מה לארנבות ולפתרון משוואות?

מאת: ברוך שוורץ
מכון ויצמן למדע, רחובות

סדרת פיבונצ'י מוכרת כמעט לכל תלמיד שלמד בקורס מבוא לתכנות. במאמר זה "נחזיר" את פיבונצ'י למסגרתו המתמטית.

Leonardo da Pisa המכונה בשם FIBONACCI הינו אולי גדול המתמטיקאים של ימי הביניים. אביו היה סוחר בפיזה והירבה להפליג בין איטליה וצפון אפריקה. מסיבה זו, לאונרדו חונך בצפון אפריקה, פגש הרבה מדענים ערביים, ולמד את שיטות החישוב הנהוגות במסחר. בין כל השיטות, הוא גילה כי שיטות הערבים היו הכי מתקדמות. בשובו לפיזה כתב ספר חשוב, ה "LIBER ABACI" בו מושוות שיטות הספירה הרומאית והערבית. הודות לכך הוא הכניס השיטה העשרונית למערב, והפיץ את כתבי אוקלידס (שהיו אז ידועים רק דרך תרגומים בערבית). ברם תפקידו לא הצטמצם להעברת ידע אלא הוא הצטיין בפתירת משוואות בתורת המספרים.

נתעניין, במאמר זה, בתכונה אחת של סדרת FIBONACCI וכן בסדרות המהוות הכללתה. נעזר בתכונה הזו כדי לענות לשאלה החשובה הבאה: <u>איך לפתור משוואות שמעלתן גבוהה מ-2?</u>

במאמר חמישה פרקים:

1. על ארנבות וסכנת התפשטותן.
2. השאלות והתשובות של יעקב ברנולי (1654-1705).
3. על פתרון משוואות ממעלה גבוהה מ-2.
4. ביצוע מעשי בעזרת המחשב.
5. נספח.

בפרק השלישי שהוא תאורטי, ההוכחות לא נכללו והקורא הסקרן יפנה לנספח.

את התרגילים המופיעים בפרק הרביעי רצוי לבצע הלכה למעשה בעזרת מחשב.

1. על ארנבות וסכנת התפשטותן

ב "LIBER ABACI" מופיעה הבעיה הבאה:

זוג ארנבות ממליט מהחודש השני להוולדם זוג ארנבות מדי חודש בחודשו. זוג הארנבות הנולדות מורכב תמיד מזכר ונקבה אשר ממליטים בעצמם, מהחודש השני להיוולדם, זוג חדש כל חודש.

כמה זוגות ארנבות קיימים אחרי n חודשים?

הטבלה הבאה מרכזת את התוצאות הראשונות:

מספר החודשים	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
מספר הזוגות	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

קל לציין תכונה מעניינת: מספר הזוגות בחודש $n-1$ ועוד מספר הזוגות בחודש $n-2$ שווה למספר הזוגות בחודש n.

נסמן את מספר הזוגות בכל חודש על ידי סדרה $\{a_n\}$.

הסדרה $\{a_n\}$ מקיימת איפוא:

עבור $n \geq 2$,
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

אחת השאלות הטבעיות הראשונות היא מהו קצב עליתה של הסדרה.

ארנבת מלומדת הייתה אומרת: מהו שיעור הילודה החודשי במשפחה?

שיעור הילודה במין האנושי נמדד כמספר הלידות בשנה עבור אוכלוסיה של אלף איש. אבל עבור ארנבות שיעור כזה יהיה אינפלציוני אפילו אם נצמצם את פרק המדידה לחודש אחד; לכן הדמוגרפים שבין הארנבים החליטו להסתפק בחישוב המנות הבאות:

$$\frac{a_1}{a_0}\ ,\ \frac{a_2}{a_1}\ ,\ \frac{a_3}{a_2}\ ,\ \frac{a_4}{a_3}\ ,\ \ldots$$

המנות הללו מודדות באופן ארנבי ברור את קצב הילודה החודשי.

התוצאות הראשונות הן כדלהלן:

$$a_1/a_0 = 1$$

$$a_2/a_1 = 1$$

$$a_3/a_2 = 2$$

$$a_4/a_3 = 1.5$$

$$a_5/a_4 = 1.66667$$

$$a_6/a_5 = 1.6$$

$$a_7/a_6 = 1.625$$

$$a_8/a_7 = 1.61538$$

$$a_9/a_8 = 1.61905$$

$$a_{10}/a_9 = 1.61765$$

$$a_{11}/a_{10} = 1.61818$$

$$a_{12}/a_{11} = 1.61798$$

$$a_{13}/a_{12} = 1.61806$$

$$a_{14}/a_{13} = 1.61803$$

$$a_{15}/a_{15} = 1.61803$$

$$a_{17}/a_{16} = 1.61803$$

$$a_{18}/a_{17} = 1.61803$$

$$a_{19}/a_{18} = 1.61803$$

$$a_{20}/a_{19} = 1.61803$$

$$a_{21}/a_{20} = 1.61803$$

$$a_{22}/a_{21} = 1.61803$$

$$a_{23}/a_{22} = 1.61803$$

$$a_{24}/a_{23} = 1.61803$$

ככל ש-n גדל, המנות נראות מתייצבות למספר השווה ל 1.618 לערך.

מבחינה אינטואיטיבית, המספר ההתחלתי של זוגות לא צריך לשנות את שיעור הילודה, ואם למשל חוקרים את הסדרה

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

המתארת משפחה מבוססת ואמידה הכוללת אבא,אמא, חמישה בנים וחמש בנות, מתקבלת תמונה רבת-היקף:

$a_0 = 1$	
$a_1 = 5$	$a_1/a_0 = 5$
$a_2 = 6$	$a_2/a_1 = 1.2$
$a_3 = 11$	$a_3/a_2 = 1.8333$
$a_4 = 17$	$a_4/a_3 = 1.5454$
$a_5 = 28$	$a_5/a_4 = 1.6475$
$a_6 = 45$	$a_6/a_5 = 1.6071$
$a_7 = 73$	$a_7/a_6 = 1.6222$
$a_8 = 118$	$a_8/a_7 = 1.6164$
$a_9 = 191$	$a_9/a_8 = 1.6186$

אכן שיעור הילודה מתייצב לאותו מספר; שיעור ילודה חודשי של 1.62 לערך.

לא נמהר כדי להסביר את התופעה המוזרה הזו. יקל עלינו דווקא להרחיב את מסגרת חקירתנו לסדרות השייכות לאותה משפחה.

סדרת FIBONACCI הינה מקרה פרטי של סדרות מהסוג:

$$\begin{cases} a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} \\ \text{נתונים } a_0 , a_1 \end{cases}$$

למשל הסדרה

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

שייכת למשפחה הזו.

אם נחקור את סדרת המנות שלה:

נקבל:

$a_0 = 0$	
$a_1 = 1$	
$a_2 = 2$	$a_2/a_1 = 2$
$a_3 = 7$	$a_3/a_2 = 3.5$
$a_4 = 20$	$a_4/a_3 = 2.8571$
$a_5 = 61$	$a_5/a_4 = 3.05$
$a_6 = 182$	$a_6/a_5 = 2.9836$
$a_7 = 547$	$a_7/a_6 = 3.0055$
$a_8 = 1640$	$a_8/a_7 = 2.9982$
$a_9 = 4921$	$a_9/a_8 = 3.0006$

התוצאות מראות כי המנות נראות שוב מתייצבות, אבל הפעם סביב המספר 3. רואים, איפוא, כי עלינו ליצור מסגרת כללית שתאפשר להסביר את התופעות הללו.

2. השאלות והתשובות של יעקב ברנולי

המתמטיקאי השווייצרי יעקב ברנולי שהיטיב לחקור את הסדרות מסוג $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$, התעניין בשאלות הבאות:

א) מדוע המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ מתייצבות?

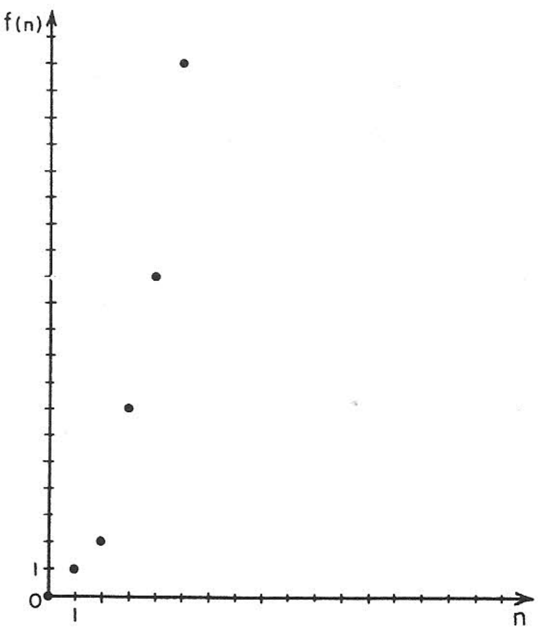
ב) מדוע אין חשיבות לערכים של a_0 ו- a_1?

ג) מהי משמעותו של המספר אליו מתייצבת סדרת המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$?

ננסה, בעקבות ברנולי לענות על השאלות הללו עבור הסדרה שראינו בסעיף הקודם:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

הסדרה מוגדרת בצורה רקורסיבית, ז"א שכל איבר מוגדר בעזרת האיברים הקודמים לו. ברם, ננסה למצוא דרך ישירה ופשוטה למציאת האיבר a_n.
במילים אחרות, נחפש אם קיימת פונקציה f כך ש- $a_n = f(n)$.
תאור גרפי עשוי לעזור במציאת f מבין הפונקציות המוכרות לנו.



n	f(n)
0	0
1	1
2	2
3	7
4	12
5	20

התבוננות בגרף, ממחישה את העליה המהירה של איברי הסידרה. לפיכך הפונקציה אינה יכולה להיות לינארית. פונקציה חזקה $f(n) = n^p$ אינה מתאימה מאחר והיחס $\frac{(n+1)^p}{n^p}$ בודאי שאינו קבוע. ואולם, תכונה זו ($\frac{a_n}{a_{n-1}}$ מספר קבוע) כן מתקיימת עבור פונקציה מעריכית וגם הגרף מעודד לבדוק בכיוון זה.

ננסה איפוא, למצוא אם קיימת פונקציה מעריכית (מסוג $f(n) = r^n$) המקיימת $a_n = f(n)$.

לפי ההגדרה, $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$

$$r^n = 2r^{n-1} + 3r^{n-2}$$

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r_1 = -1 \qquad r_2 = 3$$

אם כן שתי הפונקציות $f_1(n) = (-1)^n$ $f_2(n) = 3^n$

מקיימות את התנאי: $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$

לצערנו, התנאי הנ"ל הינו רק אחד מתוך שלושת התנאים שצריכה לקיים f:
משמעות התנאים $a_0 = 0$ ו- $a_1 = 1$ הינה $f(1) = 1$, $f(0) = 0$, ולא f_1 ולא f_2 מקיימות את התנאים הללו.

אחד הרעיונות המקוריים של ברנולי היה לציין כי אם שתי פונקציות מקיימות את המשוואה הפונקציונלית $f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2)$, אזי גם צירוף לינארי שלהן מקיים את המשוואה הפונקציונלית.

הוא חיפש איפוא מספרים c ו-d המקיימים:

$$f(n) = (-1)^n \cdot c + 3^n \cdot d$$

על מנת שיתקיימו שני התנאים הנוספים:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

לכן

$$f(0) = (-1)^0 \cdot c + 3^0 \cdot d = 0$$

$$f(1) = (-1) \cdot c + 3d = 1$$

מכאן

$$c + d = 0$$

$$-c + 3d = 1$$

$$c = -\frac{1}{4} \qquad d = \frac{1}{4}$$

לכן

$$a_n = f(n) = -(-1)^n \cdot \frac{1}{4} + \frac{3^n}{4}$$

$$\boxed{a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}}$$

נענה כעת על השאלות ששאלנו בהתחלת הסעיף.

א) <u>מדוע סדרת המנות מתייצבת?</u>

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{3^n - (-1)^n}{4}}{\frac{3^{n-1} - (-1)^{n-1}}{4}} = \frac{3^n - (-1)^n}{3^{n-1} - (-1)^{n-1}} = \frac{3^n(1 - (-\frac{1}{3})^n)}{3^{n-1}(1 - (-\frac{1}{3})^{n-1})}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3\,\frac{1 - (-\frac{1}{3})^n}{1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}}$$

כאשר n שואף ל-∞, $(-\frac{1}{3})^n$ שואף ל 0 לכן $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ שואף ל 3.

ראינו איפוא מדוע הסדרה מתייצבת.

ב) <u>מדוע אין חשיבות לערכים של a_0 ו-a_1?</u>

אם נשנה את a_0 ו-a_1 נקבל ערכים חדשים ל c ו-d. אבל נקבל תמיד כי

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(-1)^n c + 3^n d}{(-1)^{n-1} c + 3^{n-1} d}$$

$$\frac{a_n}{a^{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}}\,\frac{d + (-\frac{1}{3})^n c}{d + (-\frac{1}{3})^{n-1} c} = 3\,\frac{d + (-\frac{1}{3})^n c}{d + (-\frac{1}{3})^{n-1} c}$$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ שואף ל 3.

ג) מהי משמעותו של המספר אליו מתייצבת סדרת המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$?

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

לכן $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2a_{n-1} + 3a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 + \frac{3a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 + \frac{3}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

אם $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ שואף לגבול ℓ אזי מתקיים

$$\ell = 2 + \frac{3}{\ell}$$

או $$\ell^2 = 2\ell + 3$$

$$\ell_1 = -1 \qquad \ell_2 = 3$$

עבור הסדרה $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-1}$ הגבול של המנות $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ הינו איפוא אחד השורשים של המשוואה $x^2 = 2x + 3$.

אפשר למעשה להוכיח באופן כללי את המשפט הבא (בצורה זהה למקרה הפרטי):

$$\left(\begin{array}{r}\text{המנות של הסדרה } a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n \\ \text{מתייצבות למספר } \ell\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{r}\text{המספר } \ell \text{ הוא אחד השורשים} \\ \text{של המשוואה } x^2 = Ax + B\end{array}\right)$$

שיעור הילודה היציב שהתקבל בסעיף הקודם מוצא כעת את פירושו:
היות שסדרת המנות של סדרת FIBONACCI

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

מתייצבת, המספר ℓ אליו מתייצבת סדרת המנות מקיים:

$$\ell^2 = \ell + 1$$

שני השורשים של משוואה ריבועית זו הם:

$$\ell_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad \ell_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ואכן $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618$

הארנבות לא רק יודעות להתרבות אלא גם מכירות את מספר הזהב* ...

מהמשפט שהוכחנו לעיל ניתן להסיק באופן לוגי כי אם למשוואה $x^2 = Ax + B$ אין שורשים, אזי סדרת המנות של הסדרה $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$ אינה מתכנסת.

נבדוק זאת לדוגמא עבור הסדרה:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 3$$

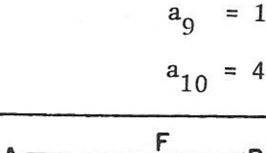
$a_0 = 1$	$a_1/a_0 = 3$
$a_1 = 1$	$a_2/a_1 = 3$
$a_2 = 3$	$a_3/a_2 = 1.33333$
$a_3 = 4$	$a_4/a_3 = .5$
$a_4 = 2$	$a_5/a_4 = -2$
$a_5 = -4$	$a_6/a_5 = 3$
$a_6 = -12$	$a_7/a_6 = 1.33333$
$a_7 = -16$	$a_8/a_7 = .5$
$a_8 = -8$	$a_9/a_8 = -2$
$a_9 = 16$	$a_{10}/a_9 = 3$
$a_{10} = 48$	$a_{11}/a_{10} = 1.33333$

נזכיר פה מהו מספר הזהב:

נתון מלבן ABCD וריבוע ADEF.

אם המלבנים ABCD ו BCEF דומים,

אז היחס $\frac{AB}{BC}$ הוא מספר הזהב $\left(\frac{AB}{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.



נראה כי סדרת המנות אינה מתכנסת (למרות שהיא מחזורית) והעובדה הזו מתאימה לכך שאין למשוואה $x^2 = 2x - 2$ שורשים ממשיים.

מזוית ראיה שונה, בעזרת בדיקת היחס בין איברים עוקבים בסדרה $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ אפשר לפתור את המשוואה הריבועית $x^2 = Ax + B$. כמובן שזה איננו מועיל במיוחד: הנוסחה למציאת שורשים של משוואה ריבועית מספיק פשוטה ואין צורך להשתמש בשיטות אחרות.

3. <u>פתרון משוואות ממעלה גבוהה מ-2</u>

הנוסחאות המאפשרות מציאת שורשים של משוואה ממעלה שלישית (הנקראות בשם נוסחאות CARDAN) הינן מסובכות מכדי שתהיינה ישומיות ועל אחת כמה וכמה נוסחאות עבור המשוואות ממעלה רביעית (של FERRARI).

כוונתינו בסעיף זה להראות איך לפתור משוואות ממעלה גבוהה וזאת בלי נוסחאות אלא בעזרת <u>תהליך</u> (אותו יצר ברנולי).

כדי לפתור משוואות מסדר 3 ברנולי השתמש במשפט הבא:

$$\left(\begin{array}{l}\text{סדרת המנות של הסדרה}\\ a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} + Ca_{n-3}\\ \text{מתכנסת למספר } \ell\end{array}\right) \Longleftarrow \left(\begin{array}{l}\ell \text{ הוא אחד השורשים של המשוואה}\\ x^3 = Ax^2 + Bx + C\end{array}\right)$$

היות שהוכחת המשפט הזה דומה לזו שנעשתה בסעיף הקודם, נקבל אותו כנכון (לקורא הסקרן ראה הנספח). ואולם, אף כי הרעיון הכללי הינו פשוט, נראה כי ביצועו מעלה קשיים טכניים ותאורטיים.

נתקוף זה להקיף את הבעיה לפי התוכנית הבאה:

א) מציאת שורש אחד של משוואה ממעלה 3 בעזרת תהליך ברנולי.

ב) מציאת כל השורשים של משוואה ממעלה 3.

ג) השלכות על פתירת משוואות ממעלה n, $n > 3$.

א) <u>מציאת שורש אחד של המשוואה: $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$</u>.

נמצא כאמור, שורש למשוואה בהשראת התהליך שתיארנו עבור משוואות ריבועיות.

המשוואה $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$ נכתבת $x^3 = 3x^2 + x - 1$

נצמיד למשוואה את הסידרה a_n הבאה:

$$\begin{cases} a_{n+3} = 3a_{n+2} + a_{n+1} - a_n \\ a_0 = 1 \;,\; a_1 = 1 \;,\; a_2 = 3 \quad \text{(נבחר באופן שרירותי)} \end{cases}$$

סדרת המנות מתקבלת בצורה הבאה:

$$a_1/a_0 = 1$$
$$a_2/a_1 = 3$$
$$a_3/a_2 = 3$$
$$a_4/a_3 = 3.22222$$
$$a_5/a_4 = 3.2069$$
$$a_6/a_5 = 3.21505$$
$$a_7/a_6 = 3.21405$$
$$a_8/a_7 = 3.21436$$
$$a_9/a_8 = 3.21431$$
$$a_{10}/a_9 = 3.21432$$
$$a_{11}/a_{10} = 3.21432$$
$$a_{12}/a_{11} = 3.21432$$
$$a_{13}/a_{12} = 3.21432$$
$$a_{14}/a_{13} = 3.21432$$
$$a_{15}/a_{14} = 3.21432$$
$$a_{16}/a_{15} = 3.21432$$

התוצאות מתייצבות סביב המספר 3.21432. נבדוק אם המספר 3.214 הינו שורש של המשוואה בדיוק של 10^{-3}.

אם $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$ אזי $P(3.214)\cdot P(3.2145) < 0$ ולכן השורש r מקיים:*

$$3.214 < r < 3.2145 \,.$$

---

*יש לזכור כי אם נתונה פונקציה רציפה P, ושני מספרים a ו b $(a < b)$ המקיימים $P(a)\cdot P(b) < 0$, אז קיים מספר c (הנקרא שורש של P) המקיים: $a < c < b$ ו- $P(c) = 0$.

הקורא המעוניין להבין באופן כללי איך מתנהגות המנות של סדרה מהסוג:

$$a_{n+3} = Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n$$

יפנה לנספח.

נסתפק פה במסקנות המתקבלות מהפתוח התאורטי:

1. אם המנות המתכנסות, אז הן מתכנסות לאחד השורשים של המשוואה: זהו השורש הגדול ביותר בערך מוחלט. 2. אם המנות מתכנסות לסדרה מחזורית בעלת אורך 2*, יש למשוואה שני שורשים נגדיים. 3. בכל מקרה אחר, יש למשוואה שורשים מרוכבים.

ב) <u>מציאת כל השורשים של משוואה ממעלה 3</u>

ראינו איך למצוא שורש אחד של משוואה ממעלה 3, אבל לא מצאנו את כל השורשים. ניתן כעת הנחיות איך למצוא את השורשים האחרים.

תחילה נזכיר עובדות אחדות על פולינימום ממעלה שלישית:

- מספר השורשים הממשיים של פולינום ממעלה שלישית הוא אחד, שניים או שלושה.

- אם r_1, r_2 ו r_3 הם שלושה השורשים של פולינום ממעלה שלישית אז:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

לכן $c = -r_1r_2r_3$

**<u>הערה:</u> סדרה מחזורית בעלת אורך שתיים היא סדרה כך שכל איבריה במקומות הזוגיים שווים וכן כל איבריה במקומות האי-זוגיים שווים:*
למשל הסדרה: 1 ,3 ,1 ,3 ,1 ,3 ,....
היא סדרה מחזורית בעלת אורך שתיים.

נתונה כעת משוואה ממעלה 3: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

נציב $z = \frac{1}{x}$. מתקבלת אז משוואה חדשה:

$$\frac{1}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{b}{z} + c = 0$$

או:

$$cz^3 + bz^2 + az + 1 = 0$$

בעזרת תהליך ברנולי, מנות הסדרה $a_n + Aa_{n+1} + Ba_{n+2} + Ca_{n+3} = 0$ מתכנסות (אם בכלל) לאחד השורשים z_1 של אותה משוואה.

לכן המספר $r = \frac{1}{z_1}$ הינו שורש של המשוואה המקורית.

למשל עבור המשוואה $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$ שראינו כבר, מקבלים על ידי ההצבה $z = \frac{1}{x}$:

$$z^3 - z^2 - 3z + 1 = 0$$

עלינו, איפוא, לחשב את מנות הסדרה a_n:

$$\begin{cases} a_{n+3} = a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n \\ a_0 = a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

היות שהמנות $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ מתכנסות (אם בכלל) ל $z_1 = \frac{1}{r}$ כאשר r הוא אחד השורשים של המשוואה המקורית $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$, המנות $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ תתכנסנה (אם בכלל) ל-r.

ואכן מקבלים:

$\frac{a_1}{a_2} = 1$	$\frac{a_{12}}{a_{13}} = 0.4665$
$\frac{a_2}{a_3} = 1$	$\frac{a_{13}}{a_{14}} = 0.4569$
$\frac{a_3}{a_4} = 0.3333$	$\frac{a_{14}}{a_{15}} = 0.4635$
$\frac{a_4}{a_5} = 0.6$	$\frac{a_{15}}{a_{16}} = 0.4590$
$\frac{a_5}{a_6} = 0.3846$	$\frac{a_{16}}{a_{17}} = 0.4620$
$\frac{a_6}{a_7} = 0.52$	$\frac{a_{17}}{a_{18}} = 0.4600$
$\frac{a_7}{a_8} = 0.4237$	$\frac{a_{18}}{a_{19}} = 0.4614$
$\frac{a_8}{a_9} = 0.4876$	$\frac{a_{19}}{a_{20}} = 0.4604$
$\frac{a_9}{a_{10}} = 0.4432$	$\frac{a_{20}}{a_{21}} = 0.464$
$\frac{a_{10}}{a_{11}} = 0.4731$	$\frac{a_{21}}{a_{22}} = 0.463$
$\frac{a_{11}}{a_{12}} = 0.4525$	$\frac{a_{22}}{a_{23}} = 0.4609$

המנות מתייצבות סביב הערך 0.461.

הבדיקה $P(0.461)\cdot P(0.4605) < 0$ מוכיחה כי השורש השני של המשוואה:

$$x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$$

הינו $r_2 = 0.461$ בדיוק של $.10^{-3}$

היות ש- $x^3 - 3x^2 - x + 1 = (x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot(x-r_3)$

אזי $-r_1r_2r_3 = 1$

לכן $r_3 = \frac{-1}{r_1r_2}$

אם זוכרים כי $r_1 = 3.214$ מקבלים:

$$r_3 = \frac{-1}{0.461\cdot 3.214}$$

$$r_3 = -0.675$$

ואכן מתקיים:

$$f(-0.675)\cdot f(-0.6755) < 0$$

שלושה השורשים של המשוואה $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ הם:

$r_1 = 3.214$ $\qquad r_2 = 0.461$ $\qquad r_3 = 0.675$

<u>**מסקנה**</u>: נתונה משוואה ממעלה 3:

$$x^3 = Ax^2 + Bx + C$$

ושתי סדרות FIBONACCI $a_{n+3} = Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n$

$$b_{n+3} = \frac{-Bb_{n+2} - Ab_{n+1} + b_n}{C}$$

- אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1$ ו- $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{r_2}$, יש למשוואה שלושה שורשים שהם r_1 , r_2 , $r_3 = \frac{-C}{r_1r_2}$.

- אם אחת הסדרות $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ או $\frac{b_{n+1}}{a_n}$ מתכנסת והשנייה מתבדרת יש למשוואה שורש אחד ממשי בלבד.

- אם אחת הסדרות $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ מתכנסת לסדרה מחזורית בעל אורך שתיים, יש למשוואה שלושה שורשים ושניים מהם נגדיים.

ג) השלכות על פתירת משוואות ממעלה n, $n > 3$

כל מה שעשינו עבור משוואות ממעלה 3 תקף עבור משוואות ממעלה גבוהה יותר. נסכם אם כן מה אפשר לעשות בצורה מעשית כדי לפתור משוואה כזו.

- לקשור למשוואה $P(x) = 0$ סדרת "FIBONACCI" מתאימה.
- אם סדרת המנות מתכנסת, אזי היא מגדירה שורש אחד של המשוואה r_1. אפשר לכתוב $P(x) = (x - r_1)Q(x)$, עם Q רב-איבר שמעלתו $n - 1$. הרב-איבר Q מתקבל על ידי חילוק של P ב- $(x - r_1)$. מחפשים אז את השורשים של Q.
- אם סדרת המנות מתכנסת לסדרה מחזורית בעלת אורך 2, אזי יש למשוואה 2 שורשים נגדיים.
- בכל מקרה אחר, יש למשוואה שורשים מרוכבים.
- בכל מקרה ההצבה $z = \frac{1}{x}$ יכולה להניב עוד שורש.
- אם r הוא שורש מרוכב של P, $\bar{r}$ הוא גם כן שורש. לכן מספר השורשים המרוכבים של P הינו תמיד זוגי.

4. ביצוע מעשי בעזרת מחשב

אין להעלות על הדעת כי שיטת BERNOULLI יכולה להיות מעשית בלי עזרת המחשב. עקרוני לציין לעומת זאת, כי כל שלבי מציאת השורשים של משוואה כלשהי מתבצעים בקלות בעזרת המחשב:

- מציאת ערך המנות של סדרה הקשורה למשוואה נתונה $P(x) = 0$.
- בדיקה כי הדיוק הרצוי למציאת השורשים אכן הושג.
- אם α הוא שורש אחד של המשוואה $P(x) = 0$, מציאת הפולינום Q המקיים $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.
- חזרה על שלושה השלבים הקודמים עבור הפולינום Q.

כדי לתאר את הפעילויות הללו, נציג דוגמא ופתרונה.

תרגיל*

ברצוננו למצוא את כל השורשים הממשיים של המשוואה:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 10 = 0 \qquad (1)$$

א) השתמש בתהליך BERNOULLI כדי למצוא שורש אחד r_1 בדיוק של 10^{-3}.

ב) מציבים $z = \frac{1}{x}$. מהי המשוואה שמקיים z? האם תהליך BERNOULLI נותן עוד שורש?

ג) מצא פולינום Q המקיים $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 10 = (x - r_1)Q(x)$.

ד) מצא את כל השורשים הממשיים של (1).

פתרון:

בכל שלבי הפתרון, התכניות בוצעו במיקרו-מחשב IBM P.C.
היות שהתכניות הללו מהוות אבות-טיפוס בפתרון משוואות בשיטת BERNOULLI, הצגנו אותן בנוסף לפלט.

א) סדרת FIBONACCI הצמודה למשוואה היא:

$$\begin{cases} a_{n+4} = 3a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1} + 10a_n \\ a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1 \end{cases}$$

---

*תרגיל זה והתרגילים המובאים בסוף הרצגו בבתי-ספר להנדסאים בתל-אביב. התלמידים בוגרי תיכון ומשלימים את ידיעותיהם במתמטיקה במסגרת לימודיהם לתואר הנדסאי-מחשבים. הם שולטים בכמה שפות תכנות וזוכים לגישה למערכת ענפה של מחשבים בבית הספר (מיקרו, מיני, ומחשב האוניברסיטה). נראה לנו כי התפשטות לימוד מקצוע המחשבים לא רק מאפשרת עזרה ותירגול במתמטיקה אלא גם פיתוח והעשרה של החומר הלימודי.

במחשב מקבלים:

```
10  DEF  FN A(X) = X ^ 4 - 3 * X ^
     3 + X ^ 2 - X - 10
20 A = 1:B = 1:C = 1:D = 1
30 E = 3 * D - C + B + 10 * A: PRINT
     E / D
40  IF  FN A(E / D) *  FN A(E / D
      + 0.0005) <  = 0 THEN  PRINT
     "שורש המשוואה בדיוק של 10^-3 הוא";( INT (1000 * E / D +
     0.5)) / 1000: END
50  IF  FN A(E / D) *  FN A(E / D
      - 0.0005) <  = 0 THEN  PRINT
     "שורש המשוואה בדיוק של 10^-3 הוא";( INT (1000 * E / D -
     0.5)) / 1000: END
60 A = B:B = C:C = D:D = E: GOTO
     30

]RUN
13
3.76923077
2.95918368
2.82068966
3.08312959
3.17922284
3.14916438
3.10629703
3.10184359
3.11096223
3.11579857
3.11481604
3.11320198
שורש המשוואה בדיוק של 10^-3 הוא3.113
```

<u>הערות</u>: 1. כדי לטפל בבעית הדיוק של השורש, השתמשנו בפונקציה INT:

$\frac{INT(1000x + 0.0005)}{100}$ הוא ייצוג המספר x בדיוק של 10^{-3}.

2. יש לשים לב לתנאי העצירה:

$P(x)\cdot P(x - 0.0005) \le 0$ או $P(x)\cdot P(x + 0.0005) \le 0$.

התנאי הזה הינו מפתיע (היה אפשר לצפות לתנאי:

$(P(x)\cdot P(x + 0.001) \le 0$.

אבל התנאי האחרון עלול לגרום טעות של 0.001.

ב) אם $z = \frac{1}{x}$, z מקיים המשוואה $1 - 3z + z^2 - z^3 - 10z^4 = 0$

סדרת FIBONACCI הצמודה למשוואה היא:

$$b_{n+4} = \frac{-b_{n+3} + b_{n+2} - 3b_{n+1} + b_n}{10}$$

$$b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$$

הפעם יש למצוא את סדרת המנות $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ ולא $\frac{b_{n+1}}{b_n}$

```
10  DEF  FN A(X) = 10 * X ^ 4 + X
     ^ 3 - X ^ 2 + 3 * X - 1
20 A = 1:B = 1:C = 1:D = 1
30 E = ( - D + C - 3 * B + A) / 1
    0: PRINT D / E
40  IF  FN A(E / D) *  FN A(E / D
     + 0.0005) <  = 0 THEN  PRINT
    "שורש המשוואה בדיוק של 10^-3
     הוא";( INT (1000 * D / E +
    0.5)) / 1000: END
50  IF  FN A(E / D) *  FN A(E / D
     - 0.0005) <  = 0 THEN  PRINT
    "שורש המשוואה בדיוק של 10^-3
     הוא";( INT (1000 * D / E -
    0.5)) / 1000: END
60 A = B:B = C:C = D:D = E: GOTO
    30
]RUN
-5
2.5
.37735849
-1.22401848
-5.01738123
-.451998115
-.906501189
-1.92621905
-1.11684156
-.950495778
-1.39276943
-1.27506578
-1.07635175
-1.23379515
-1.26405118
-1.15989787
-1.19511973
-1.23365115
-1.19519413
-1.19321784
-1.21492779
-1.20531453
-1.19821646
-1.20692311
-1.2064967
-1.2019629
-1.20442856
שורש המשוואה בדיוק של 10^-3 הוא-1.205
```

ג) מציאת הפולינום Q נעשית בעזרת חילוק הפולינום

$x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 10$ ב-$(x - 3.113)$

```
10  DATA  1,-3,1,-1,10
20 N = 5
30  DIM P(5),Q(4)
40  FOR I = 1 TO N
50  READ P(I)
60  NEXT
70 R! = 3.113
80 Q(1) = P(1)
90  FOR I = 2 TO N - 1
100 Q(I) = P(I) + Q(I - 1) * 3.11
     3
110  NEXT
120  PRINT "Q(X)="Q(1)"X^3+"Q(2)"
     X^2+"Q(3)"X+"Q(4)
130  END

]RUN
Q(X)=1X^3+.112999999X^2+1.351769X+3.20805689
```

לכן $Q(x) = x^3 + 0.113x^2 + 1.352x + 3.208$

ד) נפעיל תהליך BERNOULLI על Q.

סדרת FIBONACCI הצמודה למשוואה $Q(x) = 0$ היא:

$$\begin{cases} a_{n+3} = -0.113a_{n+2} - 1.352a_{n+1} - 3.208a_n \\ a_0 = a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

```
10  DEF  FN A(X) = 10 * X ^ 4 + X
     ^ 3 - X ^ 2 + 3 * X - 1
20 A = 1:B = 1:C = 1:D = 1
30 E =  - .113 * D - 1.352 * C -
     3.208 * B: PRINT E / D
40  IF  FN A(E / D) *  FN A(E / D
     + 0.0005) < = 0 THEN  PRINT
     "שורש המשוואה בדיוק של 10^-3
     הוא";( INT (1000 * E / D +
     0.5)) / 1000: END
50  IF  FN A(E / D) *  FN A(E / D
     - 0.0005) < = 0 THEN  PRINT
     "שורש המשוואה בדיוק של 10^-3
     הוא";( INT (1000 * E / D -
     0.5)) / 1000: END
60 A = B:B = C:C = D:D = E: GOTO
     30
```

```
]RUN
-4.673
.862818532
-.884312945
5.62031783
.291901486
-6.70010667
1.72906159
-.618014777
5.07674915
.643156013
-3.19763327
1.86968618
-.299532907
10.128933
.810888881
-2.17088551
2.33215539
-.0590850703
```

תהליך ברנולי אינו מתכנס.

<u>הערה</u>: הערך $r_1 = 3.113$ הינו מקורב בלבד. לכן המקדמים של Q גם כן מקורבים. למרות זאת, תנאי העצירה הוא <u>על P</u>. לכן תהליך BERNOULLI אם הוא היה מתכנס היה מתכנס בדיוק הרצוי.
משום כך, יכול לקרות כי המנות של Q תתכנסנה למרות שהתכנית לא תעצר. במקרה כזה, קיצוני, יש להגדיל את דיוקו של r_1.

לסיכום, תהליך ברנולי המופעל על Q אינו מתכנס. לכן יש ל- (1) שני שורשים מרוכבים.

<u>מסקנה</u>:

יש ל-(1) i) שני שורשים ממשיים והם $r_1 = 3.113$ $r_2 = -1.205$ ii) שני שורשים מרוכבים.

לסיום, נציג מספר תרגילים אשר נשאלו בכיתות מחשבים בבית-ספר להנדסאים:

1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 9$.

א) חשב את $f'(x)$ ופתור את המשוואה $f'(x) = 0$.

ב) כמה שורשים קיימים למשוואה $f(x) = 0$

ג) מצא את השורש(ים) בעזרת תהליך BERNOULLI בדיוק של 10^{-4}.

בתרגיל הזה, הקורא יוכל לבדוק כי יש למשוואה $f(x) = 0$ שורש אחד בלבד (כי אין שורש למשוואה $f'(x) = 0$ למעשה $f'(x) > 0$ תמיד ולכן הפונקציה תמיד עולה. יש לה, איפוא, שורש אחד בלבד).

2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^5 - 2x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 13x - 3$.

א) הוכח כי אם r הוא שורש שלם של $f(x) = 0$ אזי r מחלק את -3.

ב) מצא את כל השורשים השלמים של $f(x) = 0$.

ג) מצא את כל השורשים של $f(x) = 0$ בעזרת תהליך BERNOULLI.

בתרגיל הזה, הקורא ימצא כי 1- ו- 3+ הם שורשים של המשוואה $f(x) = 0$ לכן על ידי שני חילוקים יתקבל השיוויון: $f(x) = (x+1)(x-3)Q(x)$ כאשר $Q(x)$ הוא פולינום ממעלה 3. יש להפעיל אז את תהליך BERNOULLI על $Q(x)$.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$

א) חקור את הפונקציה f (מציאת נקודות מכסימום ומינימום, אסימפטוטות, ...).

ב) חשב את $f''(x)$. הוכח כי $f''(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+1)^3}$ כאשר $P(x)$ הוא פולינום ממעלה שלישית.

ג) העזר בתהליך BERNOULLI כדי למצוא את נקודות הפיתול של f. בדוק כי שלוש נקודות הפיתול נמצאות על קו ישר.

<u>סוף דבר</u>: בעזרת תהליך BERNOULLI אפשר לדון ולהעמיק בחקירת מספר שורשי משוואה פולינומיאלית. תפקיד המחשב הינו מרכזי ואפשר להצביע על השפעתו בתחומים הבאים:

- <u>תפקיד אינסטרומנטלי</u>: המחשב מבצע מהר את הפעולות המובילות למציאת סידרת המנות.
- <u>תפקיד קוגניטיבי</u>: על ידי בנייתן או הבנתן של תוכניות המחשב, והתלמיד מעמיק במושג הדיוק (ראה תנאי העצירה וכן הייצוג המעוגל של הפתרון) וכן במושג ההתכנסות של סידרה.
- <u>תפקיד אפקטיבי</u>: התלמיד מתנסה ראשית בניסויים במחשב, מקבל בעצמו את הסדרות, ורק אז מתעורר לבעיה המתמטית החדשה. שימוש בקשר הדו-כיווני הזה יש בו משום יצירת מוטיבציה דו-כיוונית.

אני תקווה שתלמידי תיכון ידעו בעתיד הקרוב מספיק תכנות על מנת שיוכלו להשתמש במחשב ככלי עזר במתמטיקה.

כדי להסביר את ה"למה" של תהליך *BERNOULLI*, נצטרך להתייחס לפתירת משוואות בתחום המרוכבים. נציין בכל זאת כי "הגיחה" לעבר המספרים המרוכבים אינה אלא הרחבה נחוצה כדי להסביר בצורה תאורטית מה שקורה. המסקנות הסופיות תתייחסנה רק לשורשים הממשיים של רבי-איבר.

נקח, איפוא משוואה ממעלה שלישית: $x^3 = Ax^2 + Bx + C$

יש למשוואה הזו 3 שורשים מרוכבים r_1, r_2, r_3. ידוע לנו כי לפחות אחד ממשי (מספר השורשים המרוכבים הינו זוגי).
נניח בשלב ראשון כי שלושתם שונים (אפשר לבדוק כי במקרה ושורשים יהיו שווים המסקנה לא משתנה).

נקשור למשוואה הזו את הסדרה a_n:

$$\begin{cases} a_{n+3} = Aa_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

(הבחירה של a_0, a_1, a_2 שרירותית).

בדרך זהה לזו של הסעיף "סדרת *FIBONACCI*" מקבלים כי:

$$a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n + C_3r_3^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{C_1r_1^{n+1} + C_2r_2^{n+1} + C_3r_3^{n+1}}{C_1r_1^n + C_2r_2^n + C_3r_3^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r_1^{n+1}\left[C_1 + C_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} + C_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{n+1}\right]}{r_1^n\left[C_1 + C_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + C_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^n\right]} = r_1 \cdot \frac{C_1 + C_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} + C_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{n+1}}{C_1 + C_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + C_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^n}$$

ידוע לנו כי אם מספר k מקיים $|k| < 1$, אזי הסדרה k^n מתכנסת ל 0.
לכן אם קיים שורש אחד r_1 עבורו $\left|\frac{r_2}{r_1}\right| < 1$ ו- $\left|\frac{r_3}{r_1}\right| < 1$ אזי סדרת המנות $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ מתכנסת ל r_1.
התנאים $\left|\frac{r_2}{r_1}\right| < 1$ ו- $\left|\frac{r_3}{r_1}\right| < 1$ מתקיימים כאשר $|r_2| < |r_1|$ ו- $|r_3| < |r_1|$.

מוטב שנבין היטב את משמעות התנאים $|r_2| < |r_1|$ ו- $|r_3| < |r_1|$
יש תמיד שלושה שורשים (ממשיים או מרוכבים) למשוראה ממעלה שלישית.
אפשר תמיד לסדר אותם כך ש: $|r_1| \geq |r_2| \geq |r_3|$.
לא נתיחס למקרים בהם $r_1 = r_2$ או $r_2 = r_3$, כי המסקנות הינן זהות
ולעומת זאת ההוכחות במקרים כאלו הינן מסובכות.

מספר מקרים יכולים אז לקרות:

<u>אם $|r_1| > |r_2| > |r_3|$</u>

יש שלושה שורשים ממשיים, וסדרת המנות מתכנסת ל r_1 .

<u>אם $|r_1| > |r_2| = |r_3|$</u>

יש
או שלושה שורשים ממשיים, ו- $r_3 = -r_2$
או שורש ממשי אחד, ו- $r_3 = \overline{r_2}$

בשני המקרים, סדרת המנות מתכנסת ל r_1 .

<u>אם $|r_1| = |r_2| > |r_3|$</u>

יש
או שלושה שורשים ממשיים, ו- $r_2 = -r_1$
או שורש ממשי אחד, ו- $r_2 = r_1$

אם יש שלושה שורשים ממשיים, אזי עדיין מתקיים:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1 \frac{C_1 + C_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} + C_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{n+1}}{C_1 + C_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n} + C_3\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n}}$$

היות ש- $r_2 = -r_1$, אזי

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1 \frac{C_1 + C_2(-1)^{n+1} + C_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{n+1}}{C_1 + C_2(-1)^{n} + C_3\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^{n}}$$

הירות ש $\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^n$ מתכנס ל 0, די להתבונן בביטוי:

$$r_1 \cdot \frac{C_1 + C_2(-1)^{n+1}}{C_1 + C_2(-1)^n}$$

הביטוי הזה שורה לסדרה מחזורית בעלת אורך 2:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad r_1 \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 - C_2} \;,\; r_1 \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \;,\; r_1 \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 - C_2}$$

לכן אם $r_2 = -r_1$ אזי סדרת המנות מתכנסת לסדרה מחזורית בעלת אורך 2.

הירות ש- $\left(r_1 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right) \cdot \left(r_1 \frac{C_1 + C_2}{C_1 - C_2}\right) = r_1^2$, אפשר לקבל את r_1 בקלות.

- אם r_1 ו-r_2 מרוכבים, אזי $\frac{r_2}{r_1} = e^{i\theta}$ לכן קל לראות כי הביטוי

$r_1 \frac{C_1 + C_2 e^{i(n+1)\theta}}{C_1 + C_2 e^{in\theta}}$ איננו מתכנס.

<u>מסקנה</u>: באופן מעשי אנחנו למדים כי אם בודקים את סדרת המנות הקשורה למשוואה ממעלה שלישית, שלושה מצבים יכולים להתרחש:

1. אם המנות מתכנסות, אז הן מתכנסות לאחד השורשים של המשוואה: זהו השורש הגדול ביותר בערך מוחלט.
2. אם המנות מתכנסות לסדרה מחזורית בעלת אורך 2, יש למשוואה 2 שורשים בעלי סימנים מנוגדים.
3. בכל מקרה אחר, יש למשוואה שורשים מרוכבים.

ביבליוגרפיה

1. J. Bernoulli: Der Briefwechsel. Naturforschenden Gesellschaft. Basel 1955.
2. J.O. Flekenstein: L'école mathématique bâloise des Bernoulli à l'aube du XVIII siecle. Paris 1959.
3. J.E. Hofmann: Uber Jakob Bernoullis Beitrage zur Infinitesimal Mathematik in Mono. Enseign. math No. 3 Geneve 1956.
4. P. Henrici: Essentials of Numerical analysis with pocket calculator demonstrations. John Wiley, 1982.
5. T.R.F. Nonweiler: Computational Mathematics. John Wiley, 1982.
6. J.B. Scarborough: Numerical Mathematical Analysis. John Hopkins, 1950