הערך שבהוראת הערך המוחלט

מאת: נורית הדס ואלכס פרידלנדר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

מבוא

הפתרון האלגברי של אי-שוויונים המכילים ביטויים בערך מוחלט, הוא נושא הדורש מניפולציות אלגבריות מורכבות ומתסכל תלמידים ומורים כאחד. ניקח כדוגמא את הפתרון האלגברי של אי-השוויון $|x + 2| < 4$ או (גרוע מזה...) של $|x - 4| < |x + 2|$.

במקרה הראשון, נדרש התלמיד להעביר קודם את אי-השוויון המקורי לצורת המערכת $-4 < x + 2 < 4$ ולהמשיך בפתרונה האלגברי של מערכת זו. הצלחת התלמיד בפתרונו של אי-השוויון השני היא בעייתית עוד יותר.

גם אם נתעלם מן הקשיים הטכניים שבפתרונם של אי-שוויונים מסוג זה, קיימת כאן בעיה נוספת של מניפולציות מיכאניות, שתרומתן לפיתוח החשיבה המתמטית של התלמיד תלויה בספק.

כתוצאה מכך, החלטנו בפגישה עם קבוצת מורי מתמטיקה של חטיבת ביניים לנסות לשנות את הגישה להוראת נושא זה. אחד המורים הפנה את תשומת ליבנו כי הערך המוחלט מוגדר תחילה לתלמיד כמרחק שבין הנקודה המתאימה על ציר המספרים ואפס, אך בשלבים מתקדמים יותר לא נעשה כל שימוש בהגדרה זו. ברומפיל (BRUMFIEL, 1980) מגיש במאמרו ארבע הגדרות אלטרנטיביות של הערך המוחלט. שתיים מבין הגדרות אלה מפרשות את $|a - b|$ כמרחק שבין הנקודות המתאימות על ציר המספרים, כאשר $|a|$ הופך למקרה פרטי עבור $b = 0$ (כלומר מורה על המרחק בין a ל-0). שתי ההגדרות האחרות של הערך המוחלט הן בעלות גוון אלגברי:

$$|a| = \max(a, -a) \quad \text{או} \quad |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

מצאנו, שיש אפשרות ללמד את הנושא באופן ספירלי במשך שלוש השנים של חטיבת הביניים, כאשר ההוראה מתוך גישות שונות, מאפשרת פתרון של אותה בעיה בדרכים שונות. הסתבר כי הוראה ספירלית של הערך המוחלט ניתנת להתאמה לתלמידים בקבוצות גיל וברמות ידע שונות, וכן מאפשרת שילוב וקשר בין מושגים מתמטיים כמו מרחק על ציר המספרים, גרף של פונקציה, שוויון פונקציות ותבניות פסוק.

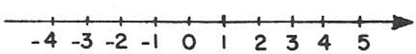
<u>הערך המוחלט כמרחק על ציר המספרים</u>

לימוד בנושאים הקשורים לציר המספרים, מציאת קבוצת אמת של תבניות פסוק ותרגום ממלים לתבניות בכיתות ז'-ח' מהווה הזדמנות טובה להצגת הערך המוחלט כמרחק בין נקודות על ציר מספרים. כך, למשל, ניתן לעסוק במציאת נקודות שמרחקן מאפס שווה, גדול או קטן ממספר נתון.

שאלות כאלה ניתן לשאול עוד לפני הכרת המושג של תבנית פסוק.

<u>תרגיל:</u>

מצא, בעזרת הציר, את המספרים שערכם המוחלט קטן מ-2.



את אותה השאלה אפשר לשאול בניסוח אחר במסגרת הנושא של מציאת קבוצות אמת של תבניות פסוק.

<u>תרגיל:</u>

נתונה תבנית פסוק: $|x| > 3$

א. מצא מספרים חיוביים ומספרים שליליים השייכים לקבוצת האמת של התבנית.

ב. סמן על הציר את קבוצת האמת של תבנית הפסוק.

בכיתה ח', ניתן לעבור להגדרה הכללית יותר של $|a - b|$ כמרחק בין הנקודות המתאימות. בשלב ראשון עוסקים בבדיקת מרחקים בין נקודות A ו B ובתרגום לתבניות מספר מתאימות.

<u>תרגיל:</u>

א. רשום בעזרת ערך מוחלט ופתור:

המרחק בין 6 ל 2:

המרחק בין 4- ל 3:

ב. השלם:

ב מ י ל י ם	תבנית מספר
המרחק בין a ל 2	____
המרחק בין 2 ל a	____
____	$|a + 3|$
המרחק בין a ל b	____
המרחק בין b ל a	____

תוך כדי תרגיל זה מומחשת גם העובדה ש: $|b - a| = |a - b|$.

בשלב זה ניתן למצוא קבוצות אמת של תבניות מהצורה:

$$|x - 1| = 2$$

$$|x - 1\tfrac{1}{2}| < 5$$

$$|x + 2| > 1$$

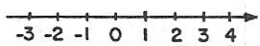
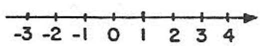
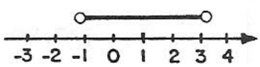
מהנסיון בכיתות מסתבר כי נוח לפתור תרגילים אלה לפי השלבים הבאים:

תרגום התבנית למלים ← מצא קבוצת אמת על הציר ← רשום את הפתרון בכתיב קבוצות

הטבלה המוצגת בדוגמא הבאה מדגישה את השלבים במציאת קבוצות אמת של תבניות פסוק עם ערך מוחלט, ונועדה לארגן את עבודת התלמיד לפי שלבים אלה.

<u>תרגיל</u>:

השלם:

התבנית	קבוצת האמת במלים	גרף קבוצת האמת	קבוצת האמת בכתיב קבוצות
א. $\|x - 2\| < 3$	מספרים שמרחקם מ ________		$\{x\|\qquad\}$
ב. $\|x + 1\| > 2$			$\{x\|\qquad\}$
ג.			$\{x\|\qquad\}$

בדרך כלל, נדרש התלמיד לתרגם ממלים לתבניות פסוק, אך במקרה זה, נוח לתרגם בכיוון ההפוך, מתבנית הפסוק למלים. כך למשל, בסעיף א' של הדוגמא, ניתן לתרגם קודם את התבנית $|x-2| < 3$ למשפט "קבוצת המספרים שמרחקם מ 2 קטן מ 3", לחפש מספרים אלה על הציר ומכאן להגיע לקבוצת האמת.

בדוגמא הבאה מוצגות שתי תבניות מורכבות יותר, אותן יוכלו התלמידים לפתור בכיתה ט' בדרך קלה יותר, אך תלמידים מצטיינים יוכלו כבר בשלב זה להשתמש בתהליך המתואר לעיל לפתרונן.

<u>תרגיל:</u>

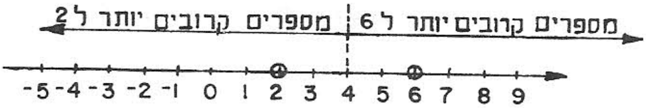
מצא את קבוצת האמת של התבניות:

א. $|x - 2| > |x - 6|$

ב. $|x - 3| + |x + 1| = 6$

בתרגיל הראשון, על התלמיד לחפש מספרים שמרחקם מ 2, על ציר המספרים, גדול ממרחקם מ 6.

בחיפוש קבוצת האמת על הציר, יש לבדוק שלושה תחומים:



$x \le 2$, $2 < x \le 6$, $x > 6$.

מבדיקת התחומים, ניתן להסיק כי רק המספרים הגדולים מ 4 מקיימים את הדרישה הנתונה, ולכן קבוצת האמת היא: $\{x \mid x > 4\}$.

באופן דומה, כדי למצוא את קבוצת האמת של התבנית השניה, נחפש על ציר המספרים נקודות שסכום מרחקיהן מ 3 ומ 1- שווה ל 6.

בחיפוש יש להתייחס לשלושה תחומים:

משמאל ל 1-: רק 2- מקיים את הדרישה,

בין 1- ל 3: אין מספרים מתאימים,

מימין ל 3 : רק 4 מקיים את הדרישה, ולכן קבוצת האמת היא: $\{4, -2\}$.

בהשוואה לדרך האלגברית למציאת קבוצות אמת של תבניות כאלה, נראה לנו כי תהליך הפתרון בעזרת שקולי מרחק משמעותי יותר מבחינת המושגים המתמטיים, מעורר מוטיבציה ודורש חשיבה מתמטית רבה יותר.

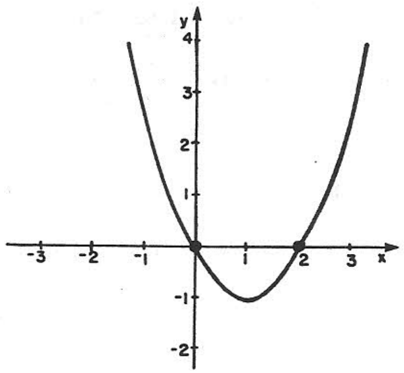
הגישה האלגברית - שימוש במושג הפונקציה

בכיתה ט', שרטוט הגרף של פונקצית הערך המוחלט, מהווה הזדמנות נוחה להביא הגדרה נוספת:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

הידע שיש לתלמידים בשרטוט גרפים של פונקציות קוויות, עוזר לשרטט את שני המרכיבים של פונקציה זו.

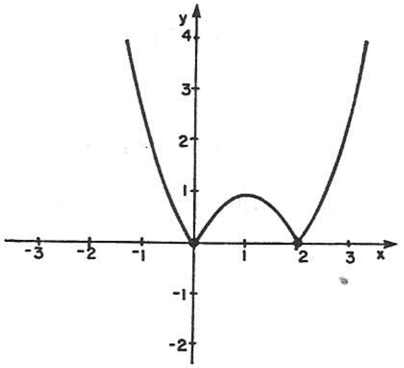
הצעד הבא בלימוד נושא הערך המוחלט הוא שרטוט הגרף של $|f(x)|$ על סמך הגרף של $f(x)$.



תרגיל:

נתון הגרף של $f(x) = x^2 - 2x$,

שרטט את הגרף של $|f(x)|$.



אחרי דיון בערכי הפונקציה $f(x)$, מגיעים למסקנה כי בין 0 ל 2 מקבלת הפונקציה ערכים שליליים, אילו הערכים הנגדיים המתאימים של $|f(x)| = |x^2 - 2x|$ ימצאו באותו מרחק מעל ציר x.

בדרך זו, מגיעים התלמידים למסקנה, כי גרף הערך המוחלט של פונקציה נתונה מתקבל מהפונקציה המקורית על-ידי שיקוף הערכים השליליים של הפונקציה לגבי ציר x או באופן כללי

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

גרפים כאלה נותנים אפשרות נוספת למציאת קבוצות אמת של אי-שוויונים.

<u>תרגיל:</u>

מצא את קבוצות האמת של תבניות הפסוק:

א. $|x - 2| < 3$

ב. $|x - 2| < |x - 6|$

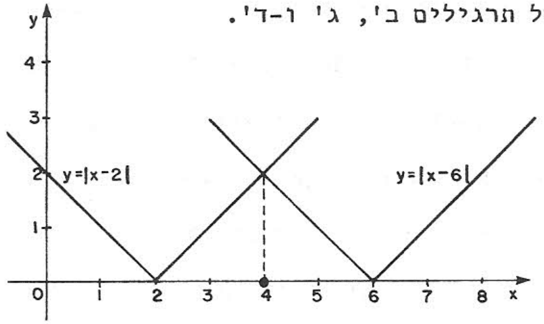
ג. $|2x - 1| \leq |x - 2|$

ד. $|x - 3| + |x + 1| = 6$

ה. $|x^2 - 5x + 6| < 1$

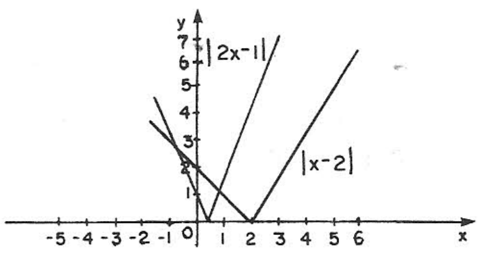
בעזרת השיטה הגרפית נוכל עתה לפתור תרגילים שנפתרו קודם בעזרת מושג המרחק (א', ב', ד') וגם תרגילים נוספים מורכבים יותר (ג', ה').

נדגים כאן פתרונותיהם הגרפיים של תרגילים ב', ג' ו-ד'.



בפתרון תרגיל ב', משרטטים תחילה את הגרפים של $y = |x - 6|$ ושל $y = |x - 2|$.

מהשרטוט קל לראות, כי אי השוויון $|x - 2| < |x - 6|$ מתקיים עבור $x < 4$.



מהגרפים המתאימים לתבנית ג' ניתן להסיק באופן דומה כי:

$|2x - 1| \leq |x - 2|$

עבור $-1 \leq x \leq 1$.

כדי לפתור את תרגיל ד' בדרך גרפית, על התלמיד לשרטט קודם את גרף

הפונקציה $f(x) = |x - 3| + |x + 1|$

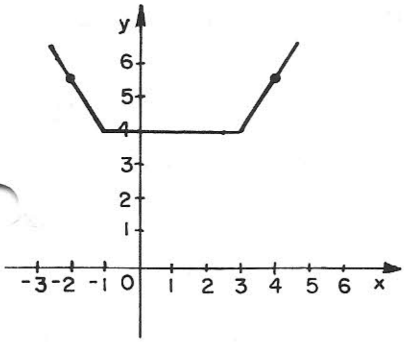
למטרה זו, כדאי לבחור ערכים

משלושה תחומים:

$x < -1$

$-1 \leq x \leq 3$

$x > 3$



לאחר שרטוט הגרף ניתן לקבוע כי: $f(x) = 6$

כאשר $x = 4$ או $x = -2$

סיכום

לאחר ביסוי של הוראת הערך המוחלט בהתאם לגישה שהובאה כאן, נוכחנו כי להוראה כזו יתרונות דידקטיים רבים:

הגישה הספירלית מאפשרת ללמד את מושג הערך המוחלט בשלבים, בהתאם להבנתו המתמטית של התלמיד, כאשר כל שלב מהווה הרחבה וגיוון של שלב קודם.

כמו כן, כל שלב חדש נותן בידי התלמיד מכשיר נוסף לפתרון בעיות שפתרונן היה קשה בשלב קודם ומרחיב את הראיה המתמטית של התלמיד.

התרגילים שהוצגו כאן מסתמכים על הגדרת הערך המוחלט כמרחק ונעזרים בהצגות גרפיות שונות על ציר המספרים ובמערכת הצירים.

בשלבים מתקדמים יותר ניתן לפתור שאלות דומות ואף מורכבות יותר בעזרת ההגדרות האלגבריות הפורמליות של הערך המוחלט.

ספרות

Brumfiel, Charles. "Teaching the Absolute Value Function". Mathematics Teacher 73 (January 1980): 24-30 .