על משמעות האותיות במתמטיקה של ביה"ס התיכון

מאת: עמוס ארליך
ביה"ס לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב

שלוש גישות

בספרי לימוד למתמטיקה שקדמו ל"תכנית הניסוי" ולספרי הלימוד לחטיבת הביניים שנכתבו בעקבותיה, מופיעות האותיות האלגבריות בשלושה תפקידים:

1. סימנים למספרים נעלמים. לדוגמה: ע"י פתירת המשוואה $2x + 3 = 15$ מתברר שהמספר הנעלם שסומן ב-x אינו אלא המספר 6.
2. "מספרים כלליים" שתכונותיהם הם התכונות המשותפות לכלל המספרים. לדוגמא,
$$(3 + 5)^2 = 3^2 + 2\cdot3\cdot5 + 5^2 \quad \text{לכן גם} \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
3. גדלים משתנים הקשורים זה בזה באופנים שונים. לדוגמא: אם $y = x^2 - 8x + 15$, אז כאשר x עולה מ-0 אל 4 y יורד מ-15 אל 1-, וכאשר x עובר את 4 מתחיל y לעלות.

מסיבות שונות, חלקן פילוסופיות-מתמטיות וחלקן פדגוגיות, דחתה "המתמטיקה החדשה" הישראלית משמעויות אלה של האותיות, ובמקומן קבלו האותיות משמעות אחת: <u>אות מסמנת מקום בתבנית, המיועד להצבת שמות פרטיים של מספרים.</u>

הערת המערכת: הדיעות המובעות במאמר זה הן של המחבר, ואינן מייצגות את מערכת "שבבים".

האות נקראת, לרוב, "משתנה", אך ברשימה הנוכחית נשתמש גם בכינוי "שומר-מקום" ולגישה המתאימה נקרא "גישת שומר-המקום". לגישה הקודמת נקרא "גישת שלושת התפקידים".

גישה שלישית תיקרא כאן "גישת ההוראה המשתנית". בגישה זאת <u>אות היא סימן שהוראתו המספרית נקבעת וניתנת לשינוי על-פי הצורך.</u>

ברשימתנו הנוכחית נראה שגישת שומר-המקום גוררת רבים מן ההבדלים שבין הלשון המתימטית הישנה ובין לשון "המתמטיקה החדשה", נראה שלפעמים עדיפה הלשון הישנה ולפעמים עדיפה הלשון החדשה, ונראה שגישת ההוראה המשתנית זוכה ביתרונותיהן של שתי הגישות האחרות ולא בחסרונותיהן.
לא נדון כאן בגישה הרואה באותיות קיצורים או תחליפים לביטויים מילוליים כגון "מספר כלשהו". כן לא נעסוק בגישה שאינה מציעה משמעות לאותיות, אלא רק דרכי חישוב באותיות ודרכי שימוש בהן.

<u>בעיות מילוליות ומשוואות</u>

בבעיה מילולית מן הסוג הפשוט אנו מתבקשים למצוא מספר מבוקש, לאור מידע שניתן על מספר זה ועל מספרים אחרים.

בגישת שלושת התפקידים נסמן את המספר הנעלם ב- x, נתאר בעזרתו מספרים אחרים הנזכרים בבעיה, והמידע על מספרים אלה יכתב כמשוואה. ממשוואה זאת נסיק משוואה אחרת, ומהמשוואה האחרת נסיק משוואה נוספת עד שנגיע למסקנה המצביעה על x בצורה פשוטה.

בגישת שומר המקום נקבע את x כשומר מקום עבור הנעלם. (הנוסח המקובל הוא "יהי x משתנה עבור המספר המבוקש". השימוש במלה "משתנה" עבור שומר המקום וההימנעות מהשימוש בכינוי "נעלם" עבור המספר המבוקש, אינם מרכיבים הכרחיים של הגישה). בהמשך נבנה תבניות מספר הכוללות את x עבור מספרים נוספים המופיעים בבעיה, כלומר - תבניות אשר אם יוצב בהן סיפרן (שם של מספר) המייצג את המספר הנעלם, יתקבלו סיפרנים המייצגים את המספרים האחרים הנזכרים בבעיה. מתבניות מספר אלה נבנה תבנית פסוק (משוואה) אשר הטענה שהמספר הנעלם ממלא אותה, מהווה תרגום של סיפור המעשה שבבעיה. (בגישת שלושת התפקידים, המשוואה עצמה היא תרגומו של סיפור המעשה).

בשלב זה עוברת תשומת הלב אל המשוואה. כל עוד לא נכתבו מספרים במקום האותיות שבמשוואה אין המשוואה מבטאת טענה, ולכן אין לדבר על מסקנות מהמשוואה. הקשר הרלבנטי הפשוט ביותר בין המשוואה הראשונה ובין המשוואות הנכתבות בעקבותיה הוא קשר של שקילות: שתי משוואות נקראות שקולות אם יש להן אותה קבוצת אמת. שרשרת שקילויות מובילה מהמשוואה הראשונה אל משוואה שקבוצת האמת שלה נראית בעליל. עבור משוואות פשוטות מתקבלת קבוצת-אמת בת איבר יחיד. איבר זה הוא איפוא, המספר שהיה נעלם.

גישת ההוראה המשתנית מתלכדת, במקרה הנדון כאן, עם גישת שלושת התפקידים, כי לא נוצר צורך לשנות את הוראתו של x. (ההוראה תשתנה רק כשנעבור לבעיה אחרת). יתרונותיהן של שתי הגישות על פני גישת שומר המקום הן:

1. x מתיחס למספר היחיד המבוקש ולא לכלל המספרים הניתנים להצבה במשוואה.

2. לכל אורך הפתירה, נושאי הדיון הם המספרים ולא התבניות.

3. בחלק המכריע של תהליך הפתירה, ההתקדמות היא מהידוע אל המבוקש, ללא צורך לבדוק בו-זמנית גם את הכיוון ההפוך. (אם לא ברור מראש שלבעיה יש פתרון נוכל לוודא זאת אחרי הפתירה).

כל מי שהתנסה בהוראה בגישת שומר-המקום יודע שלמעשה מאמצים התלמידים לעצמם את דרך החשיבה המתאימה לשתי הגישות האחרות. גם התלמידים המשתמשים במינוח החדש אומרים "משתנה" ומתכוונים לנעלם, אומרים "תבנית מספר" ומתכוונים למספר ואומרים "תבנית פסוק" וחושבים על עובדה, אומרים "שקילות" וחושבים על היסק. חסרונה האמיתי של גישת שומר המקום הוא, איפוא, בפער שבין התורה ובין העבודה.

טענות כלליות

נתבונן בנוסחה "כללית", למשל: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. גם בגישת שומר המקום וגם בגישת ההוראה המשתנית יש להקדים לנוסחה כזאת ביטוי כגון: "לכל a ו b". בגישת שומר המקום אנו מבטאים בזאת את הטענה שלכל שני מספרים, אם נציב את שמותיהם בנוסחה (= תבנית) במקום a ו-b נקבל פסוק-אמת. בגישת ההוראה המשתנית אנו טוענים בזאת שהנוסחה מתמלאת (=פסוק אמת) עבור כל זוג הוראות מספריות שייוחסו ל-a ול-b .

בגישת שלושת התפקידים אין מקדימים מילות הכללה שהרי האותיות עצמן הן "מספרים כוללים". אך מושג המספר הכולל לקוי בסתירות פנימיות וגם קשה לדימוי, כי שום עצם אינו יכול להיות בעל תכונות כלליות בלבד, וללא

תכונות פרטיות. לכן אין בעלי הגישה הישנה משתמשים במונח "מספר כולל" או "מספר כללי" אלא בשלבי הלימוד הראשונים. במהרה עוברים הם לומר "אות" ו"ביטוי כללי" או "ביטוי באותיות" שמשמעותם הולכת ומתקרבת לזו שבגישת ההוראה המשתנית.

גם הצורך להקדים "לכל a ולכל b" נראה לי יתרון של גישות שומר המקום וההוראה המשתנית, כי בדרך זו אנו אומרים ישירות שמדובר במערכת של מקרים פרטיים. לנקודת מבט זאת יש יתרון, בין השאר, כאשר נרצה להסיק מהטענה שלעיל את

לכל a , $(2a^2 + 3a)^2 = (2a^2)^2 + 2 \cdot 2a^2 \cdot 3a + (3a)^2$

ההסבר: כל מקרה פרטי של הטענה האחרונה הוא גם מקרה פרטי של קודמתה. נסה נא להסביר את ההיסק המקביל בגישה שבה האות a מסמנת משהו כללי.

<u>הערה:</u> באותן גירסאות של גישת שומר המקום בהן כותבים "התבניות $(a + b)^2$ ו- $a^2 + 2ab + b^2$ הן שוות ערך" או "$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$" במקום "לכל a ו-b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" מתבזבז חלק מן היתרון של הגישה.

<u>מקרה מורכב - פרמטרים וקבועים</u>

נתבונן במשפט הבא:

יהיו נתונים p ו-q כלשהן (="לכל p ולכל q")

אם x_1 ו-x_2 הם פתרונותיה של המשוואה $x^2 + px + q = 0$

אז (לכל x), $x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

בכל גישה נצטרך להקדים מקרה פרטי. למשל, נצא מן המשוואה $x^2 - 8x + 15 = 0$. נמצא שפתרונותיה הם 3 ו-5, ונראה שלכל x,
$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$.

הבהרת הנוסח הכללי תשתנה מגישה לגישה.

בגישת ההוראה המשתנית יוצג הנוסח הכללי כך:

p ו-q הם הראשונים לקבלת הוראות מספריות ספציפיות. מספרים אלה קובעים, עד כדי חילוף תפקידים, את הוראותיהם של x_1 ו-x_2, שיהיו שתי ההוראות האפשריות של x המקיימות את המשוואה.

עבור הוראות אלה של p, q, x_1 ו-x_2, ועבור <u>כל</u> הוראה של x, מתמלא השוויון האחרון.

בגישת שומר המקום שתי השורות האחרונות שבמשפט, הן תבנית-פסוק במשתנים p ו-q (אנא אל תאמרו זאת לתלמידים). p ו-q הם המשתנים הראשונים שבמקומם יוצבו שמות מספרים. מכיון שבהמשך הכיוון נמשיך לכתוב p ו- q, נקרא למשתנים אלה "פרמטרים" ונבהיר שבפועל מתיחסים אליהם כאילו היו שמות מספרים. (לאמיתו של דבר, אחרי כתיבת הכמתים "לכל" או "קיים" או תחליפיהם, נוכל תמיד להתיחס אל משתנה כאל סיפרן).

ענינם של x_1 ו-x_2 קצת יותר בעייתי. לו היינו נכונים לשלם מחיר מופרז עבור הדבקות בגישת שומר-המקום, היה עלינו לראות בשתי המשוואות המופיעות במשפט שתי תבניות פסוק במשתנים x_1 ו-x_2, הנקשרות זו לזו ע"י "אם-אז", בעקבות זאת היה עלינו לדבר על יחס הכלה בין קבוצות האמת שלהן, או להקדים "לכל x_1 ו-x_2" ולדבר על גרירה שבין פסוקים. מכיון שאין אנו

רוצים לאבד את כל התלמידים בבצע נסיגה בכיוונה של גישת ההוראה המשתנית, ונאמר ש- x_1 ו-x_2 אינם משתנים אלא קבועים שערכם נקבע ע"י p ו-q.

בגישת שלושת התפקידים נציע לתלמידים לנסות להבין את המשפט הכללי מתוך הדוגמא. איני רואה דרך אחרת להבהיר את תוכנו של המשפט בגישה זאת, כי על-פיה p ו-q הם "מספרים כוללים", x הוא נעלם בשלב הראשון ו-"מספר כוללי" בשלב השני; ואילו x_1 ו-x_2 הם מספרים מסוימים, אבל הם תלויים ב-p וב- q ולכן הם כלליים ואולי גם משתנים. יתר על כן, בשלב הראשון x_1 ו-x_2 הם שני מספרים אשר אחד מהם הוא הנעלם x, ובשלב השני אין x שווה להם יותר משהוא שווה לכל מספר אחר.

<u>משתנה חפשי ומשתנה תלוי</u>

אם בתכנית שבשפת בייסיק, בגירסת TI 99, נכתוב שורה:

```
10 DEF   Y = x * x - 8 * x + 15
```

וכן אם בקובץ שבשפת לוגו נכתוב פרוצידורה:

```
OUTPUT  :x * :x - 8  * :x + 15
END
```

אז כל אימת שתהליך החישוב יזדקק לערכו של y במקום אחר בתכנית או בקובץ, הוא ייחס לו את הערך המתאים, שיקבע ע"י הערך שיהיה ל-x באותו זמן.

הקדמה זאת באה על מנת להבהיר שאין פסול עקרוני במושגים משתנה חופשי ומשתנה תלוי. עוצמתם של מושגים אלה באה לידי ביטוי אצל כלל השרשרת

(גזירת "פונקציה של פונקציה"), אצל החלפת משתנה אינטגרציה, בהצגה פרמטרית של עקום או של מערכת פתרונות, ואפילו בפתירת משוואה כגון:

$$(x^2 - 8x + 15)^2 + 5(x^2 - 8x + 15) + 6 = 0$$

כותב שורות אלה אינו מציע שמושג המשתנה התלוי יחזור וידחה את מושג הפונקציה הנמצא בשימוש כה רחב במתמטיקה החדשה (תחום, טווח והתאמה מן התחום אל הטווח). וודאי שאין לכפור בעצמתו של הסימון $f(x)$. עם זאת אבקש לשמור על האפשרות לבטא כל רעיון בשפה הנוחה לו.

הנוסח " $y_2 \simeq y_1 + y' \cdot \Delta x$ " עדיף על פני הנוסח " $f(x+h) \simeq f(x) + h \cdot f'(x)$ "

(איך נכתוב כאן? y' או y'_1 או $(y')_1$ או $y'_{x=x_1}$?)

אך הנוסח: "אם הקשר שבין x ו-y ניתן על-ידי $x^2 + y^2 = 25$ (עם או בלי התנאי $y > 0$)

אז, ע"י גזירה לפי x: $2x + 2y\,y' = 0$

לכן: $y' = -\frac{x}{y}$ "

עדיף על פני הנוסח:

"אם f מתאימה לכל x שבין 5 ו- -5 את הערך החיובי של y הממלא, יחד אתו, את $x^2 + y^2 = 25$

נסמן: $G: x \longmapsto x^2 + (f(x))^2$

ואז לכל x שבין 5 ו- -5, $G(x) = 0$

וגזירה תיתן: $2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$

לכן: $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ "

הנוסח הראשון עדיף גם על נוסח המתקבל מן הנוסח האחרון על-ידי החלפת שתי השורות בהן נזכר G בשורה אחת:

"אז לכל x, $x^2 + (f(x))^2 = 25$".

בגישת ההוראה המשתנית נקבל משתנה תלוי על-ידי קביעה כגון "נסמן $y = x^2-8x+15$"
ואז הוראתו של y נקבעת באופן אוטומטי על ידי קביעת הוראה ל-x
(והוראת y' נקבע ע"י משחק מתאים בהוראות שונות ל-x).

בגישת שומר המקום נוכל לקבוע לזוג משתנים (y, x) __תחום ייעוד__ המוגבל על-ידי שוויון כנ"ל; ואז כל הצבת מספר במקום x, בין אם מבצעים אותה בפועל ובין אם לאו, קובעת את מה שיש להציב במקום y.
נראה שהצעה מעין זו נראית מסורבלת מדי בעיני הנוקטים בגישת שומר המקום. במקום להגדיר משתנה תלוי כנ"ל הם מעדיפים לסמן באות (F, G, T). את __התבנית__ "$x^2 - 8x + 15$" או לדבר על הפונקציה המוגדרת ע"י התבנית.

כאשר לשונות אלה מביאות לניסוחים כבדים מדי, מציעים במקומם נוסחים הדומים בצורתם החיצונית ללשון הישנה, בלווית הבהרה שניסוחים אלה אינם אלא קיצורי-לשון, ופירושם הנכון מתיחס לפונקציות.
יכול אני להעיד שהמעבר ללשון המקוצרת איננו מקשה על התלמידים. אך דרכה של לשון להשפיע על המחשבה. במקרה הטוב נגיע, בדרך עקיפין, אל גישת ההוראה המשתנית: הערך של y נקבע על-ידי מה שהוצב במקום x. במקרה הרע נגיע אל גישה שיש בה מספרים מרובי-זהות.

__השימוש בספרים הקיימים__

גישת ההוראה המשתנית מאפשרת לנו להשתחרר מביטויים חסרי מובן שבספרים הישנים ומנוסחים מסורבלים שבספרים החדשים. עם זאת אין היא מחייבת אותנו לנטוש ספרים אלה או אלה, אלא להשתמש בהם בדרך מבוקרת.

לעולם אין ללמד "את ספר הלימוד". אנו עוסקים בהוראת מתמטיקה ולא בהוראת טקסט. בקטעים בהם יש ניגוד גמור בין הכתוב בספר ובין גישת ההוראה המשתנית, התעלם מהכתוב בטפר הלימוד (אם צריך, אמור לתלמידים שגישתך שונה במקצת מזו של מחברי הספר). בספרי הלימוד של התכניות הישנות, קטעים אלה מעטים ביותר.

ספרי "המתמטיקה החדשה" מרבים בהסברים, ולכן יש בהם יותר הזדמנויות לניגוד בין הגישות, אך בדרך כלל ניתן להשתמש במונחים החדשים גם במסגרת גישת ההוראה המשתנית. ספר בגישת ההוראה המשתנית יעדיף, מן הסתם, את "ביטוי מספרי באותיות" או "ביטוי פתוח" על פני המונח "תבנית-מספר", ויעדיף את "פסוק פתוח" על פני "תבנית פסוק"; אך מורה יכול להשתמש גם במונחים אשר בספר שבידי תלמידיו. תבניות תהיינה ביטויים שהוכנו על מנת לצקת בהם הוראות מספריות. ההבדל שבין הגישות יבוא לידי ביטוי בעיקר באותם מקרים שבהם גישה אחת מדברת על תבניות המספר או על תבניות הפסוק ואילו הגישה השניה מעדיפה לדבר על המספרים או על הטענות. "תחום הצבה" נשאר כשר כשם שההצבה עצמה נשארת כשרה. וכי למה לא נהיה רשאים להציב שם-מספר מפורש במקום האות המקבלת אותה הוראה? יתר על כן, גם מתן הוראה מספרית למשתנה יכולה להקרא "הצבה". הביטוי "נציב $5 = x$" יהיה איפוא, כשר למהדרין. במושג "קבוצת אמת" נשתמש בעיקר במקומות בהם הצד הקבוצתי הוא החשוב. למשל, כאשר קבוצת האמת מתקבלת על-ידי איחודים וחיתוכים של קבוצות אמת של תבניות פשוטות, או כאשר עוסקים בגרפים. במקרים האחרים נדבר על פתרונות.

וכמובן, כאשר קיצורי-לשון של "המתמטיקה החדשה" הם בעלי מובן ישיר בגישתנו, נציג בפני התלמידים את המובן הישיר.