חָשׁוּב לַחשׁוֹב כְּשֶׁמְּחַשְּׁבִים בְּמַחְשֵׁב הַכִּיס

מאת: נורית הדס ואברהם הרכבי
מכון ויצמן למדע

מומלץ לקרוא מאמר זה תוך כדי פעילות במחשב כיס מדעי.

מ_ב_ו_א

שימוש נפוץ במחשבי כיס הוא כתחליף ללוחות של פעולות החשבון: לוח כפל, לוח חזקות ושורשים, לוח לוגריתמים וכדומה. בתחום זה הדורש יעילות בחישוב, מחשב הכיס הוא ללא ספק כלי בעל עצמה רבה.
נשאלת השאלה האם אין אפשרות לנצל את עוצמת הכלי כדי לעורר בעיות מתמטיות וללמד בעזרתן עקרונות שונים.

במאמר זה נציג דוגמא של יחידת לימוד בה השימוש במחשב כיס מפגיש את התלמיד עם בעיות מתמטיות ודרכי חקירתן, עמן לא היה נפגש בדרכים אחרות. היחידה קשורה בפרק החזקות* ועוסקת במספרים גדולים ובדרך כתיבתם במחשב הכיס, תוך הכרת אופן הפעולה של מחשב הכיס.

שלד היחידה הוא:
תוך כדי פתרון בעיה (או תרגיל) בעזרת מחשב הכיס,התלמיד ניתקל בתוצאות לא מובנות לו. בשלב זה הוא מתבקש לחפש דרך מתמטית כדי לגלות את פרוש התוצאות שהתקבלו. תוך כדי החקירה הזו הוא מגלה בנוסף, גם חוקים או הסכמים מתמטיים שאינו מכיר ושמחשב הכיס עובד על פיהם. (ההסבר המתמטי מובא רק לאחר גילוי ההסכם או החוק).

*היחידה מתאימה לתוכנית הלימודים של חטיבת ביניים, והנושא מטופל ב: מחשבונים II - חוברת ומדריך למורה, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות.

מבנה היחידה

היחידה מתחילה בתרגיל אשר לתוצאתו אין מקום על המצג:

חשב את ערכו של x בעזרת מחשב כיס $x = 99,999,999 \cdot 101$

תרגיל זה, בו שמונה ספרות 9 בגורם הראשון, מתאים למחשב כיס לו שמונה מקומות על המצג.

התוצאה המתקבלת על המצג היא מהצורה $\boxed{1.01 \quad 10}$.

תלמיד שאינו מכיר סימון זה, אינו מבין את הרשום על המצג. תוך כדי דיון בכיתה עולה הרעיון לאמוד את תוצאת התרגיל ולהשוות עם הרשום על המצג.
האומדן שהתלמידים עושים הוא למשל מהצורה:

$$x = 10^8 \cdot 10^2 = 10,000,000,000$$

מכאן מגיעים למסקנה, שהתשובה נרשמה במחשב הכיס בצורה $\boxed{1.01 \quad 10}$.
מאחר ולא היה מספיק מקומות על המצג כדי לרשום את התוצאה בכתיב רגיל.
כמו כן מסיקים כי יש למחשב הכיס דרך לרשום מספרים גדולים, גם כשאין מספיק מקום לרושמם בכתיב רגיל.

תלמידים אחדים יקשרו בין התוצאה שהתקבלה על המצג $\boxed{1.01 \quad 10}$ לבין תוצאת האומדן 10^{10}.
שאר התלמידים מקבלים תרגילי חקירה נוספים אשר בעזרתם יוכלו לבדוק ולפרש כיצד נרשמים מספרים גדולים במחשב הכיס:

מצא תרגיל שתוצאתו 480,300,000,000 ובצע אותו במחשב הכיס.

התלמידים רושמים תרגילים פשוטים כמו:

$$483,000 \cdot 1,000,000 =$$

או:

$$483 \cdot 10^9 =$$

בכל מקרה התקבלה על המצג התוצאה $\boxed{4.83 \quad 11}$.

לאחר בדיקת מספר תרגילים כאלה התלמידים מגיעים למסקנה שמספר כזה פרושו $4.83 \cdot 10^{11}$ ושהמחשבון רושם מספרים כאלה כמכפלות מהצורה:

$$a \cdot 10^n \quad , \quad 1 \le a < 10 \quad , \quad n \text{ טבעי}$$

לתלמידים המתקשים להגיע למסקנה, מציעים תחילה תרגילים פשוטים יותר:

רשום תרגיל אשר תוצאתו:

א)	1,000,000,000
ב)	10^{20}
ג)	$483\cdot10^{8}$

כעת חוזרים לתרגיל המקורי שתוצאתו במחשב הכיס היתה $\boxed{1.01 \quad 10}$ ומתרגמים את הרשום ל $1.01\cdot10^{10}$, תוצאה קרובה לתוצאת האומדן 10^{10}.
לאחר שהתלמידים מבינים כיצד רושם מחשב הכיס מספרים גדולים, יש לציין בכיתה שהמכשיר תוכנת לרשום מספרים גדולים כמכפלות של מספר בין 1 ל 10 בחזקה של 10 מאחר וזה ההסכם המקובל לכתיבת מספרים כאלה.

בשלב זה מלמדים שמספרים גדולים יכולים להתקבל על המצג גם על-ידי **רישום** ישיר ולא רק כתוצאת פעולה בין שני מספרים:
רושמים מספרים כאלה ישירות בעזרת הכפתור Exp (או במחשבים אחרים EE).

כדי ללמד זאת מציעים לתלמידים לפתור את התרגיל:

בצע את סדרת הלחיצות ורשום במשבצות שמתחת לסדרה, מה מופיע על המצג לאחר הלחיצה המתאימה.

	7	*Exp*	12	=
על המצג:			7. 12	7. 12
	700	*Exp*	20	=
על המצג:			700. 20	7. 22

עד עכשיו עסקה היחידה בלימוד קריאה וכתיבה של מספרים גדולים במחשב כיס.
לחלק השני של יחידה זו העוסקת במספרים גדולים, מבנה דומה לחלקה הראשון: תוצאה בלתי מובנת או בלתי הגיונית, מובילה לחיפוש דרך מתמטית לפרוש התוצאה, תוך גילוי תכנים מתמטיים הקשורים לעבודה במחשב כיס (דיוק, קירוב, שגיאה וכו').

מתחילים בתרגיל:

הצב בתבנית:	$p^2 - 2q^2$
	$p = 665857$
וחשב.	$q = 470832$

לאחר החישוב דנים בשאלה אם התשובה שהתקבלה מדויקת.

במחשבונים שהיו בכיתה בה היינו, התקבלו תוצאות שונות:
0 או 40- (מה קיבלת את/ה?)

מנחים את התלמידים, בעזרת שאלות, להסיק שהתוצאה אינה מדויקת. למשל:

מהי ספרת האחדות של 665857^2 ושל $2\cdot470832^2$?

מאחר וספרת האחדות של 665857^2 היא 9 ושל $2\cdot470832^2$ היא 8, התוצאות שנתקבלו במחשב הכיס מעוררות תמיהה.

בעקבות תוצאה זו ועל-פי מה שנלמד בחלק הראשון של היחידה, התלמיד מסיק שחוסר מקום על המצג הביא במקרה זה לתוצאה בלתי מדויקת, כנראה בגלל עיגול.

בשלב זה מנחים את התלמידים למצוא את התוצאה המדויקת, בעזרת מחשב הכיס. כיון שמטרתנו היא לעסוק בבעיות מתמטיות העולות מהעבודה עם מחשב הכיס, תוך כדי הכרת הכלי, מוצעת כאן סדרה של פעילויות העוזרות לחישוב התוצאה המדויקת של התרגיל ובמקביל עוזרות לתלמיד לגלות עובדות חדשות לגבי דרך העבודה של מחשב הכיס.
לשם כך משאירים את הדיון בתשובה המדויקת של הצבה בתרגיל המקורי $(p^2 - 2q^2)$ לשלב מאוחר יותר ומבקשים מהתלמידים לבצע את ההוראות הבאות:

א. *חשב במחשבון:* $12345 \times 12345 =$

ב. *<u>מבלי למחוק, או להשתמש בזכרון מחשב הכיס</u>, החסר את התוצאה שהתקבלה על המצג.*

כלומר השלם את "סידרת הלחיצות":

א					ב			
12345	×	12345	=	-	1.52399	Exp	8	=
1.52399 08								25

ג. *הסבר את התוצאה שקיבלת.*

(הערה לסעיף ב' של השאלה: כדי לחסר, על התלמיד להשתמש בכתיב החזקות ובצורת הכתיבה שלמד קודם, מאחר והתוצאה שהתקבלה על המצג לאחר ביצוע א', רשומה בכתיב חזקות).

תוך כדי דיון בפרוש התוצאה, מגיעים למסקנה שלא הוחסר מספר מעצמו. כלומר, המספר שרשום על המצג כתוצאה של 12345^2, שונה מהמספר שהמחשב שומר בייצוגו הפנימי, אותו מתבקש התלמיד לגלות:

על סמך התוצאות שהתקבלו בסדרת הלחיצות האחרונה, כתוב את התוצאה המדויקת של 12345^2.

התוצאה היא:

$$12345^2 = 1.52399 \cdot 10^8 + 25 = 152,399,025$$

בדרך זו ניתן להגיע או לתוצאה המדויקת או, במקרים אחרים, לקירוב טוב יותר של התוצאה.

בצורה דומה, מתבקש התלמיד למצוא את התוצאה המדויקת של התרגיל המקורי $p^2 - 2q^2$. לשם כך הוא מחשב בדיוק את p^2 ואת $2q^2$:

בחלק ממחשבי הכיס בכיתה שלנו התקבלה התוצאה:

$$p^2 - 2q^2 = 4.43365 \cdot 10^{11} + 544400$$

לכן ההפרש שהתקבל, במחשבי הכיס האלה, היה 0 .

במחשבי כיס אחרים התקבלה התוצאה:

$$p^2 = 4.4337 \cdot 10^{11} - 4455600$$

$$2q^2 = 4.4337 \cdot 10^{11} - 4455560$$

לכן ההפרש שהתקבל במחשבי הכיס האלה, היה 40-. בכל מחשבי הכיס שהיו בכיתה היה צורך לחשב את שתי הספרות האחרונות.
מאחר והתלמידים יודעים שהספרה האחרונה של ההפרש היא 1, יש לגלות רק את ספרת העשרות של התוצאה.
התלמידים מתבקשים לקבוע אלו מהפעולות בתרגיל הן בעלות השפעה על ספרת העשרות ואותן לחשב.

כשהצענו לראשונה למצוא את התוצאה המדויקת של התרגיל $p^2 - 2q^2$, היו תלמידים שנעזרו במחשב הכיס כדי לבצע את החישוב המדויק של כל 6 הספרות האחרונות. תלמידים אלה נוכחו כעת, שלמעשה מספיק החישוב של ספרת העשרות.

ס י כ ו ם

הצגנו כאן מבנה של יחידה: תוצאה לא מובנת, או לא הגיונית, המתקבלת תוך כדי פעילות במחשב הכיס, חקירת התוצאה, לימוד נושא מתמטי חדש והכרה מעמיקה יותר של מרשב הכיס על יתרונותיו ומגבלותיו.

מבנה זה יכול להתאים לנושאים שונים בתכנית הלימודים:
לימוד הסכמים של סדר פעולות החשבון*, מציאת שורשים, שברים עשרוניים מחזוריים וכו'.

המבנה משלב מרכיבים רצויים של הוראה:
לימוד תוך גילוי וחקירה מודרכת ולימוד תוך עשייה במשולב עם הכרת אופן הפעולה המתמטית של מכשיר.

אולי בכך טמונה אחת האפשרויות לניצול עוצמתו החינוכית של מחשב הכיס.

*הנושא שייך לתכנית הלימודים של חטיבת הביניים והוא מטופל ב: *מחשבונים I חוברת ומדריך למורה, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, רחובות.*