ההערכה הנכונה של גובה הלוח נבעה מן ההערכות המוטעות של התלמידים עצמם.

בכך אפשר לעורר את סקרנותו של התלמיד לערך המעשי של השיטות הסטטיסטיות.