תפיסת מושג הדמיון בקרב תלמידי כיתות ו'-ח'

מאת: אלכס פרידלנדר William Fitzgerald Glenda Lappan
מכון ויצמן למדע Michigan State University

מבוא

ילדים נתקלים לעיתים קרובות בתופעות הדורשות לבצע הגדלות לפי קנה מידה, הטלות, הגדלות שטח, ומדידות עקיפות. כדי להצליח במשימות אלה, עלינו לפתח את הבנתם ההנדסית בכלל ואת הבנת המושגים הקשורים לדמיון הנדסי בפרט. שליטה במושגי דמיון עשויה גם לעזור לתלמיד בחשיבה פרופורציונית הקשורה למצבים מורכבים ומופשטים יותר.

מחקרים רבים (INHELDER & PIAGET, 1958; KARPLUS & KARPLUS ,1972) נעשו על התפתחות כושר החשיבה הפרופורציונית של ילדים, אך התחום של חשיבה הכרוכה בדמיון הנדסי נחקר יחסית מעט.

הקשר בין שטחיהן של צורות דומות (כלומר, אם יחס הדמיון הוא H, אז יחס השטחים הוא H) מהווה קושי רציני עבור ילדים (ומבוגרים!) רבים. לונצר (LUNZER ,1968 ,1973) מצא כי הפרדה בין שינויי היקף לבין שינויי שטח דורשת מניפולציות במושגים מופשטים ולכן היא יכולה לבוא לידי ביטוי רק בשלב החשיבה הפורמלית של הילד.

המחקר שיתואר להלן הוא בעל שתי מטרות: (א) תיאור התפתחות החשיבה הקשורה בדמיון הנדסי בקרב תלמידי כיתות ו'-ח', ו-(ב) תאור השפעתה של יחידה לימודית בנושא הדמיון על תלמידי כיתות אלה.

היחידה הלימודית

צוות פרוייקט המתמטיקה לחטה"ב (MIDDLE GRADES MATHEMATICS PROJECT) של האוניברסיטה של מדינת מישיגן בארה"ב (MICHIGAN STATE UNIVERSITY) פיתח יחידת לימוד בנושא הדמיון ההנדסי. היחידה מציגה את המושגים במגוון של סיטואציות וברמה של חשיבה הנדסית בלתי פורמלית.

החוברת מכילה תשע פעילויות באורך כשעור אחד או שניים כל אחת:

- הגדלת שרטוטים בעזרת גומיות.
- הגדלת שרטוטים בעזרת טרנספורמציות במערכת צירים.
- זיהוי מלבנים דומים.
- זיהוי קבוצות של מלבנים דומים.
- זיהוי משולשים דומים.
- יצירת צורות הדומות לחלקים המרכיבים אותן.
- הגדלת שרטוטים בעזרת פרוייקציות דרך נקודה.
- הגדלת תמונות.
- שימושים של דמיון משולשים במדידות.

כל אחת מתשע הפעילויות מועברת לפי מודל שפותח בידי פיצג'רלד ושרוייר (FITZGERALD AND SHROYER, 1979). המודל מבוסס על שלושה שלבי לימוד: שיגור (הצגת מושגים חדשים, הבהרת הגדרות, חזרה על מושגים ידועים ושיגור אתגר), חקר (עבודה עצמית או עבודת צוות באיסוף נתונים, דיון ברעיונות המתעוררים, הסקת מסקנות, או פיתוח איסטרטגיות לפתרון בעיות), וסיכום (ארגון הנתונים, דיון בדרכי הפתרון ושיפורן).

שרוייר (SHROYER, 1985) טוענת, כי המודל של שיגור-חקר-סיכום מתאים לכל פעילות מתמטית המתנהלת בדרך הגילוי ודורשת "לזהות תכונות אופייניות של מושג, יחס מסויים בין מספרים, גדלים, צורות או משתנים או אפילו פעילות משחקית". בנוסף לדפי העבודה לתלמיד, מכילה היחידה הלימודית מדריך למורה מפורט ביותר העוזר למורה לפעול לפי המודל הלימודי שהוזכר לעיל.

כל עמוד במדריך מחולק לשלוש עמודות:

פעילות המורה	שיחה	תגובות צפויות
שימוש בחומרים	שאלות מפתח	תשובות נכונות
הצגת שקפים		טעויות צפיות
הסברים		
שאלות		

מתודולוגיה

במחקר השתתפו שש כיתות: שתי כיתות ו', שתי כיתות ז', ושתי כיתות ח' השייכות לשבי בתי-ספר במערב הזיכרון של ארה"ב. כל המורים המשתתפים הכירו את היחידה הלימודית משנים קודמות. מבין 125 תלמידי הכיתות האלה נבחרו בתחילת הניסוי 50 תלמידים בינוניים על-סמך ציוניהם במבחן רב-ברירה בכתב שכלל שאלות בנושא דמיון הנדסי. כל אחד מבין חמישים התלמידים שנבחרו רואיין במשך 30-60 דקות בתחילתו, ובסופו של לימוד היחידה הלימודית על דמיון הנדסי.

הראיון כלל חמש משימות: ארבע משימות הקשורות לדמיון מלבנים ומשימה אחת בנושא הקשר בין שטחיהן של צורות דומות. כל אחת מארבע המשימות הראשונות הוצגה ארבע פעמים כאשר בכל פעם שונות מידות המלבנים לפי קריטריונים של התחלקות מספרים, כפי שמפורט בטבלה 1.

טבלה 1: המשימות על דמיון מלבנים

המשימה / המספרים a על b, c על d	סוג 1 a|b a|c	סוג 2 a∤b a|c	סוג 3 a|b a∤c	סוג 4 a∤b a∤c
1. האם שני המלבנים המצויירים כאן הם דומים	3 על 6 9 על 18	2 על 3 8 על 12	3 על 9 4 על 12	6 על 8 9 על 12
2. האם שני המלבנים הגזורים שאתה מחזיק בידך הם דומים?	2 על 4 6 על 12	2 על 3 6 על 9	2 על 6 3 על 9	4 על 10 6 על 15
3. בהנתן שלוש מידות של המלבנים הדומים המוצגים לפניך, מהי המידה הרביעית? a b c d	2 על 6 6 על ?	2 על 5 6 על ?	4 על 12 7 על ?	6 על 10 9 על ?
4. גזור את הפס הנתון גזירה את אנכית, כך שייהפך למלבן הדומה למלבן הנתון.	2 על 4 6 על ?	2 על 3 8 על ?	2 על 6 5 על ?	4 על 6 6 על ?

במשימה החמישית, הציג המראיין מלבן המייצג לטענתו את ריצפתו של חדר קטן שכוסתה בשטיח תמורת 300 דולר. השאלה המוצגת לתלמיד היא מה מחירו של שטיח מאותו סוג המכסה חדר שרוחבו ואורכו גדולים פי 3 ממידות החדר הקטן המקורי. המשימה הוצגה בשלוש דרגות הפשטה: (א) ללא המחשות נוספות, (ב) על התלמיד לבחור מבין מבחר צורות את זו המייצגת את החדר הגדול ולמצוא את מחיר השטיח שיכסה את רצפתו, ו-(ג) על התלמיד "לבנות" את החדר הגדול מאוסף של מלבנים המייצגים את החדר הקטן ולמצוא את מחיר

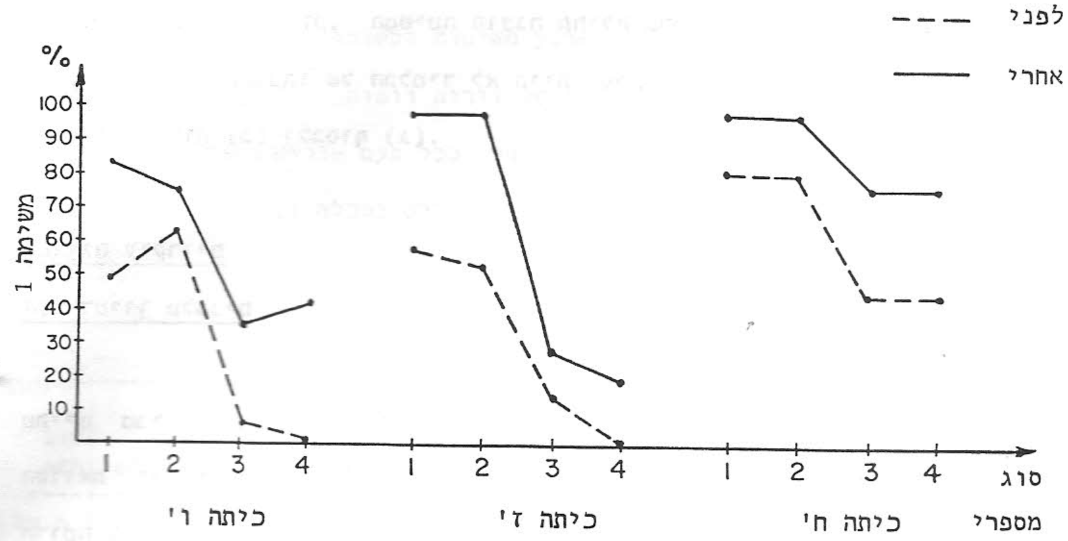
השטיח המתאים לחדר זה. המשימה הוצגה תחילה ברמת ההפשטה הגבוהה ביותר (א), ובמידה ותשובתו של התלמיד לא הייתה מספקת, חזר המראיין על השאלה בליווי המחשות (ב) ולבסוף (ג).

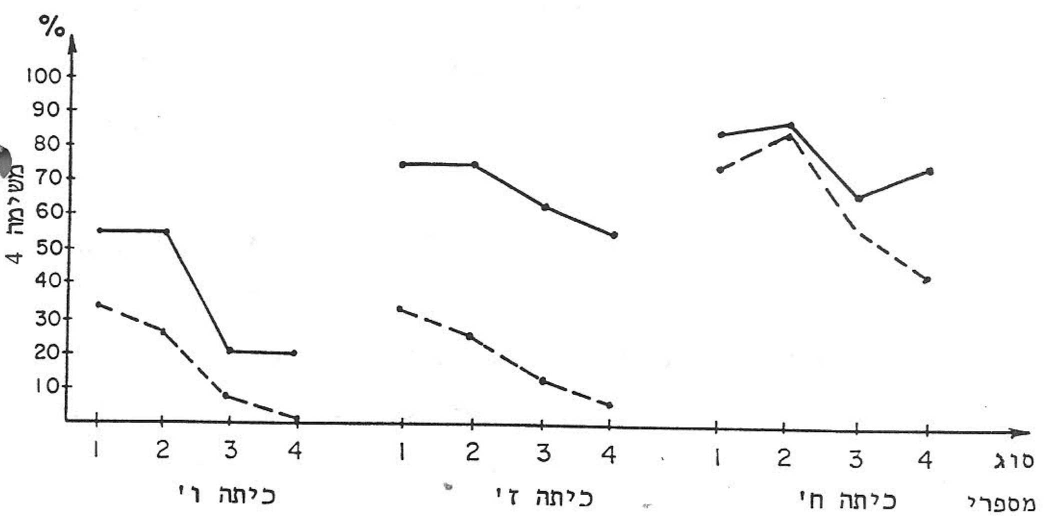
ממצאים עיקריים

א. דמיון מלבנים

שתיים מבין ארבע המשימות על דמיון מלבנים נבחרו לניתוח מעמיק יותר: השוואת זוגות של מלבנים מצויירים על דף (משימה 1) וגזירת הפס למלבן הדומה למלבן נתון (משימה 4).
ניתוח המשימות הראה, כי אלה דורשות חשיבה פרופורציונית מקורית יותר בהשוואה לשתי המשימות האחרות: משימה 1 "דוחפת" את התלמיד לבצע חישובים מספריים בעוד השוואת המלבנים הגזורים (משימה 2) מאפשרת מניפולציות והסתמכות על הראיה במידה גדולה יותר. גזירת הפס (משימה 4) שקולה מבחינה מתמטית למציאת אורך הצלע הרביעית (משימה 3), אך זוהי משימה שיגרתית פחות ולכן מושכת פחות תשובות "מיכאניות" המסתמכות על פתרון אלגברי של המשוואה $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

<u>רמת ההצלחה.</u> דיאגרמה 1 מציגה את מידת ההצלחה של התלמידים במשימות 1 ו-4 לפני ואחרי הוראת היחידה. הגרפים מצביעים בברור על התקדמות ניכרת בעקבות ההוראה. כמו כן, ניתן להבחין בהשפעת הסוגים המספריים השונים של הפרופורציות העומדות מאחורי כל משימה: בכל המשימות ועבור כל הכיתות ניכר פער של 20-45 אחוז במידת ההצלחה במקרים בהם היחסים בין אורכי או רוחבי המלבנים הם מספרים שלמים (סוגים מספריים 1 ו-2) לבין רמת הביצוע במקרים בהם היחס בין הצלעות המתאימות של המלבנים איננו מספר





דיאגרמה 1. מידת ההצלחה במשימה 1 (קביעת דמיון בין מלבנים)
ובמשימה 4 (גזירת הפס)

שלם (סוגים מספריים 3 ו-4). כמו כן, ניתן להסיק מדיאגרמה 1 כי לאחר ההוראה הגיעו התלמידים לרמת שליטה של מעל 80 אחוז בסוגים המספריים 1 ו-2, אך לא במקרים בהם מוצגות המשימות במספרים מסוג 3 ו-4.

ניתוח איסטרטגיות. בתשובותיהם למשימות הקשורות לדמיון מלבנים, השתמשו התלמידים באיסטרטגיות הדומות לאלה שצויינו במחקר של קרפלוס וקרפלוס (KARPLUS & KARPLUS ,1972). במחקר זה, קיבלו התלמידים משימות הדורשות חשיבה פרופורציונית שאינה קשורה להנדסה.

במשימות הקשורות לדמיון הנדסי אובחנו האיסטרטגיות הבאות:

1. הסתמכות על ראיה: התרשמות כללית מן המלבנים מבלי להתחשב במידות האורך של צלעותיהם.
2. חיבור: התחשבות בתוספת (ולא במנה) הדרושה לאורך ולרוחב המלבן הקטן כדי להגיע למידות המלבן הגדול (למשל, במלבנים 6 על 10 ו-9 על X, X = 13 כי 3 = 6 - 9 ולכן יש להוסיף 3 גם לאורך).
3. כפל ותיקון חיבורי: שימוש בכפל להגדלת המלבן הקטן ו"תיקון" התוצאה על-ידי חיבור או חיסור (למשל, במלבנים 2 על 6 ו-5 על X, X = 13, כי 1 + 2 2 = 5 ובאותו אופן 13 = 1 + 6 2).
4. כפל בשלם: תפיסה כי דמיון מלבנים מתקיים רק במקרים בהם אורך ורוחב המלבנים "נכנסים" מספר שלם של פעמים (ולאו דוקא אותו מספר פעמים) במידות המתאימות של המלבן הגדול.
5. חשיבה פרופורציונית: בניית היחסים מתאימים או, כפי שהתלמידים עשו לעיתים קרובות יותר, מציאת קנה מידת ההגדלה (כלומר כמה פעמים ארוך או רחב יותר המלבן הגדול לעומת הקטן).

כדאי לציין, כי תשובות התלמידים במשימות הקשורות לדמיון הנדסי דומות לאלה שנמצאו על-ידי קרפלוס (KARPLUS & KARPLUS ,1972) במחקריו על חשיבה פרופורציונית כללית.

טבלה 2 מציגה את התפלגות האיסטרטגיות במשימה מספר 4 (גזירת הפס למלבן הדומה למלבן נתון), שהיא כאמור המשימה הדורשת את מידת הטרנספר הגבוהה ביותר מן הפעילויות שבוצעו במסגרת היחידה הלימודית.
השוואת תשובות התלמידים לפני, ואחרי למידת היחידה מורה על ירידה ניכרת במספר התלמידים שהסתמכו על ראיה. ניתן עוד לציין, כי בביצוע המשימה הזו לפני הוראת היחידה הסתמכו רוב תלמידי כיתות ו' ו-ז' על הראיה או השתמשו בכפל שלמים, בעוד תלמידי כיתות ח' נטו יותר להשתמש בשיטת החיבור "המתקדמת" יותר.

<u>טבלה 2:</u> התפלגות האיסטרטגיות (באחוזים) בפתרון משימה 4 מוצגת בסוגים המספריים 3 ו-4.

האיסטרטגיה	כיתה ו'		כיתה ז'		כיתה ח'	
	לפני	אחרי	לפני	אחרי	לפני	אחרי
הסתמכות על ראיה	40	7	41	6	3	-
חיבור	13	13	12	12	26	16
כפל ותיקון חיבורי	-	10	3	3	3	3
כפל במספר שלם	44	50	34	19	18	10
חשיבה פרופורציונית	3	20	9	59	50	71

היררכיה של איסטרטגיות. פיאז'ה וכן קרפלוס טוענים כי ההסתמכות על ראיה בלבד מראה על היות הילד בשלב של חשיבה אינטואיטיבית, השימוש באיסטרטגיה חיבורית קשורה לשלב טרום-אופרטיבי, בעוד שילד המשתמש באיסטרטגיה כפלית מבצע, לדעתם, חשיבה אופרטיבית. גם חמש האיסטרטגיות שאובחנו במחקר זה דורגו בהיררכיה עולה לפי קריטריון זה: ההסתמכות על ראיה (1) הוחשבה כשלב חשיבה הנמוך ביותר, האיסטרטגיה החיבורית (2) כבאה בתור, ואחריה שלוב של איסטרטגיה כפלית וחיבורית (3), ושימוש באיסטרטגיה כפלית בלתי-נכונה (4) ונכונה (5).

טבלה 3 מסכמת את השינוי באיסטרטגיות לפתרון משימות 1 ו-4 שחל בקרב התלמידים המרואיינים בתקופת לימוד היחידה על דמיון הנדסי.

טבלה 3: התפלגות (באחוזים) של איסטרטגיות תלמידים במשימות 1 ו-4 המוצגות בסוגים המספריים הקשים (3 ו-4).

אחרי / לפני	1	2	3	4	5
1	4	3	1	6	12
2		5	1	2	10
3					2
4		6		16	9
5			2	1	20

גזירת הפס (משימה 4)

אחרי / לפני	1	2	3	4	5
1	3			11	12
2			1	1	4
3					1
4	3	4		27	14
5	1	1		2	15

קביעת דמיון בין מלבנים (משימה 1)

סידור התוצאות במטריצה מאפשר מעקב אחרי התקדמותם של תלמידים בודדים: המספרים הממוקמים על האלכסון הראשי של הטבלה מראים שימוש באותה האיסטרטגיה לפני, ואחרי הוראת היחידה. המספרים שאינם על אלכסון זה מצביעים על התקדמות (במחצית העליונה של הטבלה) או נסיגה (במחצית התחתונה של הטבלה) אחרי הוראת היחידה בהשוואה לתשובת אותו התלמיד לפני לימוד היחידה. התוצאות מראות כי כ-45 אחוז של התלמידים היו יציבים, בעוד 45 אחוז נוספים השתמשו באיסטרטגיה מתקדמת יותר לאחר לימוד היחידה ורק 10 אחוז נסוגו לעומת הראיון הראשון.

רבים מן התלמידים גילו בזמן הראיון חוסר עיקביות בולט: במסגרת אותה המשימה, נטו תלמידים רבים לסגת ברמת האיסטרטגיה בהם השתמשו ככל שהמספרים בהם הוצגה השאלה נהיו "קשים" יותר (כלומר היחס בין המידות המתאימות של שני המלבנים לא היה מספר שלם).

ב. תפיסת היחס בין שטחי מלבנים דומים

<u>רמת ההצלחה.</u> כפי שצויין קודם, הוצגה שאלת עלות השטיח בחדר הגדול בשלוש רמות הפשטה, ובהנתן תשובה נכונה, הפסיק המראיין את שאלותיו בנושא זה. טבלה 4 מציגה את אחוזי התלמידים שהצליחו בכל אחד משלבי שאלת השטח. התוצאות מראות גידול ניכר במספר תלמידי כיתות ז'-ח' שהצליחו לענות נכון כבר בשלב ראשון (הפשטה גבוהה), בעוד שרמת תשובותיהם של תלמידי כיתות ו' לא השתפרה כתוצאה מהוראת היחידה. למרות שכמעט כל תלמידי כיתות ו' היו מסוגלים להרכיב בשלב השלישי מודל של החדר הגדול בעזרת מלבנים המייצגים את שטחו של החדר הקטן, 40 אחוז טעו בהערכת גידול השטח אף כשמודל זה היה בפניהם.

טבלה 4: רמת ההצלחה (באחוזים) במשימת השטח

נסיון	כיתה ו'		כיתה ז'		כיתה ח'	
	לפני	אחרי	לפני	אחרי	לפני	אחרי
ראשון	7	7	19	57	37	63
שני	13	7	19	12	5	21
שלישי	40	46	25	19	47	16
כשלון אחרי שלב שלישי	40	40	37	12	11	0

ניתן למדוד את רמת הביצוע של כל תלמיד במשימה זו על-ידי מתן ציון בין 0 ל-3: 0 עבור כשלון, ו-1, 2 או 3 אם הצליח במשימה בניסיון שלישי (רמת הפשטה נמוכה), שני או ראשון (רמת הפשטה גבוהה) בהתאמה. לפי מדד זה, ירדה בין שני הראיונות רמת הביצוע הממוצעת של תלמידי כיתות ז' ירידה קלה מ 0.87 ל-0.80, בעוד הציון הממוצע של הכיתות האחרות השתפר מ 1.19 ל 2.13 עבור כיתות ז' ומ 1.68 ל 2.58 עבור כיתות ח'.

ניתוח האיסטרטגיות. במשימת השטח אובחנו איסטרטגיות החשיבה הבאות:

1. העדר נימוק: אי-יכולת לענות תשובה או הסבר כלשהו.
2. הגדלה ליניארית: הכפלת המחיר (דהיינו השטח) בקנה מידה ליניארי.
3. כפל ותיקון חיבורי: כפל במספר כלשהו ו"תיקון" התוצאה על-ידי חיבור מספר.
4. כפל במספר שלם: כפל במספר שלם הנמצא בדרך כלל בין קנה המידה הליניארי וריבועו.

5. ספירה היקפית: ספירת מספר הפעמים בהם "נכנס" החדר הקטן לאורכו ולרוחבו של החדר הגדול וחיבור התוצאות (בד"כ עם ספירה כפולה של המלבן הפינתי) והתעלמות מן המלבנים שבפנים החדר.

6. קנה מידה נכון: ספירה נכונה של מספר הפעמים בהם "נכנס" המלבן הקטן למלבן הגדול. לא הובחן שימוש ישיר בעיקרון גידול השטח על-ידי ריבוע היחס הליניארי.

האיסטרטגיות המובאות לעיל דורגו לפי היררכיה המבוססת על נימוקיו של לונצר (1973, 1968, LUNZER). הוא טוען כי שימוש מוטעה בקנה מידה ליניארי להגדלת השטח (איסטרטגיה 2) מראה על היות הילד בשלב של אופרציות קונקרטיות, בעוד שלדעתו היכולת להפריד בין הגידול הליניארי לגידול השטח דורשת חשיבה פורמלית. לאור המסקנות האלה דורגה במחקר זה הפעלת קנה המידה הליניארי כקודמת לשימוש בכל איסטרטגיה כפלית אחרת. איסטרטגיות 3 עד 6 דורגו במחקר זה לפי מה שנראה לנו כדרגה עולה בהבנת הקשר בין שטחיהם של שני מלבנים דומים.

טבלה 5 מציגה את השפעת היחידה הלימודית על האיסטרטגיות בהן השתמשו התלמידים המרואיינים לפני, ואחרי ההוראה. באופן דומה למטריצות שסיכמו את תשובות התלמידים בראיון על דמיון מלבנים, ניתן להסיק על סמך המספרים שמעל ומתחת לאלכסון הראשי כי 42 אחוז מן התלמידים התקדמו, 38 אחוז היו יציבים, בעוד 20 האחוז הנותרים נסוגו בראיון השני לעומת הראשון.

טבלה 5: התפלגות (באחוזים) של איסטרטגיות בניסיון הראשון של לפני, ואחרי הוראת היחידה הלימודית.

לפני \ אחרי	1	2	3	4	5	6
1		4				
2		16		2	2	16
3				2		
4	4			2		6
5				8	6	10
6		2	2	2	2	14

לסיכום סעיף זה, ניתן לומר כי רמת הביצוע של תלמידי כיתות ו' במשימת השטח היתה נמוכה במיוחד. מאידך, תלמידי כיתות ז'-ח' היו ברמה התחלתית גבוהה יותר ואף שיפרו את תשובותיהם לאחר הוראת היחידה. מעקב אישי אחרי התלמידים המרואיינים משלוש הכיתות מראה כי בהשוואה לראיון הראשון, מעל 30 אחוזים השתמשו בראיון השני באותה האיסטרטגיה או באיסטרטגיה מתקדמת יותר כבר בניסיון הראשון של משימת השטח.

סיכום

מטרות המחקר הזה היו תאור תפיסת מושגים הקשורים לדמיון הנדסי אצל תלמידי כיתות ו'-ח' ובדיקת השפעת ההוראה של יחידה לימודית העוסקת בנושא זה. סיכום תשובותיהם של חמישים ילדים שרואיינו בעזרת ארבע משימות הקשורות לדמיון מלבנים מראה כי מידת ההצלחה גדלה ככל שהתלמיד

לומד בכיתה גבוהה יותר. המספרים בהם השתמש המראיין בהצגת משימה הוכיחו עצמם כמשתנה חשוב נוסף: רמת הביצוע של התלמידים היתה גבוהה כאשר המספרים המתאימים לאורכי הצלעות המתאימות של שני המלבנים התחלקו זה בזה. ניתוח התשובות במשימות שהוצגו בעזרת סוגים מספריים קשים יותר הראה כי בהשוואה לראיון שהועבר בהתחלה, 45 אחוז מן התלמידים השתמשו באיסטרטגיה מתקדמת יותר בראיון שני.

הצגת אותה המשימה בסוגים מספריים שונים הבליטה את העובדה כי ילדים רבים מתנהגים בחוסר עקביות: לעיתים קרובות השתמשו התלמידים המרואיינים באיסטרטגיה ברמה נמוכה יותר ככל שהמספרים שנבחרו להצגה חוזרת של אותה המשימה היו מסוג קשה יותר.

תשובות הילדים במשימה שבחנה את תפיסת היחס בין שטחי מלבנים דומים הראו כי שליש מן התלמידים השתמשו בראיון השני באיסטרטגיה מתקדמת יותר. תלמידי כיתות ז'-ח' גילו התקדמות ניכרת בתפיסת הנושא, אך תפיסת השטח של תלמידי כיתות ו' לא השתנתה כתוצאה מהוראת היחידה הלימודית.

מבחינה פדגוגית, נראה לנו כי הצגה ראשונית של מושג הדמיון ההנדסי בכיתות ו'-ח' העשירה את התפיסות ההנדסיות של הילדים. תוצאות המחקר הזה מראות כי גם ספרי הלימוד וגם המורים צריכים לבחור בזהירות רבה את המספרים בהם מוצגות השאלות על דמיון הנדסי. בחירת סוגי מספרים "נוחים" עלולים ליצור רושם מוטעה בהקשר למידת השליטה של תלמידים בנושא זה.

Fitzgerald, W. and Shroyer, J. (1979). A Study of the Teaching and Learning of Growth Relationships in the 6th Grade, Report of contract NSF-SED 77-18545 to the National Science Foundation.

Inhelder, B. and Piaget, J. (1958), The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence, Basic Books: New York.

Karplus, R. and Karplus, E.F. (1972), Intellectual development beyond elementary school III--Ratio: A longitudinal study. School Science and Mathematics 72, pp. 735-742.

Lunzer, E.A. (1968). Formal reasoning, in E. A. Lunzer and J.F. Morris (eds.), Development in Human Learning, American Elsevier, New York.

Lunzer, E.A. (1973). Formal Reasoning: A Re-appraisal, paper presented at the Psychology of Mathematics Education Workshop, Chelsea College, London.

Shroyer, J. (1985). The LES instructional model: Launch-Explore-Summarize, Proceedings of the MSU Honors Teachers Workshop of Middle Grades Mathematics, pp. 101-110.