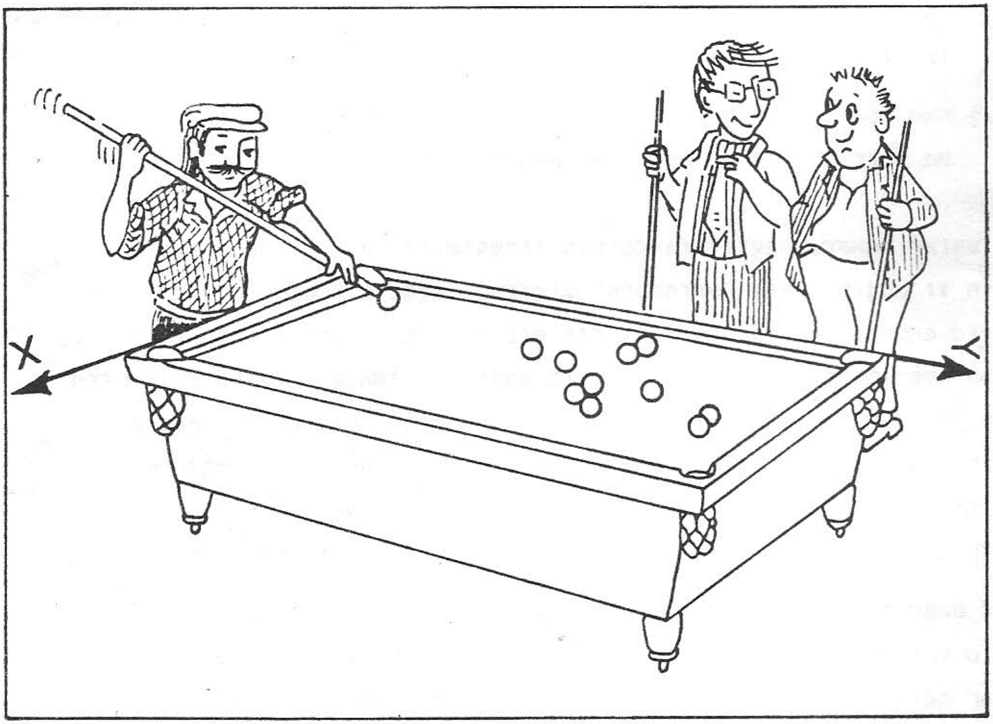
היבט פונקציונלי על שולחן הביליארד

מאת: ברוך שוורץ
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע
רחובות

דוד בן-חיים
אוניברסיטת חיפה
בית הספר לחינוך,
אורנים



היבט פונקציונלי על שולחן הביליארד

ב"שבבים" תיק 24 התפרסם מאמר הדן ב"מתמטיקה על שולחן ביליארד". באותו מאמר הוצגה הבעיה הבאה:

נתון שולחן מלבני ABCD בעל מידות של a×b יחידות, a ו-b מספרים טבעיים. חובטים בכדור מהפינה A בזוית 45°. נניח שאין חיכוך, כך שכל פעם שהכדור חובט בדופן השולחן הוא מוחזר בזוית 45°. בכל פינה של השולחן יש כיס וכאשר הכדור מגיע לאחת הפינות הוא מסיים את מסלולו.

שאלות הניבוי שהוצגו:

בהינתן המימדים של שולחן ביליארד מן הסוג המתואר לעיל,

(i) האם ניתן לנבא באיזו פינה הכדור יסיים את מסלולו?

(ii) האם ניתן לנבא את מספר החבטות שהכדור יספוג (כולל ביציאה, בדפנות ובסיום)?

(iii) האם ניתן לנבא את מספר המשבצות שהכדור יחצה במסלולו (או לחילופין את אורך מסלולו של הכדור מן ההתחלה ועד לסיום)?

כפי שתואר במאמר, הפעילויות בכיתות ובהשתלמויות מורים הובילו לטיפול בבעיה זו מנקודת ראות "אריתמטית" ביסודה. בעקבות סרטוט מסלולי הכדורי במקרים פרטיים, ספירת חבטות וזיהוי פינות סיום, איסוף נתונים ואירגונם, העלאת השערות ובדיקתן התגלתה חוקיות הקשורה לנושאים ומושגים אריתמטיים כגון יחס, צמצום, זוגיות ואיזוגיות, מחלק משותף גדול ביותר (ממג"ב) וכפולה משותפת קטנה ביותר (כמק"ב) של מימדי השולחן. בחלק ההוכחה, ההכללה וההרחבה של הבעיה, הועלתה שאלת המניפולציה של הזוית בה נחבט הכדור ביציאה וההשלכות על מספר החבטות, פינת הסיום ואורך המסלול.

מטרת מאמר זה להצביע על פעילויות נוספות, שהוצגו ונוסו הן בהשתלמויות מורים והן בכיתות ועוררו ענין רב. בפעילויות החדשות תוקפים את בעית שולחן הביליארד מנקודת ראות שונה מהקודמת והמאפשרת מניפולציה לא רק של הזוית ההתחלתית בה נחבט הכדור אלא גם של מימדי השולחן ונתונים אחרים. הטיפול בבעיה נעשה בעזרת כלים, מושגים ומיומנויות מתמטיים הקשורים בעיקר לנושא הפונקציה ובפרט לפונקציה הלינארית. פונקציה, העוסקת במשתנים ובקשר מסויים ביניהם, מטבעה מאפשרת מניפולציה של נתוני הבעיה, תכנון מצבים שונים מראש והצגת שאלות מעמיקות יותר. בפעילויות המוצעות

להלן נשמרים גם האלמנטים הבסיסיים בפתרון בעיות פתוחות כגון חקירה, איסוף נתונים ואירגונם, שימוש בטבלאות ובגרפים, העלאת השערות ובדיקתן, גילוי חוקיות והסקת מסקנות, הכללה והוכחה מתמטית. בנוסף לכך, משולבות במהלך החדש פעילויות הקשורות למושגים בסיסיים מתחום הנדסת המישור כגון משפט פיתגורס, תכונות משולשים שווה שוקיים וחפיפת משולשים. פרט להעשרת התוכן המתמטי של הבעיה על ידי הגישה החדשה, יש להדגיש גם את החשיבות הדידקטית המתבטאת בנקודות הבאות:

א) חשוב להדגים, במידת האפשר, טיפול בבעיה בדרכים וגישות מתמטיות מנקודות ראות שונות.

ב) ניתן לנצל את הפעילויות במסגרת פתיחת נושא הפונקציה הלינארית ו/או לתירגול וביסוס נושא הפונקציה הליניארית תוך כדי התיחסות למצב ריאלי, מוכר על פי רוב ומושך לעסוק בו. מצב זה עדיף על תירגול "יבש" או מוגבל לבעיות העוסקות בדרך, מהירות וזמן.

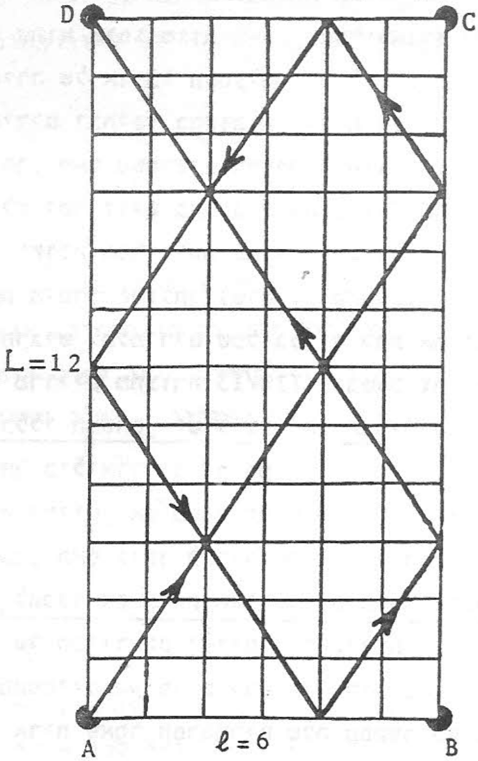
ג) ניתן להדגים בעזרת הפעילויות את הקשר בין שטחי המתמטיקה השונים, על ידי שילוב מושגים והוכחות מתחום הפונקציה ומתחום הגיאומטריה. אלו הם שני הנושאים העיקריים הנלמדים במקביל על פי תכנית הלימודים בכיתה ט'.

להלן, נתאר בתחילה את הפעילויות וגילוי החוקיות בדרך אינדוקטיבית אינטואיטיבית וכפי שאפשר להציגן בכיתות. לאחר מכן, נציג שאלות תירגול, ביסוס, העמקה והרחבה תוך כדי שימוש בכללים ובתוצאות שהושגו. לבסוף, נציג הוכחה מתמטית, הרחבה והכללה של הבעיה. החומר מוצג בצורה כזו, כדי לאפשר למורים להשתמש בשני החלקים הראשונים ישירות בכיתותיהם (גם לתלמידים בינוניים!) ואילו לגבי חלק ההוכחה כל מורה יחליט בהתאם לרמת תלמידיו. כל דפי הפעילויות קובצו בנפרד בנספח 1 ונתיחס אליהם על פי הסימון דף עבודה I, דף עבודה II וכו'. אנו ממליצים למורים לעקוב אחר תאור הפעילויות תוך כדי עבודה בדפי הפעילות במקביל.

<u>פתיחת הפעילות</u>

בפתיחת הפעילות יש להסביר את המשחק וכלליו. בעיקר נחוץ להדגיש את אותם מרכיבים אינווריאנטיים במהלך המשחק ואת אלו שיהיו מסומנים באופן אחיד. נתיחס אל ציור 1 ונעזר בו להסביר את הדברים הבאים:
פינות השולחן מסומנות באופן קבוע כך שהפינה השמאלית התחתונה היא A,

הימנית התחתונה B, הימנית העליונה C והשמאלית העליונה D. את מימדי השולחן נציין על ידי $\ell \times L$ כך שתמיד ℓ מציין את המימד האופקי ו-L את



ציור 1

המימד האנכי (לא רצוי להשתמש באורך ורוחב וכמו כן מומלץ להזכיר את הקשר בין ריבוע למלבן, כך שהשולחן יכול להיות גם ריבועי). את הכדור נשגר תמיד מהפינה השמאלית התחתונה A כאשר נחבוט בו במקל ונתיחס לתנועתו על השולחן כנטולת חיכוך ובמהירות קבועה. הכדור משוגר בשיפוע מסויים (גדול מ-0), כגון 3/2 ורצוי להדגים על שולחן מלבני משובץ את קביעת הכיוון על ידי תזוזה של 2 משבצות למעלה ו-3 משבצות ימינה.
הכדור נע בקו ישר, פוגע בדופן השולחן (וגם כאן אנו מניחים שאין חיכוך בדופן) ומוחזר כך שזוית הפגיעה שווה לזוית ההחזרה. אם הכדור מגיע במהלך מסלולו לאחת מפינות השולחן, אז הוא נכנס לכיס באותה פינה ומסיים את מסלולו. כאשר נתיחס למספר החבטות שהכדור סופג במסלולו, נספור את החבטה הראשונה בכדור בעת יציאתו, כל חבטה באחת מדפנות השולחן ואת החבטה האחרונה כאשר הכדור מסיים את מסלולו ונכנס לאחד הכיסים. אורך מסלולו של הכדור יהיה שווה לסכום כל הקטעים לאורכם נע.
עתה, מוצע לחלק את דף עבודה I, שמטרתו לוודא שאכן כל הסימונים וההסכמים על כללי המשחק מובנים ומיושמים. רצוי מאוד שהתלמידים ישתמשו בסרגל

ובעפרון ויתנסו בסרטוט מסלולו של הכדור תוך כדי שימוש בשיפוע הנתון ושזוית הפגועה שווה לזוית ההחזרה. במקרה זה הכדור מסיים את מסלולו בפינה D ומספר החבטות שהוא סופג שווה ל-7. אשר לאורך מסלולו של הכדור, יש לאפשר גם מדידה ישירה של אורכי הקטעים בסרגל ותשובות כגון 38.2 ס"מ. במקרה זה, בודאי התלמידים יבחינו בתשובות שונות הנובעות מהאי-רציונליות של אורך המסלול. כמובן, שאם משתמשים במשפט פיתגורס ובצורה יעילה, על ידי מציאת יתר של משולש ישר זוית בעל ניצבים 2 ו-3 השווה ל-$\sqrt{13}$ והכפלת קטע זה ב-12 נקבל את התשובה המדוייקת לאורך המסלול שהיא $12\sqrt{13}$ יחידות אורך על פיהן קבענו את מימדי השולחן (שים לב שהמשבצות אינן במידה של 1×1 ס"מ וכמו כן יש להדגיש לתלמידים שכל נסיון לתת את התשובה בצורה עשרונית שהרי זה פחות מדוייק מהצורה $12\sqrt{13}$). בשלב זה, כאשר יש להניח שהתלמידים מבינים את כללי המשחק, יש להציג את הבעיה המרכזית לחקירה:

בהינתן מימדיו של שולחן ביליארד וכדור המשוגר מהפינה A בשיפוע כלשהו, האם ניתן לנבא את פינת הסיום, את מספר החבטות שהכדור סופג במסלולו ואת אורך מסלולו? יותר מכך, האם ניתן לתכנן את מימדי השולחן עבור מסלול מסויים? או האם ניתן לתכנן את פינת הסיום ואת מספר החבטות?

מכיוון, שקטעי המסלול של הכדור הם ישרים וגם קיימת בעית מניפולציה ותיכנון, אחד הכלים המתמטיים העומדים לרשותנו הוא כלי הפונקציה ובאופן ספציפי הפונקציה הליניארית שאחד הפרמטרים שלה מתקשר לשיפוע. אי לכך, ננסה למקם את השולחן שלנו במערכת צירים ברביע הראשון כך שהדופן AB מתלכדת עם ציר ה-x והדופן AD עם ציר ה-y. נחלק את דפי עבודה II ו-III ונוודא תחילה את נכונות קביעת שיעורי הפינות A, B, C, D ומשוואות הישרים המכילים את דפנות השולחן. לגבי דף עבודה III, ניתן בשלב זה לאפשר לתלמידים לקבוע את משוואת הישרים $y = ax + b$ על פי שתי נקודות, או שיפוע ונקודה או על פי השיקולים של משמעות a ו-b כאשר נעזרים גם בשיקולי סימטריה. לדוגמא, ניתן לקבוע את משוואתו של הישר המכיל את הקטע 2 על פי שתי הנקודות (9, 6) ו-(12, 4), או על פי זה ששיפועו שלילי $\frac{3}{2}$ - ואחת הנקודות הקודמות, או על פי זה ששיפועו $\frac{3}{2}$ - ואילו b הוא 18 מכיוון שאם ממשיכים את הקטע 2 יפגוש את ציר y בגובה 18 (כפול מגובה הנקודה (9, 6) על פי שיקולי סימטריה).

להלן משוואות הישרים בדף עבודה III:

1	$y = \frac{3}{2}x$	4	$y = -\frac{3}{2}x + 6$
2	$y = -\frac{3}{2}x + 18$	5	$y = +\frac{3}{2}x - 6$
3	$y = \frac{3}{2}x + 6$	6	$y = -\frac{3}{2}x + 12$

בדרך כלל, כבר בשלב זה, מתקבלות הערות לגבי קטעים מקבילים ולגבי שינוי הסימנים של השיפוע a. ברמה מתאימה, ניתן גם לשאול מהי משוואת הקטע (לעומת הישר המכיל את הקטע), שאלה המחייבת ציון תחום, כגון עבור הקטע 5 :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 6 \\ 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

דפי עבודה IV ו-V מטפלים בשינוי של a ו-b בעקבות פגיעה של הכדור בדופן השולחן. בדפים אלו דרוש ידע בסיסי בהנדסה אויקלידית הקשור לחפיפת משולשים. בהתאם לרמת התלמידים ניתן לפרט יותר את שלבי ההוכחה בדפים אלו, למרות שהדבר כבר נלקח בחשבון. בשלב ראשון ניתנת הוכחה מסגרת ושאלות מובילות, לאחר מכן קוי עזר ורק לבסוף התלמיד מתבקש להוכיח באופן עצמאי לגמרי. להלן, ההוכחה (בקצרה) לשינוי a כאשר הכדור פוגע בדופן CD (דף עבודה IV מס' 3):

א) $MD = ND$ על פי חפיפת משולשים MDP ו-NDP (ז.צ.ז.).

ב) שיעורי הנקודות $M(0, y)$, $P(x, L)$ ואילו את שיעורי הנקודה N מוצאים על ידי שימוש בנקודה $D(0, L)$ ושאורך הקטעים $AD = MD$.
ואי לכך $MD = L - y$ ולכן גם $ND = L - y$ ואי לכך שיעורי הנקודה N הם $(0, L + L - y)$ כלומר $N(0, 2L - y)$.

ג)

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L - y}{x - 0} = \frac{L - y}{x}$$

$$a_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2L - y) - L}{0 - x} = -\frac{L - y}{x}$$

מסקנה $a_2 = -a_1$, כלומר שוב השיפועים הם נגדיים. בהמשך, התלמידים מתבקשים להוכיח את השינוי בפגיעה בדופן BC, הוכחה די דומה לזו עבור CD. המסקנה מדף עבודה IV היא שכל פגיעה באחת מדפנות השולחן משנה את סימנו של a. כך ש- $a \longrightarrow -a$ ואילו בדף עבודה V נוכחים שלגבי b יש תלות בדופן ולכל דופן יש התאמה שונה. לגבי הדופן AD ברור ש- $b_2 = b_1$. לגבי AB מקבלים $b_2 = -b_1$ ואילו לגבי הדופן CD כאשר נעזרים בשיעורי הנקודה $M(0, y)$ ו $N(0, 2L-y)$ מקבלים $b_2 = 2L - b_1$.
כדי לקבוע את השינוי של b בעקבות פגיעה בדופן BC יש להציג שאלות מובילות כפי שבדף עבודה V מס' 4. להלן ההוכחה (בקצרה):

א) שיעורי הנקודה $N(0\ ,b_1)$ על פי הנתון שמשוואת הישר 1 היא $y = ax + b_1$.

כאשר נציב במשוואת הישר את $x = \ell$, נקבל את שיעור ה-y של P, כלומר $P(\ell\ ,a\ell + b_1)$ שיעור ה-y של K שווה לזה של P ולכן $K(0\ ,a\ell + b_1)$.

ב) אורך הקטע KN נקבע על פי הפרש שיעורי ה-y של הנקודות K ו-N ולכן: $KN = (a\ell + b_1) - b_1 = a\ell$.

ג) על פי חפיפת משולשים, $KN = MK$ ולכן גם $MK = a\ell$ ומכאן שיעור ה-y של הנקודה M ששווה ל- b_2 הוא:

$$AK + MK = (a\ell + b_1) + a\ell = 2a\ell + b_1$$

ד) כמסקנה מהנ"ל $b_2 = 2a\ell + b_1$

את התוצאות של דפי עבודה IV ו-V מסכמים בעמוד הראשון של דף עבודה VI (ראה טבלה 1).

<u>טבלה 1</u>

פגיעה בדופן	שינוי a	שינוי b	משוואת הישר לאורכו נע הכדור לאחר הפגיעה
AD	$a \rightarrow -a$	$b \rightarrow b$	$y = -ax + b$
AB	$a \rightarrow -a$	$b \rightarrow -b$	$y = -ax - b$
CD	$a \rightarrow -a$	$b \rightarrow 2L - b$	$y = -ax + 2L - b$
BC	$a \rightarrow -a$	$b \rightarrow 2a\ell + b$	$y = -ax + 2a\ell + b$

חלק ב' של דף עבודה VI מתרגל את הטבלה והשימוש בתוצאות לגבי שינוי a ו-b בפגיעה בדפנות השונות (כאן רצוי להזכיר את דף עבודה III בו נתבקשו התלמידים לקבוע את משוואות הישרים ללא התוצאות הנוכחיות). משוואות הישרים עבור המסלול בדף עבודה VI ב' הן:

$$① \quad y = \frac{5}{4}x + 0$$

$$② \quad y = -\frac{5}{4}x + 2\cdot\frac{5}{4}\cdot 6 = -\frac{5}{4}x + 15$$

$$③ \quad y = \frac{5}{4}x + 2\cdot 10 - 15 = \frac{5}{4}x + 5$$

$$④ \quad y = -\frac{5}{4}x + 5$$

$$⑤ \quad y = \frac{5}{4}x - 5$$

$$⑥ \quad y = -\frac{5}{4}x + 2\cdot\frac{5}{4}\cdot 6 - 5 = -\frac{5}{4}x + 10$$

סיון, אחת מנקודות הקושי המתעוררות בפעילות זו קשורה להבנה של ההשתנות של a ו-b כל פעם בהתאם לערך הקודם של a ו b.
אשר לתנאים לגבי a ו-b שקטע המסלול $y = ax + b$ יסתיים בפינה D, שהרי במקרה הספציפי הנ"ל זה יקרה כאשר $b = 10$ ו- $a = -\frac{5}{4}$ ואילו באופן כללי עבור מסלול כלשהו כאשר $b = L$.

חלק ג' של דף עבודה VI חשוב להדגמת תכנון ראשוני של שולחנות כדי לקבל מסלול מסויים של כדור על שולחן הביליארד. כאשר מתכננים מסלול כגון זה שבסרטוט וקובעים את משוואות הישרים באמצעות טבלת השינוי של a ו-b (יש לשים לב שבשלב זה כבר לא נחוצות לנו משבצות או נקודות ביניים) אז אם נתון שיפוע, ניתן להצביע על מימדי שולחן שעליו ייווצר מסלול כזה ולמעשה אפילו משפחה של שולחנות.
לדוגמא, עבור ג. 1) משוואות הישרים הן:

$$① \quad y = ax + 0$$

$$② \quad y = -ax + 2a\ell$$

$$③ \quad y = ax + 2L - 2a\ell$$

$$④ \quad y = -ax + 2L - 2a\ell$$

$$⑤ \quad y = ax + 2(-a)\ell + 2L - 2a\ell$$

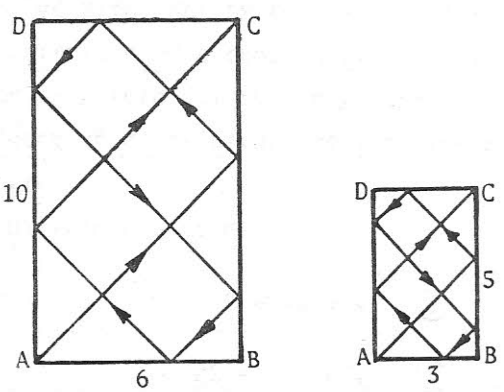
$$= ax + 2L - 4a\ell$$

(שים לב, הישר 4 הפוגע בדופן BC, שיפועו $(-a)$ וה-b שלו $(2L - 2a\ell)$ ולכן השיפוע של הישר 5 הוא נגדי כלומר (a) וה-b שלו נקבע גם על פי ה-b הקודם וגם על פי ה-a הקודם שהוא $-a$).

$$⑥ \quad y = -ax - 2L + 4a\ell$$

$$⑦ \quad y = ax - 2L + 4a\ell$$

עתה, לפי ג. 2) נתון $a = 1$ ולכן משוואת הישר האחרון 7 תהיה $y = x - 2L + 4\ell$ ואם הישר עובר בנקודה C ששיעוריה (L, ℓ) אז $L = \ell - 2L + 4\ell$ כלומר $3L = 5\ell$ ומכאן $\frac{\ell}{L} = \frac{3}{5}$. במקרה כזה, אנו מקבלים שהיחס בין מימדי השולחן צריך להיות 3:5, ולכן דוגמאות למימדי שולחן כזה הם: 3×5, 6×10, 9×15 וכו'. על ידי שימוש במספר שכבות של שקפים, ניתן להמחיש שבהינתן שיפוע מסויים ומסלול מבוקש שהרי הגדלה או הקטנה של מימדי השולחן לפי אותו יחס אינה משנה את המסלול; קרי לא משנה את פינת הסיום או את מספר החבטות שהכדור סופג (ראה ציור 2).



<u>ציור 2</u>

סעיף ג. 3) ממחיש שאם מימדי השולחן נתונים ודורשים מסלול מסויים, אז השיפוע a נקבע חד משמעית כגון במקרה זה, כאשר נציב במשוואת 7 את $\ell = 6$ ו- $L = 15$ נקבל:

$$y = ax - 2 \cdot 15 + 4a \cdot 6 = ax + 24a - 30$$

וכדי שהמסלול יסתיים בפינה C, כלומר $x = \ell = 6$ ו- $y = L = 15$

נקבל:

$$15 = 6a + 24a - 30$$

$$\Longleftrightarrow 30a = 45$$

$$\Longleftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

עד שלב זה, עסקנו בחקירה בסיסית של הבעיה, כאשר קשרנו אותה לנושא הפונקציה הליניארית ומצאנו כיצד ה-a וה-b משתנים. עתה, ננסה לגלות חוקיות שתעזור לנו לנבא ו/או לתכנן את פינת הסיום ומספר החבטות שהכדור סופג ללא סרטוט של המסלול. לצורך זה נחוץ שלב של איסוף נתונים. כדי לאסוף הרבה נתונים בדרך לא מיגעת ובמעט זמן מומלץ לחלק את הכיתה למספר קבוצות כאשר שלושת השולחנות הראשונים משותפים לכולם ובנוסף לכך כל קבוצה תאסוף נתונים על עוד שלושה שולחנות, ואכן כך בנוי דף עבודה VII עבור 4 קבוצות. פרט לאיסוף נתונים על מימדי השולחנות, פינת הסיום ומספר החבטות, מטרת שלושת השולחנות הראשונים גם להדגים מאיפוא נובע הרעיון להתיחס לאחר מכן בנפרד למספר החבטות בדפנות האופקיות של השולחן לעומת מספר החבטות בדפנות האנכיות. בשלושת השולחנות הראשונים בדף עבודה VII יש אותו מספר חבטות אבל המסלולים שונים בטבעם בעיקר באופן החלוקה של החבטות בדפנות האופקיות לעומת האנכיות.

לאחר שהתלמידים מסיימים את איסוף הנתונים מומלץ לארגן את הנתונים בטבלה כדוגמת זו הניתנת בדף עבודה VIII. מאחר שסה"כ מספר החבטות כולל גם את החבטה הראשונה בכדור וגם את האחרונה בכניסתו לאחד הכיסים בפינות נוסיף אחת מהן (במקרה זה את הראשונה) למספר החבטות האופקיות (m) ואת השניה למספר החבטות האנכיות (n). ריכוז הנתונים בטבלת הסיכום, דף עבודה VIII נתון בטבלה 2.

טבלה 2:

שולחן	פינת הסיום	סה"כ מס' החבטות	ℓ	L	מס' חבטות אופקיות כולל הראשונה m	מס' חבטות אנכיות כולל האחרונה n	$\frac{\ell}{L}$	a	$\frac{m}{n}$
1	D	7	2	9	1	6	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$
2	B	7	6	6	6	1	1	6	6
3	B	7	8	10	2	5	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
4	B	3	2	9	2	1	$\frac{2}{9}$	9	2
5	D	3	4	8	1	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
6	C	2	5	10	1	1	$\frac{1}{2}$	2	1
7	B	17	8	8	16	1	1	16	16
8	C	10	3	9	1	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
9	C	14	5	9	5	9	$\frac{5}{9}$	1	$\frac{5}{9}$
10	C	4	3	12	1	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$
11	C	6	5	9	5	1	$\frac{5}{9}$	9	5
12	D	9	6	12	1	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
13	B	5	4	7	4	1	$\frac{4}{7}$	7	4
14	C	6	3	10	1	5	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$
15	D	5	6	12	1	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

עתה יש להדגיש, שאנו רשאים להעלות השערות על סמך הנתונים בטבלה ולנסות לאמת ולעמת אותן ואפילו לאחר מכן לנסח את החוקיות והקשרים השונים.
אבל כל עוד לא ניתנת הוכחה מתימטית כללית נאמר שהסקנו את המסקנות השונות על סמך אינדוקציה אינטואיטיבית (להבדיל מן האינדוקציה המתמטית).

בדרך כלל, על סמך הטבלה, נערך דיון פורה ומעניין בעקבות שאלה ב' בדף עבודה VIII. לגבי פינת הסיום מבחינים מיד שלא ניתן לסיים את המסלול בפינה A ואכן עד כה גם לא נתקלו בדוגמה כזו. בשלב זה מנסים לתת הסברים אינטואיטיביים כגון שאם הכדור היה מסיים ב-A אז הוא היה אמור לחזור על מסלולו וכאילו לצאת מהפינה האחרונה אליה הגיע (כלומר מהכיס). לאחר הסתכלות ומיון מתאים ניתן להבחין שסה"כ מספר החבטות הוא זוגי אם פינת הסיום היא C והוא אי-זוגי אם פינת הסיום היא B או D.
מימדי השולחן בלבד אינם מרמזים על משהו מיוחד פרט למסקנה שהסקנו לפני כן שבמקרה של מימדים באותו יחס ושיגור כדור באותו שיפוע אז פינת הסיום ומספר החבטות (ולמעשה כל מסלול הכדור) אינם משתנים. כאשר בוחנים את

התוצאות בעמודות של m ו-n, מספר החבטות האופקיות והאנכיות, וקושרים זאת לסה"כ מס' החבטות ופינת הסיום מקבלים שוב שהזוגיות והאי-זוגיות משחקים תפקיד מפתח, אבל בנוסף לכך המספרים m ו-n זרים זה לזה. אם משווים את התוצאות עבור שולחנות 1 ו-2 או 4 ו-5 מבחינים שלגבי B מספר החבטות האופקיות זוגי ואילו לגבי D מספר החבטות האנכיות זוגי וכמובן עובדה זו מקבלת חיזוק מהתוצאות עבור שאר השולחנות. במקרה של הפינה C, הן מספר החבטות האופקיות והן מספר החבטות האנכיות אי-זוגי.
שלושת הטורים האחרונים בטבלת הסיכום ניתנו בסדר זה כדי לרמוז על קשר או חוקיות אפשרית ואכן לאחר זמן מה מגלים ש-

$$\frac{m}{n} = a\cdot\frac{\ell}{L}$$

או שמביעים את אותו קשר על ידי חילוק כגון $a = \frac{m}{n}:\frac{\ell}{L}$. כמו בכל פעילות, חשוב לשאול שאלות נוספות כדי לבחון ולהעמיק את ההבנה. שלוש שאלות ישירות כאלו מוצגות ב- ג'-ה' של דף עבודה VIII ומספר נוסף של שאלות תיכנון והרחבה מוצג בדף עבודה IX.

שאלה ג' בדף עבודה VIII כבר מדגימה את האפשרות של ניבוי פינת הסיום וסך הכל מספר החבטות עבור שולחן בעל מימדים נתונים ושיפוע נתון. לפי הקשר שמצאנו:

$$\frac{m}{n} = a \cdot \frac{\ell}{L}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{18} = \frac{5}{12}$$

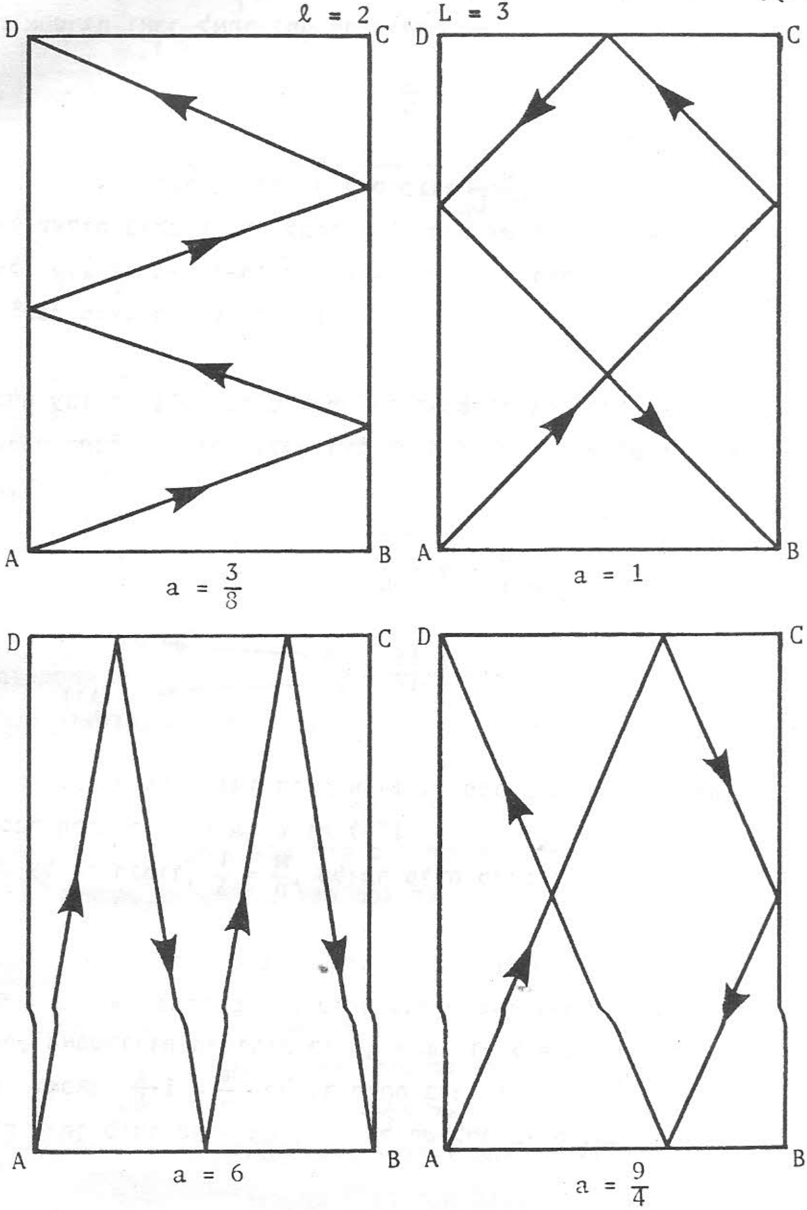
אי-זוגי

זוגי

מספר חבטות אנכיות זוגי ואופקיות אי-זוגי מצביע על פינת סיום D ואילו סך הכל מספר החבטות $m + n$ שווה ל-17.
לשאלה ד', על פי הנתון, $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, כלומר פינת סיום היא C.

אשר לשאלה ה', צריך לדעת שאם משגרים ב-45°, שהרי $a = 1$. בנוסף לכך מהנתון $m + n = 6$ והסיום ב-C ניתן להסיק ש-m ו-n איזוגיים וזרים זה לזה. לכן, האפשרויות היחידות הן $m = 1$ ו- $n = 5$ או $m = 5$ ו- $n = 1$ ומכאן $\frac{m}{n} = 1\cdot\frac{\ell}{L}$ כלומר היחס בין מימדי השולחן הוא 1:5 או 5:1. במקרה כזה ניתן לומר שאחד המימדים של השולחן פי 5 מהמימד השני.

שאלה א' בדף עבודה IX מדגימה את תיכנון שיגור הכדור על שולחן מסויים כדי שיהיה מספר חבטות מסויים. במקרה זה סה"כ 5 חבטות מצביע על סיום בפינות B או D וכמובן על כך ש- $m + n = 5$. אי לכך ישנם 4 פתרונות: $m = 1, 2, 3, 4$ ו- $n = 4, 3, 2, 1$ בהתאמה; ומכאן אם $a = \frac{m}{n} \cdot \frac{L}{\ell}$ נקבל שיפועים של $6, \frac{9}{4}, 1, a = \frac{3}{8}$ בהתאמה (ראה ציור 3). אשר לשאלה ב', פרט לענין סרטוט המסלולים השונים, שהרי היא שוב מזכירה את הענין באורך מסלולו של הכדור והאפשרות לשאול על אורך מסלול מינימלי (או לחילופין מכסימלי).



ציור 3

שאלה ג' מדגימה תיכנון של שיפוע a עבור מסלול שיסתיים בפינה מסויימת, במקרה זה B עבורה m זוגי ו-n אי-זוגי ומכיוון ש- $a = \frac{m}{n}\cdot\frac{3}{2}$ שהרי יש אינסוף תשובות בהתאם.

אשר לשאלה ד', $m = n$ רק במקרה שהיחס הוא 1:1, או $a = \frac{L}{\ell}$, כלומר רק אם נשגר את הכדור בשיפוע האלכסון של המלבן ואז סה"כ מספר החבטות הוא 2.

שאלה ה' מדגימה שאם משגרים את הכדור בזוית 60°, כלומר בשיפוע $\sqrt{3}$ (פרט לכך ש- $tg60° = \sqrt{3}$, אפשר בכיתה ט' להשיג זאת על פי תכונת הצלעות של משולש ישר זוית בעל זווית 30°, 60°, 90° ומשפט פיתגורס) שהרי אז בתנאי הבעיה שלנו הכדור ימשיך במסלולו עד אינסוף, כי לא נמצא m ו-n שלמים כך ש- $\frac{m}{n} = \sqrt{3}\cdot\frac{5}{8}$. ואכן, התוצאה ש- $\frac{m}{n} = a\cdot\frac{\ell}{L}$ כאשר m, n מבטאים מספר חבטות שלם מכתיבה את האפשרויות הבאות:

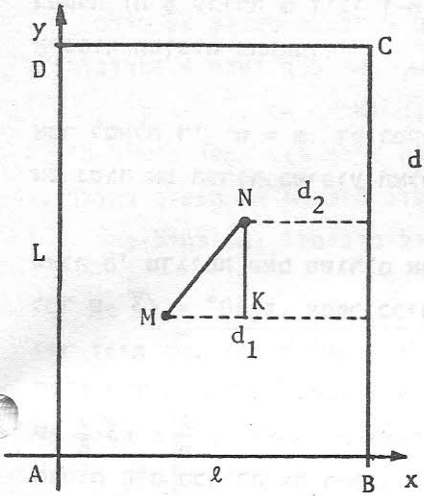
* אם a רציונלי והיחס $\frac{\ell}{L}$ רציונלי אז מסלול הכדור סופי.
* אם a רציונלי והיחס $\frac{\ell}{L}$ אירציונלי אז מסלול הכדור אינסופי.
* אם a אירציונלי והיחס $\frac{\ell}{L}$ רציונלי אז מסלול הכדור אינסופי.
* אם a אירציונלי והיחס $\frac{\ell}{L}$ אירציונלי אז מסלול הכדור יכול להיות סופי (כגון $a = \sqrt{2}$, $\ell = 1$ ו-$L = \sqrt{2}$) או אינסופי (כגון $a = \sqrt{3}$, $\ell = 1$ ו- $L = \sqrt{2}$).

יש להדגיש לתלמידים שהיחס רציונלי אינו מחייב שמימדי השולחן יהיו רציונליים, לדוגמא אם $\ell = 3\sqrt{5}$ ו- $L = 6\sqrt{5}$. אנו מפנים את הקוראים המעונינים לשבבים תיק 24 - "מתמטיקה על שולחן ביליארד" כדי לקרוא על ההשלכה של שיגור כדור בזוית רציונלית מסויימת במעלות פרט ל-45°.
הפתרונות לשאלות ו'-ט' דף עבודה IX מופיעים בנספח מס' 2 בסוף המאמר.
עתה נפנה להוכחה מתמטית המאמתת את המסקנות שהסקנו בעקבות החקירה, איסוף נתונים ואירגונם בטבלה של דף עבודה VIII.

הוכחה

הרעיון להוכחת הקשר בין מספר החבטות האופקיות והאנכיות ובין השיפוע ומימדי השולחן נובע שוב מנקודת המוצא של פונקציה ובאופן ספציפי פונקציה לינארית. באופן עקרוני אנו מסתכלים על מסלול הכדור בהתקרבותו או בהתרחקותו מאחת הדפנות האנכיות (במקרה זה BC), או בהתקרבותו או התרחקותו מאחת הדפנות האופקיות (במקרה זה CD).

תחילה נוכיח שהפונקציה $f(t)$, המתאימה לזמן t את המרחק d מ-BC היא פונקציה ליניארית במקוטעין בטווח $0 < d < \ell$.



ציור 4

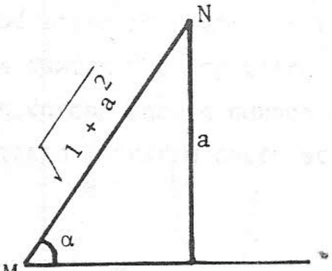
נניח שבזמן t_1 הכדור נמצא בנקודה $M(x_1 ,y_1)$ ושבזמן t_2 הכדור נמצא בנקודה $N(x_2 ,y_2)$.
נסמן את המרחק של M מהדופן BC ב- $d_1 = \ell - x_1$ ואת המרחק של N מהדופן BC ב- $d_2 = \ell - x_2$.
לפי הגדרת הפונקציה $f(t)$;
$f(t_1) = d_1$ ו- $f(t_2) = d_2$ (ראה ציור 4).

כדי לכסות על שני המקרים של התקרבות או התרחקות מהדופן, נחשב בשלב זה את הערך המוחלט של מנת ההפרשים $\left|\frac{\Delta f}{\Delta t}\right|$:

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta t}\right| = \left|\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}\right| = \left|\frac{(\ell - x_2) - (\ell - x_1)}{t_2 - t_1}\right| = \left|\frac{-x_2 + x_1}{t_2 - t_1}\right|$$

מאחר שהכדור נע במהירות קבועה v, הרי $MN = v(t_2 - t_1)$
ולכן $t_2 - t_1 = \frac{MN}{v}$ ומכאן $\left|\frac{\Delta f}{\Delta t}\right| = \frac{|-x_2 + x_1| v}{MN}$

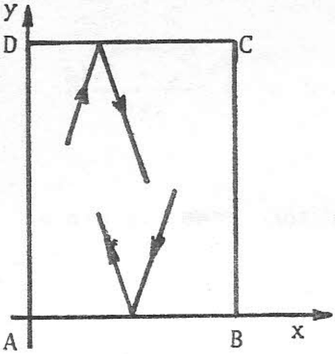
בכיתה ט' ללא ידע בטריגונומטריה, נתיחס אל המשולש MNK (ראה ציור (5)) שבו היחס בין NK ל-MK מבטא את השיפוע a בו משוגר הכדור (בעזרת טריגונומטריה $a = tg\alpha$) ולכן על פי משפט פיתגורס היחס בין $MK = |x_1 - x_2|$ ל-MN יהיה $\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$.



ציור 5

אי לכך: $$\frac{|x_1 - x_2|}{MN} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

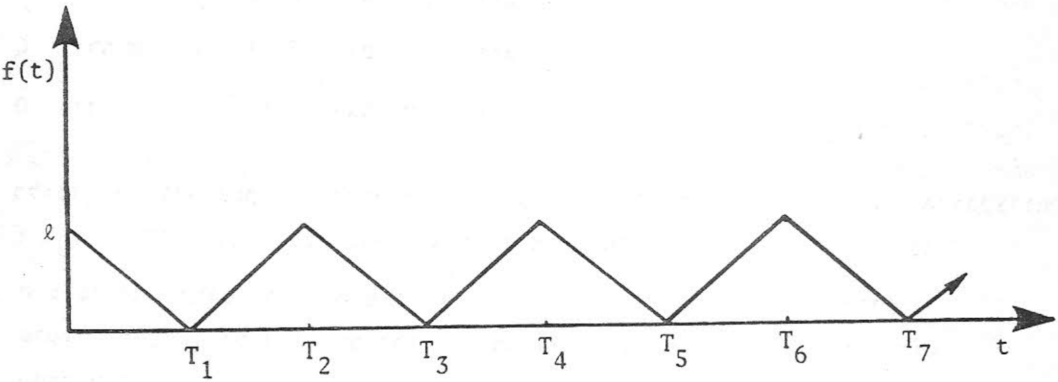
וכאשר נציב במנת ההפרשים $\left|\frac{\Delta f}{\Delta t}\right|$ נקבל: $$\left|\frac{\Delta f}{\Delta t}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \cdot v$$



ציור 6

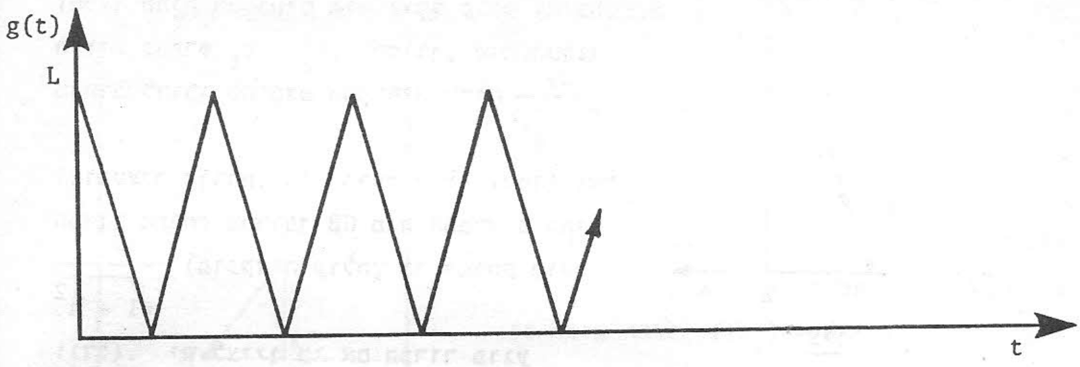
ומכאן שמנת ההפרשים היא גודל קבוע ואינה תלויה בהפרש $t_2 - t_1$. כמובן, שאם הכדור מתקרב לדופן CB מנת ההפרשים תהיה $\frac{-v}{\sqrt{1 + a^2}}$ (פונקציה יורדת, כי המרחק הולך וקטן) ואם הכדור מתרחק מהדופן CB מנת ההפרשים תהיה $\frac{+v}{\sqrt{1 + a^2}}$ (פונקציה עולה, כי המרחק הולך וגדל). יש לציין כי אם הכדור פוגע בדופן אופקית ומוחזר ממנה במסלול התקרבות אל הדופן BC או התרחקות, עדיין מנת ההפרשים תהיה גודל קבוע (ראה ציור 6).

כמסקנה מהתוצאה הנ"ל, הפונקציה f היא ליניארית במקוטעין כל עוד הכדור נע על השולחן, כאשר המרחק המינימלי הוא 0 והמכסימלי ℓ. ציור 7 מתאר את גרף הפונקציה f החל בזמן $t = 0$.



ציור 7

השיפוע של הקטע הראשון שלילי (בהתקרבות אל BC), השיפוע של הקטע השני חיובי וכך הלאה לסירוגין. אנו משאירים לקוראים לנתח את הפונקציה g(t) המתאימה לזמן t את מרחק הכדור מ-DC ולמצוא שוב שהיא ליניארית במקוטעין כאשר הערך המוחלט של מנת ההפרשים שלה הוא קבוע $\frac{va}{\sqrt{1 + a^2}}$ ואינו תלוי בהפרש $t_2 - t_1$. גם הפונקציה g היא ליניארית במקוטעין כל עוד הכדור נע על השולחן, כאשר המרחק המינימלי הוא 0 והמכסימלי L. ציור 8 מתאר את גרף הפונקציה g החל בזמן $t = 0$.



ציור 8

נניח עתה שהכדור מסיים את מסלולו באחת הפינות בזמן T, אז התנאי שהפינה היא:

A גורר ש- $f(T) = \ell$ וגם $g(T) = L$

B גורר ש- $f(T) = 0$ וגם $g(T) = L$

C גורר ש- $f(T) = 0$ וגם $g(T) = 0$

D גורר ש- $f(T) = \ell$ וגם $g(T) = 0$

כלומר, המסלול יסתיים בנקודות מכסימום או מינימום של כל אחת משתי הפונקציות f ו-g. כדי שנוכל לבטא באופן אלגברי את תנאי העצירה, נחשב את שיעורי ה-t של המכסימום והמינימום של f ו-g. על פי שיקולים גיאומטריים, שיעורי ה-t של נקודות המכסימום או המינימום של f הם nT_1 כאשר n הוא מספר טבעי.

נחשב את T_1: היות ששיפוע הקטע הראשון הוא $\frac{-v}{\sqrt{1+a^2}}$ (או על פי טריגונומטריה $-v\cos\alpha$, כאשר α הזוית בה משוגר הכדור) מקבלים על פי מנת הפרשים עבור נקודות הקצה של הקטע

$$\frac{\ell - 0}{0 - T_1} = \frac{-v}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad T_1 = \frac{\ell\sqrt{1+a^2}}{v}$$

ולכן שיעורי ה-t של נקודות מכסימום או מינימום של f הם $\frac{n\ell\sqrt{1+a^2}}{v}$ כאשר n טבעי.

ובאותה דרך נקבל ששיעורי המכסימום או מינימום של g הם $\frac{mL\sqrt{1+a^2}}{va}$ כאשר m טבעי.

הכדור יסיים את מסלולו באחת הפינות כאשר באותו זמן יתרחש מינימום או מכסימום עבור שתי הפונקציות f ו-g כלומר בתנאי:

$$\frac{n\ell\sqrt{1+a^2}}{v} = \frac{mL\sqrt{1+a^2}}{va}$$

$$\Longrightarrow \frac{m}{n} = a\cdot\frac{\ell}{L}$$

מאופן קביעת m ו-n , ברור ש-m מביע את מספר החבטות (פגיעות) בדפנות האופקיות ואילו n מביע את מספר החבטות (פגיעות) בדפנות האנכיות. יש לשים לב שבמקרה זה אין סופרים את החבטה הראשונה בכדור, אבל לעומת זאת החבטה האחרונה נספרת פעמיים (גם ב-f וגם ב-g) ולכן עדיין החלוקה השרירותית של חבטת היציאה כאופקית והאחרונה כאנכית היא נכונה.

כדי להשלים את הוכחת המסקנות שהסקנו בדרך אינדוקטיבית אינטואיטיבית (עפ"י הטבלה בדף עבודה VIII) נראה ש-m ו-n זרים זה לזה. אם לא כן, שהרי היה קיים מספר טבעי K, $K > 1$, כך ש- $m = Km'$

$n = Kn'$

ובמקרה כזה התנאי לסיום המסלול:

$$\frac{Kn'\ell\sqrt{1+a^2}}{v} = \frac{Km'L\sqrt{1+a^2}}{va}$$

כלומר

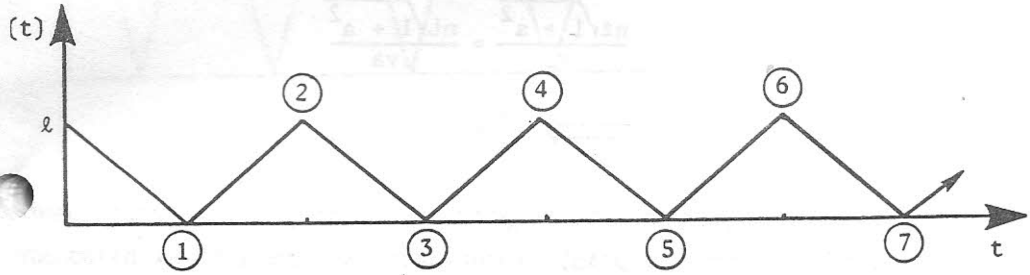
$$\frac{n'\ell\sqrt{1+a^2}}{v} = \frac{m'L\sqrt{1+a^2}}{va}$$

ומכאן שהמסלול היה מסתיים קודם, כבר אחרי m' חבטות אופקיות ו- n' חבטות אנכיות ($m' < m$ ו- $n' < n$).

נראה גם שלא יתכן שהמסלול יסתיים ב-A. כפי שראינו המסלול יסתיים ב-A אם $f(T) = \ell$ וגם $g(T) = L$ אבל עפ"י גרפי הפונקציות ניתן לראות שבמקרה זה גם m וגם n זוגיים וזאת בניגוד למה שהוכחנו לעיל שהם חייבים להיות זרים זה לזה.

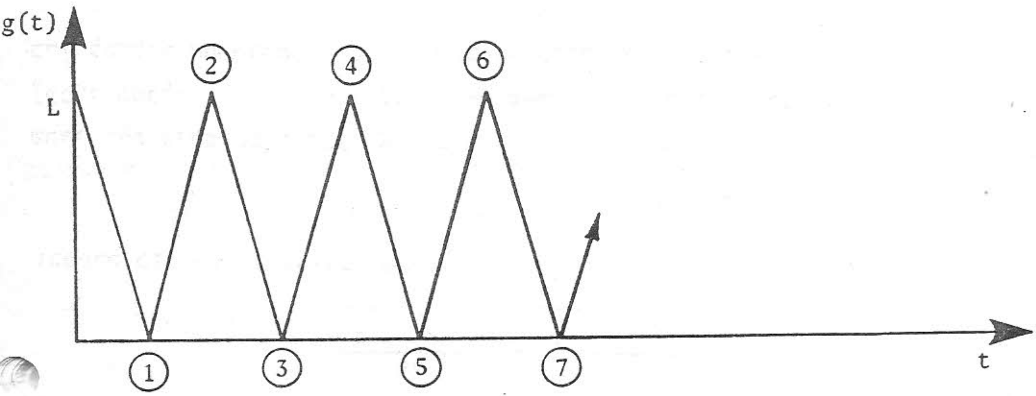
לגבי הזוגיות והאיזוגיות של m ו-n ניתן לקבוע שוב מגרפי הפונקציות והתנאים על הפינות שאם m זוגי (מכסימום של g) ו-n איזוגי (מינימום של f) הסיום יהיה ב-B.

אם שניהם איזוגיים (מינימום של f ו-g) הסיום ב-C ואילו כאשר m איזוגי (מינימום של g) ו-n זוגי (מכסימום של f) הסיום יהיה ב-D. (ראה ציורים 9 ו-10).



ציור 9

המספרים בעיגול מבטאים את מספר החבטות n בדפנות האנכיות עד לאותו זמן t



ציור 10

המספרים בעיגול מבטאים את מספר החבטות m בדפנות האופקיות עד לאותו זמן t.

אשר לאורך המסלול S של הכדור עד לסיום מסלולו שהרי אם המהירות הקבועה בה נע הכדור היא v והזמן עד לסיום T כאשר $T = \frac{n\ell\sqrt{1 + a^2}}{v}$ אז

$$S = vT = v \cdot \frac{n\ell\sqrt{1 + a^2}}{v} = n\ell\sqrt{1 + a^2}$$

ולפני כן קבלנו

$$\frac{m}{n} = a\cdot\frac{\ell}{L} \Longrightarrow a = \frac{m}{n}\cdot\frac{L}{\ell}$$

ומכאן

$$S = n\ell\sqrt{1 + a^2}$$

לכן,

$$S = n\ell\sqrt{1 + \frac{m^2L^2}{n^2\ell^2}} = \sqrt{n^2\ell^2 + m^2L^2}$$

ואם נחזור לדף עבודה I בו $L = 12$, $\ell = 6$, $m = 3$, $n = 4$ אז

$$S = \sqrt{16\cdot36 + 9\cdot144}$$

$$S = \sqrt{4\cdot144 + 9\cdot144} = 12\sqrt{13}$$

ובודאי שאם נתונים מימדי השולחן ומסלול רצוי (כגון סה"כ מספר החבטות וסיום בפינה מסויימת) נוכל לחשב את אורכי המסלול במקרים השונים ואפילו לקבוע מראש את אורך המסלול המינימלי או המכסימלי.
בכך הוכחנו באופן כללי, שוב בעזרת כלי הפונקציה הלינארית, את כל הקשרים שקבלנו לפני כן בדרך אינדוקטיבית אינטואיטיבית ובנוסף לכך גם קבלנו נוסחה לאורך מסלולו של הכדור. גם כאן אנו מפנים את הקוראים המעונינים למאמר "מתמטיקה על שולחן ביליארד" ב"שבבים" תיק 24 כדי לראות הוכחה אחרת בעזרת שיקוף.

סיכום הפעילות

לסיכום הפעילות ברצוננו להצביע על עושר המושגים והנושאים המתמטיים הכלולים בה מצד אחד ועל התהליכים המבוצעים תוך כדי עיסוק בפעילות זו מצד שני, כפי שמודגם בטבלה 3.