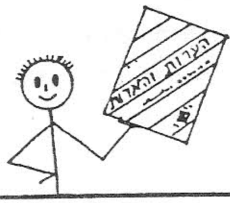
שבבים




# מתוך "הערות והארות"

עורכת: רחל בוהדנה
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן

## הָיֹה הָיָה...

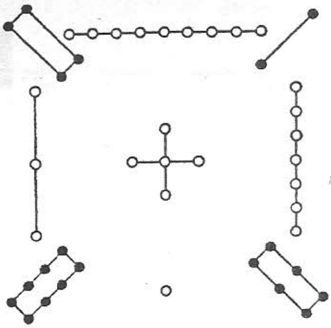
ריבוע קסם הוא ריבוע מסדר ח x ח בו רשומים המספרים הטבעיים מ 1 עד ח$^2$, כך שהסכום המתקבל בכל שורה, עמודה ואלכסון ראשי הוא קבוע.

לפנינו ריבוע קסם מסדר 3×3, הסכום בכל שורה, עמודה ואלכסון הוא 15.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

לריבועי קסם היסטוריה ארוכה מאוד. דוגמאות ניתן למצוא כבר במאה ה-13 לפני הספירה בסין העתיקה.

להלן שיחזור* של ריבוע קסם שמופיע במגילה סינית.



The lo-shu.

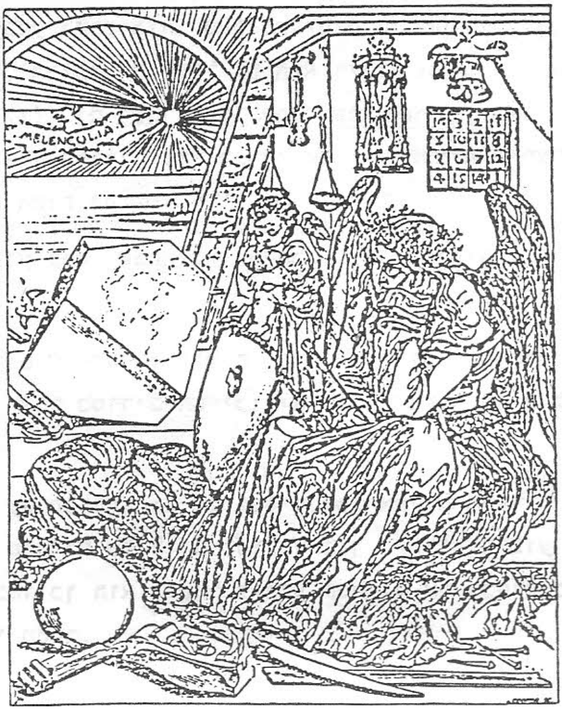
המספרים הזוגיים מסומנים כנקודות מושחרות אשר (פרט למספר 2) יוצרות צורות הנדסיות, והמספרים האי-זוגיים מסומנים באמצעות נקודות לבנות בשורה או בטור, פרט למספר 5, המסומן בצורת צלב, אולי כרמז לכיוונים שניתן לסכם את השורות והטורים.

אחד מריבועי הקסם המפורסמים, נמצא בפינה הימנית העליונה של הציור "מלנכוליה" של א. דירר.
בציור זה ישנם רמזים למכניקה, לאומנויות, לזמן ולמתמטיקה.

---

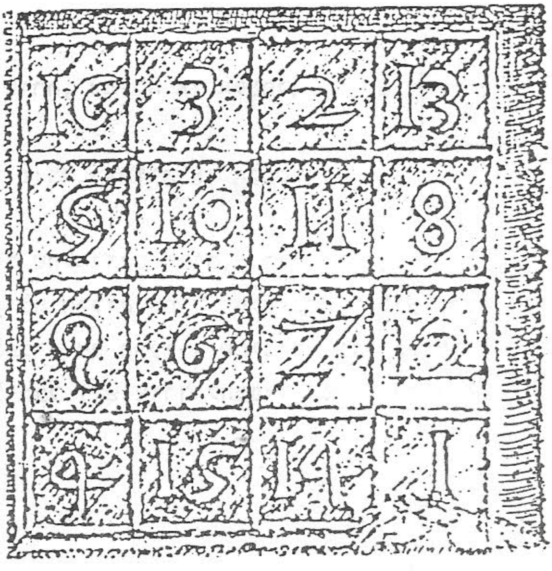
* הצילום לקוח מתוך הספר:

MAKIMIKAMI Y., The Development of Mathematics in China and Japan, p.3




MELANCHOLY.

ריבוע הקסם המוגדל הוא:



אחת התכונות של ריבוע הקסם היא, שאם מחליפים את הסידור, כך ששורות יהיו טורים ולהיפך, הריבוע המתקבל גם הוא ריבוע הקסם (עם אותו סכום). תמורות נוספות (אילו?) גם ישמרו על "קסם" שבו.אם כך, האם ישנה סיבה לכך שדיירר בחר דווקא בסידור זה? כנראה שכן: המשבצות האמצעיות בשורה האחרונה יוצרות את השנה בה הוא צייר את התמונה.

את ההגדרות של ריבוע קסם, שבתחילת המאמר, ניתן להרחיב גם עבור מספרים שליליים ושברים.

לריבועי קסם אין שום שימוש או יישום, פרט לפעילות המתמטית המשעשעת שניתן לפתח סביבם. לנו כמורים הם יכולים להוות מקור עשיר ליצירת תרגילים.

ריבוע הקסם ישמור על תכונתו גם אם נוסיף לכל אחד מהמספרים אותו מספר. לכן ריבוע קסם עם מספרים שליליים יכול להפוך ולהיות ריבוע קסם עם מספרים חיוביים, כמו כן הוא יישאר ריבוע קסם גם אם נכפיל כל אחד מהמספרים בו באותו מספר.

לריבועי קסם שימוש בפעילות מתמטית משעשעת אותה ניתן לפתח סביבם. לנו כמורים הם יכולים להוות מקור עשיר ליצירת תרגילים.

למשל:

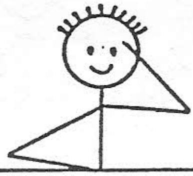
השלם את המקומות הריקים כך שיתקבל ריבוע קסם:

א) אשר הסכום בכל שורה, עמודה או אלכסון יהיה 3.

ב) אשר המכפלה בכל שורה, עמודה או אלכסון תהיה 1.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 1 | |
| 3 | | 5 |

במחקר שערכנו התברר שתלמידים רבים, מכיתות ז', חושבים שפעולת כפל תמיד "מגדילה" ופעולת חילוק תמיד "מקטינה".ריבועי קסם מסוג זה עשויים לעזור לתלמידים להפנים את הרעיון שחיבור יכול גם "להקטין" (יש צורך לחבר שלילי) וכנ"ל כפל (יש צורך להכפיל בשבר קטן מ 1).



# זה רעיון

בחוברת המלווה של ספר ג' לרמה א' (פרקי מתמטיקה) בעמודים 86-87 מובא חישוב קירוב עשרוני ל $\sqrt{2}$ הדורש מחשב כיס. למרות שמחשב הכיס הוא כלי טוב, הוא מסתיר לפעמים דברים יפים במתמטיקה.

ננסה להלן למצוא קירוב כשבר פשוט ל $\sqrt{2}$ .

נסמן $a = \sqrt{2}$ כלומר $a^2 = 2 \Longleftrightarrow a^2 - 1 = 1$

נפרק אגף שמאל ונקבל: $(a + 1)(a - 1) = 1$

ידוע כי $a \neq -1$ (מדוע?) נחלק ב $a + 1$ ונקבל:

$$\Longleftrightarrow a - 1 = \frac{1}{a + 1}$$

$$a = 1 + \frac{1}{a + 1}$$

כלומר: $a = 1 +$ שבר פשוט .

קירוב ראשון ל $a$ הוא 1.

נציב קירוב זה במקום $a$ מאגף ימין של

$$a_{\text{חדש}} = 1 + \frac{1}{1 + a_{\text{ישן}}}$$

נקבל: $$a_{\text{חדש}} = 1 + \frac{1}{1 + 1}$$

כלומר: $$a_{\text{חדש}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

מכאן קירוב שני ל $a$ הוא $\frac{3}{2}$ .

לכן: $$a^2 = \frac{9}{4} > 2$$

נציב קירוב זה שוב במקום $a$ באגף ימין.

ונקבל:

$$a_{\text{חדש}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$= 1 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$a^2 = \frac{49}{25} < 2$$

ואז מתקבלת הסידרה:

$$a_{\text{קירוב}} = \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{y}{x}$$

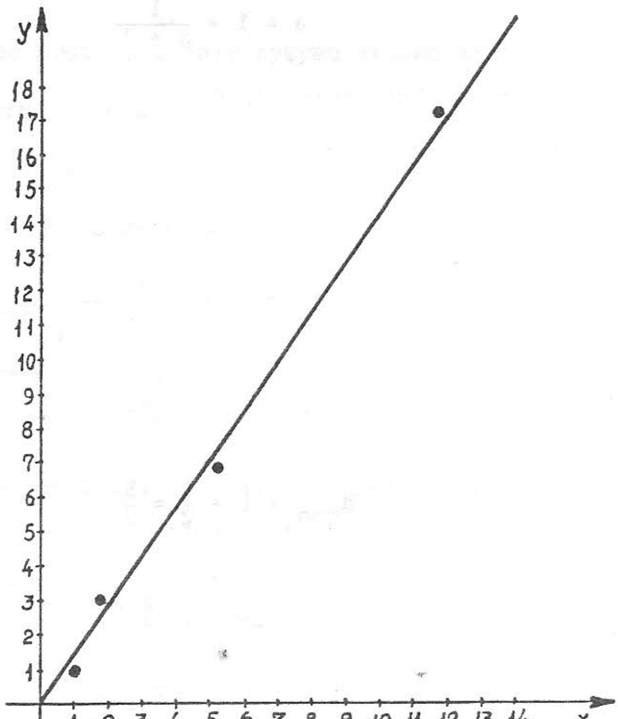
כלומר אם $\frac{y}{x}$ הוא שבר ו $\frac{Y}{X}$ השבר הבא

הרי:

$$X = x + y$$

$$Y = x + x + y = 2x + y$$

ואם נצייר את הקירובים האלה כנקודות במערכת צירים נקבל:




הרי $\sqrt{2}$ יהיה מיוצג ע"י קו ישר העובר "דרך" נקודות אלו אבל לא עובר על אף אחת מהן (כל פעם הוא יותר קרוב).

## פתרון התשבץ מתיק 25

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ■ | [1] 5 | [2] 2 | [3] 3 | 8 | ■ |
| [5] 1 | ■ | [4] 1 | 0 | ■ | [12] 3 |
| [6] 1 | [7] 3 | ■ | ■ | [13] 2 | 0 |
| [8] 1 | 7 | ■ | ■ | [14] 3 | 8 |
| 1 | ■ | [9] 1 | [10] 2 | ■ | 7 |
| ■ | [11] 6 | 4 | 3 | 5 | ■ |

הערות לתרגילים נבחרים

<u>במאוזן</u>

1. המספר $\overline{5a3b}$ צריך להתחלק ב 18, כלומר חייב להתחלק ב 2 וב 9,
לכן $b$ זוגי ו $8 + a + b$ חייב להתחלק ב 9, כלומר
$a + b = 1$ או $a + b = 10$.
התלמיד צריך לבחור אחת מארבע אפשרויות כך שתתאים גם להוראות במשבצות 2,3 במאונך.

11. המספר $\overline{x43y}$ חייב להתחלק ב 45. לכן הוא חייב להתחלק ב 5 וב 9.
מכאן $y$ מייצג 5 או 0. גם $7 + y + x$ חייב להתחלק ב 9 כלומר,
$x + y = 2$ או $x + y = 11$.

<u>במאונך</u>

7. $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a = 3 \cdot 37a$

10. נחבר את המשוואות של המערכת ונקבל:

$$10x + 10y = 50 \quad \text{או} \quad x + y = 5$$

נחסר מהמשוואה הראשונה את המשוואה השניה, נקבל:

$$-5.1256x + 5.1256y = -5.1256 \quad \text{או} \quad -x + y = -1$$

12. את המספר המבוקש אפשר לכתוב בצורה כללית, כך:

$$\overline{(n+3)\ (n+2)\ (n+1)\ n}$$

או:

$$\overline{n(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}$$

$$\overline{(n+3)\ (n+2)\ (n+1)n} - \overline{n(n+1)\ (n+2)\ (n+3)} =$$

$$= 1000(n+3)+100(n+2)+10(n+1)+n-1000n-100(n+1)-10(n+2)-(n+3) = 3087$$