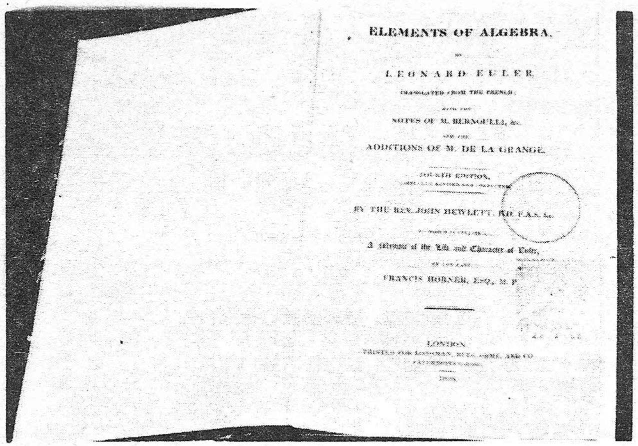

ELEMENTS OF ALGEBRA.

LEONARD EULER

NOTES OF M. BERNOULLI, &c.

ADDITIONS OF M. DE LA GRANGE.

FOURTH EDITION,

BY THE REV. JOHN HEWLETT, B.D. F.A.S. &c.

A Memoir of the Life and Character of Euler,

FRANCIS HORNER, ESQ., M.P.

LONDON

לאונרד אוילר

LEONHARD EULER

מאת: פרופ׳ מ. ברוקהיימר
תרגום: אבי דכטר

מבוא

אין משמעות לשאלה "מי היה גדול המתמטיקאים?", כי כל מתמטיקאי הוא מוצר של תקופתו. כאשר אוילר היה צעיר הוא קרא את לייבניץ (Leibniz) ואת ניוטון (Newton). ניוטון היה תלמידו של בארו (Barrow) וקרא את דקרט (Descartes) ואת ואליס (Wallis) וכך הלאה. .

ניוטון לא המציא את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. הוא פיתח תורה זו בדרך מיוחדת, שהיתה מובנת לבני תקופתו ולירשיו (בקשיים מסויימים). לעבודתו השפעה חזקה. ניוטון כמתמטיקאי היה גדול, אך אין משמעות לשאלה אם היה גדול מארכימדס.

אוילר כמתמטיקאי היה גדול ופורה בצורה מפתיעה. גם השפעתו שלו על בני תקופתו ועל ממשיכי דרכו היתה עצומה. קשה למצוא שטח במתמטיקה בו לא מוזכר שמו של אוילר. במאמר זה נספר מעט על חייו ועל עבודתו במתמטיקה. ניתן למצוא פרטים נוספים ברבים מן הספרים הרשומים בביבליוגרפיה ההיסטורית שבהוצאה הראשונה של "שבבים".

תולדות חייו בקצרה

אוילר נולד ב-15 באפריל 1707 בבאזל. בצעירותו היה תלמידו של ז׳אן ברנולי (Jean Bernoulli) וידידם של בניו ניקולס ודניאל (Nicolaus and Daniel) (משפחת ברנולי היתה "משפחה מתמטית" בולטת, אך זהו סיפור אחר). אוילר למד הרבה בנוסף למתמטיקה, כמו רפואה, אסטרונומיה, פיסיקה ושפות מזרחיות.

בניו של ברנולי עברו לסט. פטרסבורג, לאקדמיה החדשה שנוסדה ע"י קטרין הראשונה ובאמצעותם הוזמן אוילר להצטרף למחלקה לרפואה בשנת 1727. קטרין מתה מיד עם בואו של אוילר למקום ועל האקדמיה היה להאבק על קיומה. בשנת 1730, בגיל 23, שימש אוילר באקדמיה כראש המחלקה לפיסיקה (Natural Philosophy). אחד מבני ברנולי נספה בתאונה והשני חזר לבאזל. כך הפך אוילר בשנת 1733 למתמטיקאי הבכיר באקדמיה בהיותו בן 26.

מאותה תקופה החל אוילר להפיק כמות מדהימה של חומר במתמטיקה. הוא התחתן והיה אב ל-13 ילדים והתפרסם כמי שכתב מאמרים מתמטיים תוך כדי משחק עם ילדיו. בשנת 1735 אבדה הראיה בעינו הימנית אך הדבר לא עצר את שטף המתמטיקה מעטו.

ב-1741 הוזמן אוילר על-ידי פרדריק הגדול, להצטרף לאקדמיה של ברלין. הוא קיבל את ההזמנה ונשאר שם 25 שנה. ב-1766 הוא חזר לרוסיה ובאותה תקופה כבר ידע שהוא מאבד את הראיה בעינו השניה. כמעט בכל שארית חייו - 17 שנים - היה עוור. דבר זה לא עצר את עבודתו המתמטית. הוא המשיך בעבודה זו עד לסוף שנת 1783 כאשר "הוא מת לפתע בעודו לוגם תה ונהנה מחברתו של אחד מנכדיו".

פרסומים מתמטיים

אוילר פרסם בחייו יותר מ-500 ספרים ומאמרים. במשך כמחצית המאה לאחר מותו עסקה האקדמיה של סט. פטרסבורג בפרסום הכתבים שנמצאו בעזבונו. סך הכל כתב אוילר 886 ספרים ומאמרים, שהם בממוצע כ-800 עמודי דפוס לשנה.

ב-1907, שנת ה-200 להולדתו הוחלט לפרסם את עבודותיו המקובצות. הכרך הראשון פורסם בשנת 1911. העבודה טרם הושלמה ומעריכים שיפורסמו 75 כרכים. בעבודה זו לא כלולים 2791 מכתבים שנשתמרו מהתכתבויותיו עם מתמטיקאים אחרים. מכתבים אלו רק <u>רשומים</u>, בלווית הערות קצרות ביותר בספר בן 390 עמוד.

בכמות העצומה שכתב אוילר, ניתן למצוא מתמטיקה בכל הרמות. הוא הכתיב ספר לימוד בסיסי באלגברה, אחת המשימות הראשונות לאחר שהתעוור. ברשותי נמצאת הדפסה "מודרנית" של ספר זה בגרמנית שיצא לאור במלחמת העולם הראשונה. כמו כל דבר שכתב, היתה לספר השפעה חזקה במשך שנים רבות. בספריה של מכון ויצמן

מצויה גירסה אנגלית של ספר זה, שפורסמה ב-1828. בספר זה נמצא מאמר זכרון על אוילר שבו נכתב (אפשר שבמעט הגזמה):

". . . בנוסף לדיוק, לבהירות בה מוסבר כל דבר ולמבחר הדוגמאות שנבחרו בשום שכל, איננו מהססים להחשיב ספר זה, מיד אחרי הגיאומטריה של אוקלידס, כמודל המושלם ביותר של כתיבה אלמנטרית הקיימת בעולם המדע".

ספר זה נכתב כאשר אוילר היה עוור, על-ידי הכתבה לעוזרו שהיה שוליה של חיט. אוילר לימדו את הנושא תוך כדי הכתבה.

ספרו: Introductio in analysin infinitorum היה בעל השפעה גדולה ביותר. הספר יצא לאור ב-1748. בויר [1] כותב:

"ספר חשוב זה שנכתב ב-1748 שמש כמקור להתפתחויות במתמטיקה שנעשו במשך המחצית השניה של המאה ה-18. מאותה תקופה ואילך הפך מושג "הפונקציה" למושג בסיסי באנליזה. המושג הובלע בגיאומטריה האנליטית של פרמה (Fermat) ודקרט וכמו כן בחשבון האינטגרלי והדיפרנציאלי של ניוטון ולייבניץ. ארבעת הקטעים הראשונים של "המבוא" מגדירים פונקציה של גודל משתנה, כנוסחה אנליטית כלשהי התלויה במשתנה הנתון ובכמה גדלים קבועים. . . כיום הגדרה כזאת אינה מתקבלת כיוון שהיא אינה מצליחה להסביר את המונח "ביטוי אנליטי". כנראה שאוילר היה הראשון שחשב על פונקציות אלגבריות ועל פונקציות טרנסצנדטיות אלמנטריות".

ספר זה מכיל את הטפול "המודרני" הראשון בפונקציה האלמנטרית. לדוגמא, הפונקציה סינוס לא נחשבה יותר לקטע אלא למספר או ליחס.

הנוסחה: $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ (ראה החוברת הראשונה של "שבבים")

פרי עבודתו של אוילר בשלב מוקדם, מופיעה אף היא בספר.

השפעתו של אוילר על המתמטיקה ועל המתמטיקאים היתה כה גדולה, שחלק ניכר ממערכת הסמלים המתמטיים נעשו סטנדרטיים בזכות העבודה שאוילר השתמש בהם בספריו. כך למשל הוא אחראי לשמוש ב- $e = 2.71828\ldots$ לציון הבסיס של הלוגריתמים הטבעיים. בזכותו הפכה האות π לסמל של היחס בין היקף המעגל

1) C. B. Boyer, History of Mathematics, Wiley, 1968, p. 485.

לקוטרו, למרות שהוא לא היה הראשון שהשתמש בה. הוא היה הראשון שהשתמש באות i עבור $\sqrt{-1}$, בסימן Σ לציון סכום ובסימון $f(x)$ לציון פונקציה של x .

כותב בויר:

"את הסמלים שלנו כיום יש לזקוף לזכותו של אוילר יותר מאשר לזכותו של כל מתמטיקאי אחר בהסטוריה".

בין ספריו של אוילר ישנו הספר <u>מכניקה</u> (1736) אשר בו מוצגת בפעם הראשונה, הדינמיקה של ניוטון בצורה אנליטית. כמו כן הספרים <u>יסודות החשבון הדיפרנציאלי</u> (1755) ו-<u>יסודות החשבון האינטגרלי</u> (1768-1770) הכוללים רבות מהשיטות שעדיין נלמדות כיום.

נצטט שוב את בויר:

" . . . הכרכים של <u>היסודות</u> מכילים את הטפול הטוב ביותר בחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי בזמנו".

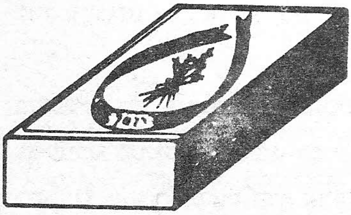
רשימת הספרים היא ארוכה מאוד. בספרו של סטרויק (Struik) <u>מקורות המתמטיקה בשנים 1200-1800</u> מחבר אוילר בכל פרק ופרק להרציא אחד, שכותרתו "האנליזה לפני ניוטון ולייבניץ".

דגמאות של מתמטיקה אלמנטרית

לפנינו כמה דוגמאות אלמנטריות הממחישות את גישתו של אוילר.

(1) אוילר גילה את מה שנקרא <u>נוסחת אוילר עבור פיאון כלשהו</u> (למרות שיתכן שהיתה ידועה קודם לכן).

$$v + f - e = 2$$



כאשר v הוא מספר הקודקודים, f מספר הפאות, ו- e מספר הצלעות.

לדוגמא: קופסת גפרורים היא בעלת 8 קודקודים, 12 צלעות ו-6 פאות.

$$8 + 6 - 12 = 2$$

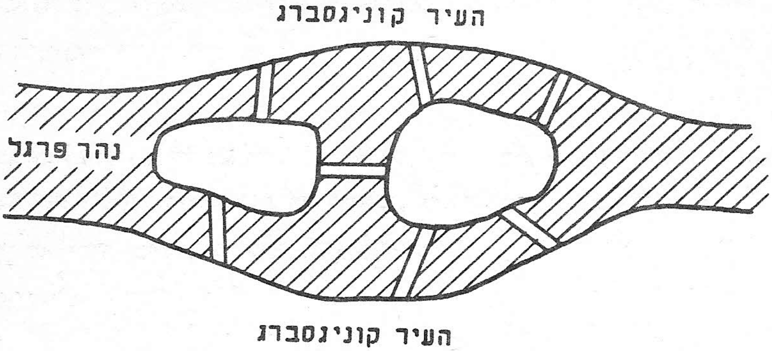
אוילר פרסם זאת ב-1750.

(2) בעית גשרי קוניגסברג (Königsberg Bridges Problem)

העיר קוניגסברג שוכנת על שפת הנהר פרגל. בנהר שני איים שהיו מחוברים (בזמנו של אוילר) אחד לשני ולעיר על-ידי שבעה גשרים.

הבעיה היא: האם יכול אזרח העיר לטייל בעיר כך שהוא יעבור כל גשר פעם אחת ויחידה.

אוילר פתר בעיה זו ב-1736 והסיק ממנה מספר מסקנות המשתייכות היום לתורת הגרפים האלמנטרית.



(3) הריבועים הגרקו-לטינים (Graeco - Latin Squares)

<u>הבעיה:</u> מתוך ששה גדודים נבחרים 36 קצינים באופן הבא: מכל גדוד נלקחים ששה קצינים בעלי דרגות שונות. האם אפשר לסדר 36 קצינים אלה ברבוע, (6x6), כך שבכל שורה ובכל עמודה יהיה רק קצין אחד מכל גדוד וכל דרגה תופיע פעם אחת? .

כדי לנסות ולפתור בעיה זו, השתמש אוילר ברבועים גרקו-לטינים. ראשית נסביר מהו רבוע לטיני.

בריבוע לטיני, כמו זה המופיע כאן, מופיעה כל אות בכל שורה ובכל עמודה פעם אחת ויחידה. אוילר שהרבה להשתמש ברבועים כאלה, שם בכל משבצת אות לטינית ומכאן גם השם.

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

לפנינו עוד רבוע לטיני, באותיות עבריות.

ג	א	ב	ד
ד	ב	א	ג
א	ג	ד	ב
ב	ד	ג	א

אם נניח את שני הריבועים אחד על השני נקבל את הריבוע הבא:

כלומר בכל משבצת נקבל זוג אותיות אחת עברית ואחת לטינית. הרבועים שבחרנו בנויים כך שבריבוע האחרון כל אות לטינית וכל אות עברית מופיעים פעם אחת ויחידה בכל שורה ובכל עמודה.

ג, a	א, b	ב, c	ד, d
ד, b	ב, a	א, d	ג, c
א, c	ג, d	ד, a	ב, b
ב, d	ד, c	ג, b	א, a

יתר על כן, כל שלוב של אות עברית עם אות לטינית מופיע פעם אחת בלבד. רבועים כאלה נקראים רבועים <u>גרקו-לטינים</u>. הרבוע האחרון נותן לנו פתרון לבעיה הראשונה כאשר מספר הגדודים הוא ארבעה ומספר הדרגות השונות הוא ארבע. מה קורה כשהמספר הוא שש?

אוילר פרסם ב-1782 מאמר שעסק בנושא זה. הוא הראה כי ניתן לבנות ריבועים גרקו-לטינים, עבור מספרים אי-זוגיים, עבור המספר 2 והמספרים . . . 12, 8, 4. עדיין לא היתה ברורה הבעיה עבור המספרים . . . 14, 10, 6 והבעיה המקורית עדיין לא נפתרה.[1]

לאחר הרבה עבודה, הביע אוילר השערה כי עבור מספרים אלה הריבועים הגרקו-לטינים אינם קיימים.

ב-1901, הראה צרפתי בשם גסטון-טרי (Gaston Tarry), את צדקת אוילר עבור 6. הוא עשה זאת על-ידי כך שהניח זה על זה את כל הצרופים האפשריים של רבועים לטיניים עבור המספר 6. הוא הראה שאין שום זוג רבועים לטיניים היוצר רבוע גרקו-לטיני.

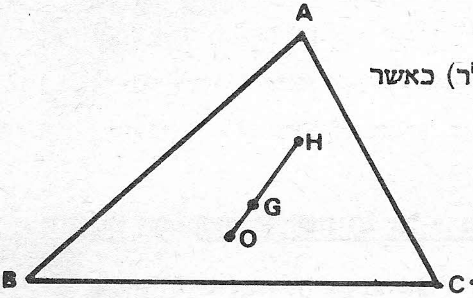
בשנת 1959 סתרו את הנחתו של אוילר שלושה אמריקאים, פרקר (Parker), בוס (Bose), שריקהנד (Shrikhand). הם מצאו כי קיימים רבועים גרקו-לטינים לכל שאר המספרים. . . מלבד למספר 6.

<u>הניו יורק טיימס</u> פרסם ב-26 באפריל 1959 כתבת שער מלווה בהצגת רבוע גרקו-לטיני עבור המספר 10 תחת הכותרת: "הנחה מתמטית חשובה שהוצעה לפני 177 שנה, אינה נכונה".

הריבועים הגרקו-לטינים אינם משחק בלבד. יש להם ערך חשוב מאוד בתכנון ניסויים מבוקרים, אך שוב, זהו נושא אחר.

1) בנית ריבוע עבור מספר n פרושו בנית ריבוע n על n.

(4) הקו של אוילר (1765)



משפט: במשולש ABC

H, G, O נמצאים על קו ישר אחד (הקו של אוילר) כאשר

H - נקודת החתוך של הגבהים

G - נקודת החתוך של התיכונים

O - נקודת החתוך של האנכים האמצעיים

(ההוכחה ניתנה בחוברת הקודמת של "שבבים").

(5) פונקצית אוילר

n הוא מספר טבעי גדול מ-1. פונקצית אוילר $\phi(n)$ מוגדרת כמספר המספרים הטבעיים הקטנים מ-n וזרים ל-n [1] (כולל המספר 1 בכל מקרה).

מגדירים $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$ וכו'. אם p הוא ראשוני אזי $\phi(p) = p-1$. אוילר הוכיח כי

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

כאשר $p_1, p_2, \dots, p_r$ הם גורמים ראשוניים שונים של n. פונקצית אוילר שמושית ביותר בתורת המספרים.

(6) לאוילר היה כשרון גדול גם בחשובים אריתמטיים רגילים. לפנינו כמה דוגמאות לתוצאות שהשיג באריתמטיקה.

(a) מספרים חברים (Friendly numbers)

שני מספרים הם חברים אם כל אחד מהם הוא סכום גורמיו של השני. למשל המספרים 284 ו-220 הם חברים.

ל-284 הגורמים הבאים: 1, 2, 4, 71, 142 שסכומם 220.

ל-220 הגורמים הבאים: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 שסכומם 284.

---

1) m ו- n זרים אם אין להם גורם משותף מלבד 1.

פרמה (1636) מצא את הזוג 17296 ו- 18416. דקרט (1638) מצא את הזוג 9363584 ו-9437056. אוילר (מ-1747 ואילך) מצא 60 זוגות של מספרים חברים. (מענין לציין שמתמטיקאים דגולים אלה פסחו על הזוג 1184, 1210 אשר מצא ילד איטלקי בן 16, ניקולאי פגניני ב-1866). כיום ידועים יותר מ-600 זוגות.

(b) המספרים הראשוניים של פרמה (Fermat Primes)

פרמה (1640) העלה את ההשערה כי $2^{2^n}+1$ הוא מספר ראשוני עבור כל n שלם אי-שלילי.

עבור $n = 0,1,2,3,4$ המספרים הם: 65537, 257, 17, 5, 3 אשר כולם ראשוניים.

עבור $n = 5$ המספר הוא 4294967297.

אוילר (1732) הראה שמספר זה אינו ראשוני. גורמיו נמצאו על-ידי אוילר והם 641 ו-6700417 ושניהם ראשוניים.

סיום

אוילר עסק לא רק במתמטיקה טהורה אלא גם בתורת ההסתברות, אסטרונומיה, מכניקה, הידרודינמיקה ועוד. הוא אפילו כתב על נווט, אוניות ומוסיקה.

"נגענו" בכמה מנושאי "עבודתו האלמנטרית" של אוילר. בעתיד נשתדל לפרסם מאמר שיתעמק יותר בנושא זה או אחר.