מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולר

חוברת למורה

מס' 5

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

חוברת זו מוקדשת על ידי המחבר
לזכרו על תלמידו חיים בראון ז"ל,
שנפל במערכות ישראל.

חיים בראון השתתף בחוגים ובאולימפיאדות במתמטיקה שנערכו על ידי היחידה לפעולות נוער במכון ויצמן למדע, ואף זכה בפרסים רבים.

יהי זכרו ברוך

המספרים הנכתבים על ידי הספרה 1

פעם אחת ניגש אלי תלמיד מכיתה ט', שהשתתף בחוג שלי למתמטיקה ואמר:

''לא מזמן קראתי בעיתון כי המספר R_{317}, כלומר מספר הנכתב על ידי 317 אחדות, הוא מספר ראשוני. האם אתה מוכן לספר לנו על מספרים מסוג זה ולהביא בעיות הקשורות למספרים כאלו?''

בחוברת זו נדון במספר דוגמאות המתקשרות לשאלת התלמיד.

ב ה צ ל ח ה,

המחבר

תשרי, תשמ''ה

ערכה: צפורה ברגלס

מרסן (1588-1648), Martin Mersenne) היה מתמטקאי צרפתי. הוא השקיע מאמץ גדול מאוד בחקירת מספרים מהצורה $2^p - 1$ שבהם המעריך p הוא מספר ראשוני (למספרים אלו קוראים מספרי מרסן). מרסן שאל את עצמו מתי מספר כזה הוא ראשוני.

החיפוש של מספרים ראשוניים מהצורה הנ"ל התמקד במספרים בעלי מעריך ראשוני, שכן אם מספר $2^p - 1$ הוא מספר ראשוני, אז המעריך p הוא מספר ראשוני.

<u>הוכחה:</u> נניח שהמעריך p איננו ראשוני, כלומר p הוא מספר פריק: $p = ab$ כאשר $a > 1$, $b > 1$. מקבלים:

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$$

הביטוי $(2^a)^b - 1$ הוא ביטוי שאפשר לפרקו לגורמים שאחד מהם הוא $2^a - 1$. ואולם, בתנון כי $2^p - 1$ הוא מספר ראשוני, לכן p איננו יכול להיות מספר פריק.

אבל ההיפך איננו נכון. לדוגמא:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 89 \times 23$$

נעזוב עתה את מספרי מרסן ונחזור לשאלתו של התלמיד, בה פתחנו: אילו מספרים הנכתבים על ידי אחדות בלבד הם ראשוניים?

עד שנת 1978 נתגלו רק שלושה מספרים מסוג זה, כלומר שלושה מספרים שהם ראשוניים, ואלו הם:

$$R_2 = 11 = \frac{10^2 - 1}{9}$$

$$R_{19} = 1,111,111,111,111,111,111 = \frac{10^{19} - 1}{9}$$

$$R_{23} = 11,111,111,111,111,111,111,111 = \frac{10^{23} - 1}{9}$$

בשנת 1978 נתגלה מספר חדש מסוג זה, הנכתב על ידי 317 אחדות, והוא מספר ראשוני:

$$R_{317} = \underbrace{11,111,\ldots,111}_{\text{317 אחדות}} = \frac{10^{317}-1}{9}$$

נציג עתה לפניכם מספר בעיות שיעסיקו אתכם בבניית מספרים בעלי תכונות התחלקות שונות.

<u>בעיה 1</u>

מצא מספר בן שש ספרות המתחלק ב-2 ובעל התכונה הבאה: ניתן ליצור ממספר זה חמישה מספרים, ע"י העברת הספרה הראשונה לסוף המספר, כך שהמספרים החדשים גם הם יתחלקו ב-2.

<u>פתרון</u>:

כל מספר בן 6 ספרות המורכב מספרות זוגיות למשל: המספר 842642.

<u>בעיה 2</u>

מצא מספר בן 7 ספרות המתחלק ב-3 ובעל התכונה הבאה: ניתן ליצור ממספר זה שישה מספרים חדשים על ידי העברת הספרה הראשונה לסוף המספר, כך שהמספרים המתקבלים יתחלקו גם הם ב-3.

<u>פתרון</u>:

כל מספר בן 7 ספרות שסכום ספרותיו מתחלק ב-3 למשל: המספר 1371129 סכום הספרות מתחלק ב-3 ולכן גם המספר מתחלק ב-3. אם נשנה את סדר הספרות לא נשנה את סכום הספרות ולכן כל המספרים המתקבלים יתחלקו ב-3.

<u>בעיה 3</u>

כנ"ל עבור מספר <u>כלשהו</u> המתחלק ב-9.

<u>פתרון</u>:

אם נבחר מספר שסכום ספרותיו מתחלק ב-9 אז נקבל מספרים המתחלקים ב-9.

בעיה 4

*נתון מספר בן שלוש ספרות 629 המתחלק ב-37 (בדוק!)
נעביר את הספרה הראשונה לסוף המספר ונקבל 296. גם מספר זה מתחלק ב-37 (בדוק!). נמשיך בתהליך ונקבל את המספר 962, גם מספר זה מתחלק ב-37 (בדוק!). הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי, כלומר הוכח כי,אם נתון מספר בן שלוש ספרות המתחלק ב-37, אזי אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר נקבל מספרים חדשים שגם הם מתחלקים ב-37.*

__הוכחה:__ __נתון__ __מספר__ בן שלוש ספרות $\overline{abc}$ המתחלק ב-37. יש להוכיח שגם המספרים bca, cab מתחלקים ב-37. אם המספר $\overline{abc}$ מתחלק ב-37 אז גם $10\cdot abc$ מתחלק ב-37. ניצור הפרש $10\cdot\overline{abc} - \overline{bca}$ ונפשט אותו.

$$10(100a + 10b + c) - (100b + 10c + a)$$

$$1000a + 100b + 10c - 100b - 10c - a =$$

$$999a = 9\cdot 111a$$

המחוסר $10\cdot\overline{abc}$ מתחלק ב-37 (נתון)

ההפרש 999a מתחלק גם הוא ב-37 (לפי הפירוק: $111 = 3\times 37$)

לכן המחסר $\overline{bca}$ גם מתחלק ב-37 (מש"ל).

מכאן גם נובעת ההוכחה לגבי המספר $\overline{cab}$.

בעיה 5

נתון מספר בן תשע ספרות 267,934,601 המתחלק ב-333,667 (המנה 803). יוצרים מספרים חדשים ע"י העברת הספרה הראשונה לסוף המספר ומקבלים שמונה מספרים חדשים ואלו הם:

679346012

793460126

934601267

346012679

460126793

601267934

012679346

126793460

ומתברר שכל המספרים החדשים מתחלקים ב-333,667.

נבדוק שני מספרים:

$$679346012:333667 = 2036$$

$$793460126:333667 = 2378$$

בדוק מספר נוסף.

הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי, כלומר, הוכח, כי אם נתון מספר בן תשע ספרות המתחלק ב-333,667 אז אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר, נקבל מספרים חדשים, שגם הם מתחלקים ב-333,667.

הוכחה:

ניקח מספר בן תשע ספרות $\overline{abcdemhrp}$ המתחלק ב-333,667. יש להוכיח שגם המספרים:

$$\overline{bcdemhrpa}$$

$$\overline{cdemhrpab}$$

$$\overline{demhrpabc}$$

$$\overline{emhrpabcd}$$

$$\overline{mhrpabcde}$$

$$\overline{hrpabcdem}$$

$$\overline{rpabcdemh}$$

$$\overline{pabcdemhr}$$

מתחלקים ב-333667.

אם המספר $\overline{abcdemhrp}$ מתחלק ב-333667 אז גם $10\cdot\overline{abcdemhrp}$ מתחלק ב-333667

ניצור הפרש -

$$10\cdot\overline{abcdemhrp} - \overline{bcdemhrpa}$$

ונפשט אותו:

$$10\,(10^8a + 10^7b + 10^6c + 10^5d + 10^4e + 10^3m + 10^2h + 10r + p) -$$
$$- (10^8b + 10^7c + 10^6d + 10^5e + 10^4m + 10^3h + 10^2r + 10p + a) =$$
$$= 10^9a + 10^8b + 10^7c + 10^6d + 10^5e + 10^4m + 10^3h + 10^2r + 10p -$$
$$- 10^8b - 10^7c - 10^6d - 10^5e - 10^4m - 10^3h - 10^2r - 10p - a) =$$
$$- 10^9a - a = a\,(10^9 - 1) = a\cdot 999999999 = a\cdot 999\cdot 1001001 =$$
$$= a\cdot 999\cdot 3\cdot 333667$$

המחוסר $10\cdot abcdemhrp$ מתחלק ב-333667

ההפרש גם הוא מתחלק ב-33667 לכן המחסר $\overline{bcdemhrpa}$ אז מתחלק ב-333667
מכאן ניתן להוכיח לגבי שבעה המספרים הנוספים.

נשאלת השאלה, כיצד "ממציאים" בעיות כמו אלו שהופיעו לעיל. זאת נראה בדוגמא הבאה.

דוגמא:

נתון מספר בן חמש ספרות המתחלק במספר דו-ספרתי שהוא מספר ראשוני: יוצרים ארבעה מספרים חדשים כמו בבעיה 5, וגם הם מתחלקים באותו מספר דו ספרתי. מהו המספר הדו-ספרתי הראשוני?

פתרון:

נתון מספר בן חמש ספרות $\overline{abcde}$ המתחלק במספר דו ספרתי $\overline{xy}$ שהוא ראשוני.
המספרים המתקבלים הם: $\overline{bcdea}$ $\overline{cdeab}$ $\overline{deabc}$ $\overline{eabcd}$ וגם הם מתחלקים ב-$\overline{xy}$.
אם המספר $\overline{abcde}$ מתחלק במספר $\overline{xy}$ אז גם $10\cdot\overline{abcde}$ מתחלק ב-$\overline{xy}$.

נסתכל על ההפרש:

$$10\cdot\overline{abcde} - \overline{bcdea} = 10(10000a + 1000c + 10d + e) -$$
$$- (10000b + 1000c + 100d + 10e + a) = 100000a + 10000b +$$
$$+ 1000c + 100d + 10e - 10000b - 1000c - 100d - 10e - a =$$
$$= 99999a = 9\cdot a\cdot 11111$$

עכשיו הבעיה היא כיצד לפרק לגורמים את 11111?

נסמן: $N = 11111$

נכפול ב-7 ונקבל $7N = 77777$ ונוציא שורש ריבועי כלומר:

$$\sqrt{7N} = \sqrt{77777} = 279$$

$$\begin{array}{r|r}
 & \underline{4} \\
\times\,47 & -\,377 \\
7 & \underline{329} \\
\times\,549 & -\,4877 \\
9 & \underline{4941} \\
 & 64
\end{array}$$

קבלנו:

$$7N = 77777 = 279^2 - 64 = 279^2 - 8^2 = (279 + 8)(279 - 8)$$
$$= 287\cdot 271$$

ומכאן: $N = (287:7)\cdot 271 = 41\cdot 271$

כלומר המספר הדו ספרתי $\overline{xy} = 41$.

בהוכחה זו מצאנו מספר נוסף המהווה פתרון לבעיה נוספת. נסח את הבעיה.

<u>בעיה 6</u>

נתון מספר בן ארבע ספרות המתחלק במספר בן שלוש ספרות שהוא מספר ראשוני: יוצרים מספרים חדשים כמו בבעיה 5, וגם הם מתחלקים באותו מספר בן שלוש ספרות. מהו המספר הראשוני בן שלוש הספרות?

פתרון:

כמו בתרגיל הקודם יוצרים את ההפרש $10\overline{abcd} - \overline{bcda}$, אחרי פישוט מקבלים שההפרש הוא:

$$= 9999a = 9\cdot a\cdot 1111 = 9\cdot a\cdot 11\ 101$$

מכאן ברור שהמספר הראשוני התלת ספרתי הוא 101. מצאנו גם מספר נוסף דו ספרתי והוא 11.

בעיה 7

כמו בעיה 6 עבור מספר בן שבע ספרות המתחלק במספר ראשוני בן ארבע ספרות.

פתרון:

כמו בבעיות הקודמות. ההפרש המתקבל הוא:

$$9\cdot a\cdot 1111111$$

נפרק לגורמים את 1111111

נסמן $M = 1111111$

נכפול ב-19

$$19M = 1111111\cdot 19 = 21{,}111{,}109$$

אם נוציא שורש ריבועי משני האגפים כמו בבעיה הקודמת נקבל:

$$19M = 21111109 = 4595^2 - 2916 = 4595^2 - 54^2 =$$

$$= 4649\cdot 4541$$

$$M = 4649\cdot(4541:19) = 4649\text{x}239$$

כלומר המספר בן 4 הספרות הוא 4649

וכמו בבעיות הקודמות מצאנו מספר נוסף 239.

בעיה 8

כנ"ל עבור מספר בן שמונה ספרות.

מהו מספר המספרים הראשוניים שבהם מתחלק המספר בן שמונה הספרות?

<u>פתרון</u>:

כמו בבעיות הקודמות.

ההפרש הוא: $99999999a =$

$$= 9\cdot a\cdot 1111\cdot 10001 = 9\cdot a\cdot 11\cdot 101\cdot 10001$$

הפרוק של 10001 נעשה ע"י כפל ב-8 וההמשך כמו בבעיה 7.

לסכום נביא מספרים נוספים המורכבים מהספרה אחת אשר ניתנים לפרוק בעזרת הטכניקה שהובאה לעיל:

א) המספר 111 ניתן לפירוק על ידי חילוק ב-3

$$111 = 3 \times 37$$

אבל אפשר לכפול את 111 ב-13 ומקבלים 1443

$$\sqrt{1443} = 38$$

$$\begin{array}{r|r} & 9 \\ & \overline{543} \\ \times\ 68 & 544 \\ 8 & \overline{-1} \end{array}$$

כלומר: $13\cdot 111 = 1443 = 38^2 - 1 = 39\cdot 37$

$$111 = (39:13)\cdot 37 = 3\times 37$$

ב) את המספר 1111 אפשר לפרק כך: $1111 = 11\times 101$ אבל אפשר לכפול את המספר ב-9 ולקבל 9999

$$\sqrt{9999} = 100$$

$$\begin{array}{|r} \overline{10000} \\ -1 \end{array}$$

כלומר:

$$9\cdot 1111 = 9999 = 100^2 - 1 = 101\cdot 99$$

$$1111 = 101\cdot(99:9) = 101\cdot 11$$

בפתרון הדוגמא בעמ' 8 ראינו כיצד השיטה פועלת עבור 11111.

ברור כי תהליך מציאת המספר שבו יש לכפול את המספר המורכב מהספרה 1, כדי שהשיטה תפעל ונוכל לפרק לגורמים, הוא מייגע. אפשר להציע לתלמידים היודעים לתכנת לכתוב תוכנית מחשב ולנסות בעזרתה למצוא את הפירוק לגורמים של דוגמאות נוספות כאלו. נשמח לקבל ולהגיב על רעיונות של הפותרים.