מרוב ממוצעים רואים את היער

דוד רימר
מכון ויצמן למדע
המחלקה להוראת המדעים

דוד בן-חיים
אוניברסיטת חיפה
בית הספר לחינוך, אורנים

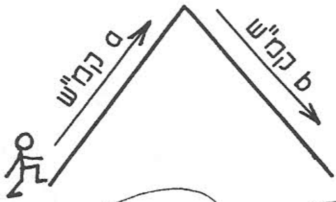
$$8=\frac{2\times 6\times 12}{6+12}$$

פילולאוס (במאה הרביעית לפנה"ס)
קרא לתיבה

"הרמוניה גיאומטרית"

היות ושלושת המספרים המאפיינים
תיבה: 6 פאות, 8 קודקודים ו-12
מקצועות מגדירים ממוצע הרמוני.

מטפסים על הר במהירות קבועה של a קמ"ש
ויורדים מצד שני את אותו המרחק במהירות
קבועה של b קמ"ש.
מהי המהירות הממוצעת?



ממוצע חשבוני ? $\frac{a+b}{2}$

ממוצע הנדסי ? $\sqrt{ab}$

ממוצע שורשי ריבועי ? $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$

ממוצע הרמוני ? $\frac{2ab}{a+b}$

ממוצע הרמוני שורשי ? $\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$

ברצוננו לתת סקירה על הממוצעים השונים והקשרים ביניהם, בסידרה של מאמרים. נראה לנו, שדרך טובה להציג את הממוצעים הינה באמצעות סיטואציות מחיי היום יום, או משטחים מוכרים לתלמיד ומכאן לבחון את תכונותיהם והקשרים ביניהם. במאמר הנוכחי נציג בעיות מהן נובע הצורך להגדיר את הממוצעים השונים עבור שנים, שלושה ו-n מספרים. כמו כן, נצביע על פירושים גיאומטריים ובניות הנדסיות של הממוצעים, נבחן את יחס הסדר, הכללות וקשרים ביניהם ונציין תכונות יסוד שלהם. במאמרים הבאים נוכיח במספר דרכים ושיטות מתמטיות משפטים הקשורים לממוצעים והכללות שלהם. במהלך הסקירה יושם דגש על דרך החקירה המתמטית מתוך מגמה להדגים ללומד כיצד המתמטיקה מתפתחת תוך כדי חיפוש דרכים ושיטות שונות להוכחת השערות ותיאוריות מתמטיות. במידת הצורך נגדיר מושגים ונוכיח תכונות או הכללות שעליהן נסתמך בדרך ההוכחה.

I. ממוצעים של שני מספרים

א. הממוצע החשבוני (האריתמטי)

נתון מלבן, שאורכי צלעותיו מסומנים על ידי a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שהיקפו שווה להיקף המלבן הנתון.
נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן נובע:

$$4x = 2(a + b)$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

המספר x הוא פונקציה של שני המספרים a ו-b, וקוראים לו הממוצע החשבוני של a ו-b. נסמן אותו על ידי $A(a, b)$.

ב. הממוצע ההנדסי (הגיאומטרי)

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע ששטחו שווה לשטח המלבן הנתון.
נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן נובע:

$$x^2 = ab$$

המספר החיובי x, הפותר משוואה זו נקרא הממוצע ההנדסי של המספרים החיוביים a ו-b. נסמנו על ידי $G(a, b)$, כך ש- $G(a, b) = \sqrt{ab}$.

ג. הממוצע ההרמוני

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שהיחס בין שטחו להיקפו שווה ליחס בין שטח המלבן הנתון להיקפו.

נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן:

$$\frac{x^2}{4x} = \frac{ab}{2(a+b)}$$

ולאחר מספר פעולות אלגבריות אלמנטריות נקבל

$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

או $$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

המספר x במקרה זה נקרא <u>הממוצע ההרמוני</u> של המספרים a ו-b ומסומן על ידי $H(a,b)$.

ד. הממוצע השורשי ריבועי

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שאלכסונו יהיה שווה לאלכסון המלבן הנתון.

נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן על פי משפט פיתגורס:

$$x\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ולכן $$x = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

המספר x נקרא <u>הממוצע השורשי ריבועי</u> של המספרים a ו-b. נסמנו על ידי $R(a,b)$, כך ש- $R(a,b) = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$.

ה. הממוצע ההרמוני השורשי

נתון מלבן, שצלעותיו a ו-b. דרוש לחשב צלע של ריבוע שהיחס בין שטחו לאלכסונו שווה ליחס בין שטח המלבן הנתון לאלכסונו.

נסמן את צלע הריבוע ב-x ומכאן:

$$\frac{x^2}{x\sqrt{2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$

כלומר, היפוכו של x הוא השורש הריבועי של הממוצע החשבוני של היפוכם של המספרים a^2 ו-b^2. x נקרא <u>הממוצע ההרמוני השורשי</u> של המספרים a ו-b ומסומן על ידי HR(a ,b). באמצעות פעולות אלגבריות אלמנטריות ניתן להביא את x לביטוי

$$x = HR(a,\ b) = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}}$$

נתיחס עתה לבעית המהירות הממוצעת המוצגת בעמוד הקדמי של המאמר. המהירות הממוצעת V_m שווה למנה של הדרך הכללית בזמן הכללי ולכן בהנחה שמטפסים d ק"מ ויורדים d ק"מ נקבל:

$$V_m = \frac{2d}{\frac{d}{a} + \frac{d}{b}} = \frac{2ab}{a + b} = H(a,\ b)$$

כלומר, המהירות הממוצעת במקרה זה שווה לממוצע ההרמוני של a ו-b . ההשלכה של תוצאה זו היא, שאם עוברים דרך מסויימת במהירות a אזי לא קיימת מהירות x בה נחזור את אותה הדרך כך שהמהירות הממוצעת תהיה כפליים של a.

כאן יש להעיר, כי מבחינה היסטורית (על פי Boyer, 1968) הממוצע החשבוני, הממוצע ההנדסי והממוצע ההרמוני כבר היו ידועים לבבלים. פיתגורס היווני (במאה החמישית לפנה"ס) למד עליהם במשך שהותו בבבל.

פיתגורס ותלמידיו סימנו אותם על ידי הפרופורציות:

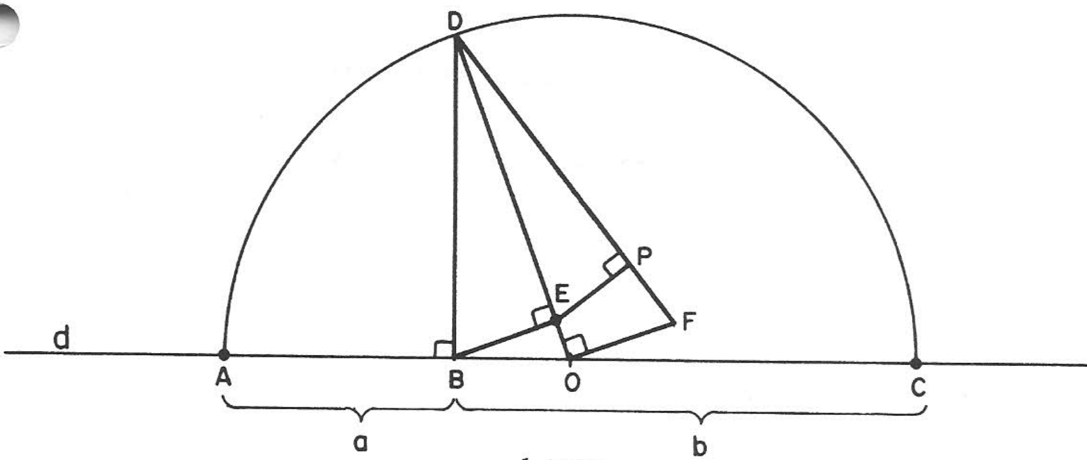
$$(1)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{a}\quad;\quad(2)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{b}\quad;\quad(3)\ \frac{b-a}{c-b}=\frac{a}{c}$$

הפרופורציה הראשונה גוררת את הממוצע החשבוני $b=\frac{1}{2}(a+c)$, השניה את הממוצע ההנדסי $b=\sqrt{ac}$ ואילו השלישית גוררת את הממוצע ההרמוני $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})$ או $b=\frac{2ac}{a+c}$.

ארכיטס (מהמאה הרביעית לפנה"ס) עסק בשימוש הממוצעים במוסיקה ואילו את פילולאוס (בן דורו של ארכיטס) שהתיחס לממוצע ההרמוני בקוראו לתיבה "הרמוניה גיאומטרית" הזכרנו בעמוד הקדמי של המאמר. כמו כן, ידוע כי פפוס הצביע בשנת 320 על שיטה לבניה הנדסית של שלושת הממוצעים בחצי מעגל אחד, כפי שנדגים בסעיף הבא אודות בניה הנדסית של הממוצעים.

II. <u>בניה הנדסית של הממוצעים</u>

על ישר d נקצה קטע $AB = a$ ובהמשכו קטע $BC = b$ (ראה ציור 1). על הקטע AC כקוטר נבנה חצי מעגל (מרכזו בנקודה O ורדיוסו $OA = OC$). נעלה אנך BD ל- AC כאשר הנקודה D היא נקודת החיתוך של האנך עם חצי המעגל. נעביר את OD ונעלה אנך ל-OD מנקודה B, נסמן ב-E את נקודת החיתוך של האנך עם OD. נעלה גם אנך על OD בנקודה O ונקצה עליו קטע OF השווה ל-OB. נחבר את F עם הנקודה D ונוריד אנך מנקודה E על DF ונסמן את נקודת החיתוך ב-P.



<u>ציור 1</u>

ניתן לראות מיד ש- $AC = AB + BC = a + b$
ומכאן שהרדיוס OD מייצג את <u>הממוצע החשבוני</u> של a ו-b:

$$OD = \frac{AC}{2} = \frac{a + b}{2} = A(a\ ,b)$$

היות ו-BD מאונך לקוטר AC, שהרי BD יהיה גובה ליתר במשולש ישר הזוית ADC (זוית היקפית הנשענת על קוטר - ישרה!)

ועל פי משולשים דומים ADB ו-DCB נקבל:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD} \Longleftrightarrow BD^2 = AB \cdot BC \Longleftrightarrow BD = \sqrt{ab} = G(a\ ,b)$$

ומכאן הקטע BD מיצג את <u>הממוצע ההנדסי</u> של a ו-b.
עתה נראה שהקטע DE מיצג את <u>הממוצע ההרמוני</u> של a ו-b:
במשולש ישר הזוית OBD קיים הקשר $BD^2 = OD \cdot DE$ וזאת על פי משפט אויקלידס

(שטח הריבוע הבנוי על הניצב שווה לשטח המלבן הבנוי מהיתר והיטל הניצב על היתר).

לפני כן הראינו כי $BD^2 = ab$ ו- $OD = \frac{a+b}{2}$ ולכן

$$BD^2 = OD \cdot DE \Longleftrightarrow ab = \frac{a+b}{2} \cdot DE \Longleftrightarrow DE = \frac{2ab}{a+b} \Longleftrightarrow \frac{1}{DE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

ומכאן $DE = H(a,b)$.

נוכיח גם ש-DF מיצג את <u>הממוצע השורשי ריבועי</u> של a ו-b (בניה זו הוצעה על ידי Iles ו-Wilson, 1977):

במשולש ישר הזוית DOF קיים

$$OF = OB = AO - AB =$$

$$= \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

כמו כן, על פי משפט פיתגורס $DF^2 = OD^2 + OF^2$

$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Longleftrightarrow DF = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)} = R(a,b)$$

ולבסוף נראה שהקטע PD מיצג את <u>הממוצע ההרמוני השורשי</u>:

המשולשים ODF ו-PDE דומים ולכן

$$\frac{DF}{DE} = \frac{OD}{PD} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{\frac{2ab}{a+b}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{PD} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow PD = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} \cdot \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} = HR(a,b)$$

III. יחס הסדר בין הממוצעים

בסעיף הראשון הגדרנו את חמשת הממוצעים הבאים עבור שני מספרים חיוביים כלשהם a ו-b:

הממוצע החשבוני (האריתמטי) $A(a, b) = \frac{a + b}{2}$

הממוצע ההנדסי (הגיאומטרי) $G(a, b) = \sqrt{ab}$

הממוצע ההרמוני $H(a, b) = \frac{2ab}{a + b}$

או $$\frac{1}{H(a, b)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

הממוצע השורשי ריבועי $R(a, b) = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$

והממוצע ההרמוני שורשי $HR(a, b) = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}}$

או $$\frac{1}{HR(a, b)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)}$$

עתה ניתן להראות שממוצעים אלו מקיימים את יחס הסדר הבא:

$$HR(a,b) \leqq H(a, b) \leqq G(a,b) \leqq A(a,b) \leqq R(a,b) \qquad (1)$$

כאשר השוויון מתקיים אם ורק אם $a = b$.

נוכיח את קיום יחס הסדר (1) בשלושה אופנים: בדרך גיאומטרית, בדרך אלגברית ובדרך המשלבת ייצוג גיאומטרי והוכחה בעזרת שיטות אלמנטריות של חשבון דפרנציאלי.

א) הוכחה גיאומטרית לקיום הסדר של (1)

ההוכחה נובעת מהסתכלות בציור 1 ובתוצאות של הסעיף הקודם על פיהן:

$DF = R(a,b)$; $OD = A(a,b)$; $BD = G(a,b)$; $DE = H(a,b)$; $PD = HR(a,b)$

בהסתמך על כך שיתר במשולש ישר זוית גדול מכל ניצב באותו משולש,

אנו מקבלים השרשרת

$$DF > OD > BD > DE > PD \Longleftrightarrow R(a,b) > A(a,b) > G(a,b) > H(a,b) > HR(a,b)$$

ואם $a = b$ הרי כל הקטעים מתלכדים ל-OD (כי אז הנקודות O ו-B מתלכדות ולכן (1) מתקיים.

ב) <u>הוכחה אלגברית (Maor, 1977) לקיום הסדר של (1)</u>

נסתכל תחילה על אי-השוויון

$$(u - v)^2 \geqq 0 \qquad (2)$$

עבור ערכים כלשהם של u ו-v .

אם נציב $u = \sqrt{a}$ ו- $v = \sqrt{b}$ $(a > 0\ ,\ b > 0)$ ב-(2) נקבל

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geqq 0$$

כלומר
$$\frac{a + b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

או
$$A(a, b) \geqq G(a, b)$$

אם נציב במקום זאת $u = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ו- $v = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ ב-(2), נמצא ש-

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{\sqrt{ab}} \geqq 0$$

כלומר,
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqq \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

ומכאן $\dfrac{1}{H(a, b)} \geqq \dfrac{1}{G(a, b)}$ ולכן $H(a, b) \leqq G(a, b)$

כאשר נוסיף $u^2 + v^2$ לשני הצדדים ב-(2) נקבל

$$2(u^2 + v^2) - 2uv \geqq u^2 + v^2$$

או
$$2(u^2 + v^2) \geqq (u + v)^2$$

וכאשר נחלק ב-4 ונוציא שורש ריבועי, נמצא

$$\sqrt{\frac{1}{2}(u^2 + v^2)} \geqq \frac{u + v}{2}$$

הצבת $u = a$ ו- $v = b$ באי-שוויון זה תתן מיד ש- $R(a,b) \geqq A(a,b)$
ואילו הצבת $u = \frac{1}{a}$ ו- $v = \frac{1}{b}$ תתן $HR(a, b) \leqq H(a, b)$. בכל המקרים
הנ"ל סימן השוויון מתקיים אם ורק אם $a = b$, מכיוון שרק אז יש
לנו $(u - v)^2 = 0$.

ג) <u>הוכחה לקיום הסדר של (1) בעזרת חשבון דפרנציאלי</u>

נציין תחילה, שלכל אי-השוויונים של (1) יש פירושים גיאומטריים
בעזרת הקשר בין מלבן וריבוע:

(i) אי-השוויון $G(a, b) \leqq A(a, b)$ מובע על ידי הטענה שבין כל
המלבנים בעלי היקף נתון $2(a + b)$, המלבן שיש לו שטח מכסימלי
הוא הריבוע בעל צלע $\frac{1}{2}(a + b)$.

(ii) אי-השוויון $A(a, b) \leqq R(a, b)$ מובע על ידי הטענה שבין כל
המלבנים בעלי היקף נתון $2(a + b)$, המלבן שיש לו אלכסון
מינימלי הוא הריבוע בעל צלע $\frac{1}{2}(a + b)$.

(iii) אי-השוויון $H(a, b) \leqq G(a, b)$ מובע על ידי הטענה שבין כל
המלבנים בעלי שטח נתון ab, המלבן שיש לו יחס מכסימלי של שטח
להיקף הוא הריבוע בעל צלע $\sqrt{ab}$.

(iv) אי-השוויון $HR(a, b) \leqq H(a, b)$ מובע על ידי הטענה שבין כל
המלבנים בעלי יחס נתון של שטח להיקף, המלבן שיש לו יחס
מכסימלי של שטח לאלכסון הוא הריבוע בעל צלע $\frac{2ab}{a + b}$.

להלן, נוכיח כל אחת מהטענות הנ"ל בעזרת שיטות של חשבון דפרנציאלי למציאת מכסימום או מינימום על ידי קביעת פונקציה מתאימה, חישוב נגזרת ראשונה, איפוס הנגזרת ובדיקת סימן הנגזרת השניה. כמו כן נראה, שכל טענה אקויולנטית (שקולה) לאי-השוויון האלגברי עבורו מהווה ייצוג גיאומטרי.

<u>הוכחת (i)</u> נסמן את ההיקף הנתון על ידי הקבוע k ואת שטח המלבן על ידי S.

לכן,
$$k = 2(a + b) \Longrightarrow b = \frac{k}{2} - a$$

ומכאן
$$S = ab = a(\frac{k}{2} - a) = -a^2 + \frac{k}{2}a$$

השטח S הוא פונקציה גזירה של a ולכן

$$S' = -2a + \frac{k}{2}$$

$$S' = 0 \Longleftrightarrow -2a + \frac{k}{2}\ 0 \Longleftrightarrow a = \frac{k}{4}$$

$$S'' = -2 \Longrightarrow S'' < 0$$

אי לכך, השטח הוא מכסימלי כאשר $a = \frac{k}{4}$ ואז $b = \frac{k}{2} - a = \frac{k}{4}$ כלומר המלבן שיש לו שטח מכסימלי הוא הריבוע בעל צלע של $\frac{k}{4}$ השווה ל- $\frac{1}{2}(a + b)$.

נותר להראות, שטענה זו אקויולנטית ל- $G(a, b) \leqq A(a, b)$ ואכן

$$S \leqq (\frac{k}{4})^2 \Longleftrightarrow ab \leqq (\frac{a + b}{2})^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{ab} \leqq \frac{a + b}{2} \Longleftrightarrow G(A, b) \leqq A(a, b)$$

<u>הוכחת (ii)</u> נסמן את ההיקף הנתון על ידי הקבוע k ואת אלכסון המלבן על ידי ℓ.

לכן,
$$k = 2(a + b) \Longrightarrow b = \frac{k}{2} - a$$

ומכאן
$$\ell = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (\frac{k}{2} - a)^2}$$

נעלה בריבוע ונקבל
$$\ell^2 = a^2 + (\frac{k}{2} - a)^2$$

האלכסון ℓ $(\ell > 0)$ הוא פונקציה גזירה של a ולכן

$$2\ell\ell' = 2a + 2(\frac{k}{2} - a)(-1) = 4a - k$$

$$\ell' = \frac{4a - k}{2\ell}$$

$$\ell' = 0 \Longleftrightarrow 4a - k = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{k}{4}$$

ומכיוון שהמכנה של ℓ' חיובי, הסימן של ℓ'' ב- $a = \frac{k}{4}$ (נקודת האפס של ℓ') נקבע על פי נגזרת המונה של ℓ' ולכן $\ell''(\frac{k}{4}) > 0$.

אי לכך, האלכסון מינימלי כאשר $a = \frac{k}{4}$ ואז $b = \frac{k}{2} - a = \frac{k}{4}$ כלומר, המלבן שיש לו אלכסון מינימלי הוא ריבוע בעל צלע $\frac{k}{4}$ השווה ל- $\frac{1}{2}(a + b)$.

נותר להראות, שטענה זו אקויולנטית ל- $A(a, b) \leqq R(a, b)$ ואכן

$$(\frac{k}{4})\sqrt{2} \leqq \sqrt{a^2 + b^2} \Longleftrightarrow (\frac{k}{4}) \leqq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a + b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \Longleftrightarrow A(a, b) \leqq R(a, b)$$

<u>הוכחת (iii)</u> נסמן את השטח הנתון על ידי הקבוע S ואת היחס בין שטח המלבן להיקפו על ידי f .

לכן $$S = ab \Longrightarrow b = \frac{S}{a}$$

ומכאן $$f = \frac{S}{2(a + b)} = \frac{S}{2(a + \frac{S}{a})} = \frac{S}{2} \cdot \frac{a}{a^2 + S}$$

היחס f הוא פונקציה גזירה של a ולכן

$$f' = \frac{S}{2} \cdot \frac{1 \cdot (a^2 + S) - (2a)(a)}{(a^2 + S)^2} = \frac{S}{2} \cdot \frac{S - a^2}{(a^2 + S)^2}$$

$$f' = 0 \Longleftrightarrow S - a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = \sqrt{S}$$

הסימן של f'' ב- $a = \sqrt{S}$ נקבע על פי נגזרת המונה של f' ולכן $f''(\sqrt{S}) < 0$.

אי לכך, היחס מכסימלי כאשר $a = \sqrt{S}$ ואז $b = \frac{S}{a} = \sqrt{S}$ כלומר, המלבן שיש לו יחס מכסימלי של שטח להיקף הוא הריבוע בעל צלע $\sqrt{S}$ השווה ל- $\sqrt{ab}$.

נותר להראות, שטענה זו אקוילנטית ל- $H(a, b) \leqq G(a, b)$ ואכן

$$\frac{ab}{2(a+b)} \leqq \frac{S}{4\sqrt{S}} \Longleftrightarrow \frac{ab}{2(a+b)} \leqq \frac{\sqrt{S}}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leqq \sqrt{ab} \Longleftrightarrow H(a, b) \leqq G(a, b)$$

הוכחת (iv) נסמן את היחס הנתון של שטח להיקף המלבן על ידי הקבוע k ואת היחס בין שטח המלבן לאלכסונו על ידי f .

לכן,

$$k = \frac{ab}{2(a+b)} \Longrightarrow b = \frac{2ka}{a-2k}$$

ומכאן

$$f = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \Longrightarrow f = \frac{a\left(\frac{2ka}{a-2k}\right)}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{2ka}{a-2k}\right)^2}}$$

ולאחר פישוט אלגברי והעלאה בריבוע נקבל

$$f^2 = \frac{4k^2a^2}{a^2 - 4ka + 8k^2}$$

היחס f $(f > 0)$ הוא פונקציה של a ולכן

$$2ff' = 4k^2\,\frac{2a(a^2-4ka+8k^2) - (2a-4k)a^2}{(a^2-4ka+8k^2)^2} = 4k^3\,\frac{16ka - 4a^2}{(a^2-4ka+8k^2)^2}$$

$$f' = 0 \Longrightarrow 16ka - 4a^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 4k$$

הסימן של f'' ב- $a = 4k$ נקבע על פי נגזרת המונה של f' ולכן $f''(4k) < 0$.

אי לכך, היחס מכסימלי כאשר $a = 4k$ ואז $b = \frac{2ka}{a - 2k} = 4k$ כלומר, המלבן שיש לו יחס מכסימלי של שטחו לאלכסונו הוא הריבוע בעל צלע של $4k$ השווה ל- $\frac{2ab}{a + b}$.

נותר להראות, שטענה זו אקוויולנטית ל- $HR(a, b) \leqq H(a, b)$ ואכן

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqq \frac{(4k)^2}{(4k)\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}\ ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqq 4\ \frac{ab}{2(a + b)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2}} \leqq \frac{2ab}{a + b} \Longleftrightarrow HR(a, b) \leqq H(a, b)$$

IV. <u>ממוצעים של שלושה מספרים</u>

בסעיף הראשון הצגנו סידרה של בעיות הקשורות למלבן וריבוע ובאמצעותן הגדרנו את הממוצע החשבוני, ההנדסי, ההרמוני, השורשי ריבועי וההרמוני השורשי של שני מספרים.

להלן נציג סידרה של בעיות הקשורות לתיבה וקוביה ובאמצעותן נגדיר את חמשת הממוצעים הנ"ל עבור שלושה מספרים.

א) <u>הממוצע החשבוני (האריתמטי)</u>

נתונה תיבה שאורכי מקצועותיה מסומנים על ידי a, b ו-c. דרוש לחשב מקצוע של קוביה שאורך המסגרת (שלד) שלה שווה לאורך מסגרת התיבה הנתונה.

נסמן את מקצוע הקוביה ב-x ומכאן נובע:

$$12x = 4(a + b + c)$$

$$x = \frac{a + b + c}{3}$$

המספר x הוא פונקציה של שלושת המספרים a, b ו-c וקוראים לו <u>הממוצע החשבוני</u> של המספרים a, b ו-c. נסמן אותו על ידי $A(a\ ,b\ ,c)$.

ב) <u>הממוצע ההנדסי (הגיאומטרי)</u>

נתונה תיבה בעלת מקצועות a, b ו-c. דרוש לחשב מקצוע של קוביה שנפחה שווה לנפח התיבה הנתונה.

נסמן את מקצוע הקוביה ב-x ומכאן נובע

$$x^3 = abc$$

ולכן, $$x = \sqrt[3]{abc}$$

המספר x נקרא <u>הממוצע ההנדסי</u> של המספרים a, b ו-c. נסמן אותו על ידי $G(a, b, c)$.

ג) <u>הממוצע ההרמוני</u>

נתונה תיבה בעלת מקצועות a, b ו-c. דרוש לחשב מקצוע של קוביה שהיחס בין נפחה לשטח פניה שווה ליחס בין נפח התיבה הנתונה לשטח פניה.
נסמן את מקצוע הקוביה ב-x ומכאן:

$$\frac{x^3}{6x^2} = \frac{abc}{2(ab + bc + ac)} \Longrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

במקרה זה x מוגדר <u>כממוצע ההרמוני</u> של a, b ו-c. נסמן אותו על ידי $H(a, b, c)$.

<u>הממוצע השורשי ריבועי</u>

נתונה תיבה בעלת מקצועות a, b ו-c. דרוש לחשב מקצוע של קוביה שאלכסונה שווה לאלכסון התיבה הנתונה.

נסמן את מקצוע הקוביה ב-x ומכאן:

$$x\sqrt{3} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

המספר x נקרא <u>הממוצע השורשי ריבועי</u> של המספרים a, b ו-c. נסמן אותו על ידי $R(a, b, c)$.

ה) <u>הממוצע ההרמוני השורשי</u>

נתונה תיבה בעלת מקצועות a, b ו-c. דרוש לחשב מקצוע של קוביה שהיחס בין נפחה לשורש הריבועי של סכום ריבועי שטחי פיאותיה שווה ליחס בין נפח התיבה הנתונה לשורש הריבועי של סכום ריבועי שטחי פיאותיה.

נסמן את מקצוע הקוביה ב-x ומכאן:

$$\frac{x^3}{\sqrt{6x^4}} = \frac{abc}{\sqrt{2(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} = \sqrt{\frac{3a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$$

המספר x נקרא <u>הממוצע ההרמוני השורשי</u> של המספרים a, b ו-c. נסמן אותו על ידי $HR(a\ ,b\ ,c)$.

V. <u>ממוצעים של n מספרים</u>

א) <u>הממוצע החשבוני</u>

מספר אנשים מבצעים מדידה כלשהי (כגון אורך, או עובי של חפץ מסויים). בדרך כלל תוצאת המדידה אינה אחידה והיא תלויה במכשיר בעזרתו המדידה מתבצעת, בתנאים האובייקטיביים והסובייקטיביים בהם נמצאים האנשים שמודדים ועוד. בבעיות יום-יום וכמו כן במדע, מוסכם במקרה זה לחשב תוצאה הנמצאת בתחום בין כל המדידות על ידי כך שנסכם את כל המדידות ונחלק במספרן. תוצאת חישוב זה נקראת <u>הממוצע החשבוני</u> של המספרים $a_1\ ,a_2\ ,\ldots\ ,a_n$. נסמנו על ידי $A(a_1\ ,a_2\ ,\ldots\ ,a_n)$ כלומר:

$$A(a_1\ ,a_2\ ,\ldots\ ,a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

מדוע הגיוני להתיחס לממוצע החשבוני של המדידות?

נניח שבצענו n מדידות וקבלנו כתוצאה מכך את המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ונניח שהתוצאה האופטימלית שאנו מחפשים היא x, אזי הסטיות מהתוצאה x ב-n המדידות הן:

$$x - a_1 \;,\; x - a_2 \;,\; \ldots \;,\; x - a_n$$

כאשר הסטיות יכולות להיות חיוביות, שליליות או אפס. לכן, אם נבצע סכום ישיר של כל הסטיות, לא נקבל אינפורמציה מדוייקת על גודלן. אפשר להתגבר על בעיה זו אם מעלים בריבוע את כל המספרים $(x - a_i)$ ומחשבים את סכום הריבועים האלו (שנסמנו ב- $F(x)$):

$$F(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$$

אנו מעוניינים לבחור את x כך שהפונקציה $F(x)$ תקבל ערך מינימלי וזאת נשיג על ידי x שעבורו הנגזרת הראשונה $F'(x)$ מתאפסת ואילו הנגזרת השניה $F''(x)$ חיובית:

$$F'(x) = 2[(x - a_1) + (x - a_2) + \ldots + (x - a_n)]$$

$$= 2[nx - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] = 2[nx - \sum_{i=1}^{n} a_i]$$

$$F''(x) = 2n > 0$$

$$F'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1} a_i}{n} = A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

ומכאן נובע, שסכום ריבועי הסטיות קטן ביותר כאשר נבחר את x כממוצע החשבוני של המדידות.

דרך אלטרנטיבית להראות זאת ללא שימוש בחשבון דיפרנציאלי (Courant and Robbins, 1961): נביע את הסטיה $(x - a_i)$ על ידי הביטוי $(x - m) + (m - a_i)$ כאשר m מסמן את הממוצע החשבוני של המדידות. אזי:

$$(x - a_i)^2 = (x - m)^2 + 2(x - m)(m - a_i) + (m - a_i)^2$$

כאשר נסכם את כל ריבועי הסטיות, האיבר האמצעי יתאפס כי:

$$\sum_{i=1}^{n} 2(x - m)(m - a_i) = 2(x - m)[(m - a_1) + (m - a_2) + \dots + (m - a_n)]$$

$$= 2(x - m)[nm - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)]$$

$$= 2(x - m)[nm - nm] = 0$$

ואז:
$$\sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 = n(x - m)^2 + \sum_{i=1}^{n} (m - a_i)^2 \geqq \sum_{i=1}^{n} (m - a_i)^2$$

השוויון יתקיים רק עבור $x = m$ ולכן הוכחנו שוב שסכום ריבועי הסטיות מינימלי (ואז התוצאה אופטימלית) כאשר בוחרים את הממוצע החשבוני של המדידות.

אם בין המדידות שמבוצעות, ישנן אחדות שמידת הדיוק שלהן גדולה יותר, אז לתוצאות המדידות הללו נהוג לתת חשיבות גדולה יותר על פי שיקלול. לדוגמא, נניח שנעשו 7 מדידות, ביניהן 4 רגילות ו-3 בדיוק הגדול פי שניים מהראשונות, אזי נחשב כל אחת משלוש המדידות האחרונות כשתי מדידות.
אם תוצאות המדידות הן המספרים $a_1, a_2, \dots, a_7$ ניתן לשלושת המספרים האחרונים משקל כפול ונתייחס כאילו נעשו 10 מדידות. הממוצע החשבוני שלהן הוא

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2a_5 + 2a_6 + 2a_7}{10}$$

במקרה הכללי של n מדידות, לא כולן באותה מידת דיוק, מצמידים לכל תוצאה a_i מספר חיובי μ_i שנקרא המשקל המתאים למדידה ה-i-ית.
במקרה זה, הממוצע החשבוני נקרא <u>הממוצע החשבוני המשוקלל</u> של המספרים a_i במשקלים μ_i והוא מוגדר על ידי הנוסחה

$$A(a_1,a_2,\dots,a_n\ ;\ \mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n) = \frac{\mu_1 a_1+\mu_2 a_2+\dots+\mu_n a_n}{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

אם $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 1$ אז נוסחת הממוצע החשבוני המשוקלל תבטא את הממוצע החשבוני הרגיל.

מספר אנשים שוקלים חפץ על מאזני כפות בעלי זרועות לא מדוייקים. במקרה כזה כל אחד שוקל את החפץ על המאזניים שלו פעמיים: שמים את החפץ לשקילה על כף אחת של המאזניים ואת המשקולת על הכף השניה ואילו בשקילה השניה מחליפים במקומות. נניח כי אורכי הזרועות של המאזניים הראשונות הן b_1 ו- b_2 ס"מ ושהתקבלו המשקלים a_1 ו- a_2 גרם ואילו לגבי המאזניים השניות אורכי הזרועות b_3 ו- b_4 ס"מ ושהתקבלו המשקלים a_3 ו- a_4 גרם וכך הלאה עד לאחרון עבורו אורך הזרועות b_{n-1} ו- b_n ס"מ ושהתקבלו המשקלים a_{n-1} ו- a_n גרם. אזי, אם x מסמן את משקל החפץ, לפי חוקי הפיסיקה מתקיימות זוגות המשוואות הבאות

$$a_1b_1 = xb_2 \quad , \quad a_2b_2 = xb_1$$

$$a_3b_3 = xb_4 \quad , \quad a_4b_4 = xb_3$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n-1}b_{n-1} = xb_n \qquad a_nb_n = xb_{n-1}$$

עתה, נכפיל את כל השוויונים, כל אגף בהתאמה ונקבל

$$a_1a_2 \ldots a_n \cdot b_1 \cdot b_2 \ldots b_n = x^n \cdot b_1b_2 \ldots b_n$$

נצמצם ב- $b_1b_2 \ldots b_n$ ונקבל $x^n = a_1a_2 \ldots a_n$

ומכאן נובע $x = \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n}$

המספר x נקרא __הממוצע ההנדסי__ של המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

נסמנו על ידי $G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, כלומר:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

באופן דומה להגדרת הממוצע החשבוני המשוקלל מגדירים ממוצע הנדסי

משוקלל של n מספרים חיוביים $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ במשקלים $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ על ידי

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n ; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} \mu_i]{a_1^{\mu_1} \cdot a_2^{\mu_2} \ldots a_n^{\mu_n}}$$

ג) <u>הממוצע ההרמוני</u>

נניח שב-n מפעלים $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ של תעשיה מייצרים מוצר מסויים. היות ומכשירי הייצור במפעלים השונים אינם שווים בשכלולם, זמן הייצור של המוצר שונה ממפעל למפעל. נסמן ב- t_i את מספר השעות הנחוצות למפעל M_i לייצור מוצר אחד, לכן ההספק לשעה של מפעל M_i יהיה $\frac{1}{t_i}$ מוצר לשעה. נסמן את ההספק הממוצע המיצג את התעשיה ב- $\frac{1}{t}$ ולכן

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right)$$

המספר t נקרא <u>הממוצע ההרמוני</u> של המספרים $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ואילו $\frac{1}{t}$ הוא ההספק הממוצע של התעשיה בשעה בייצור המוצר המסויים.

באופן כללי, הממוצע ההרמוני של n מספרים a_i מסומן על ידי $H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ומהגדרתו נובע כי היפוכו של הממוצע ההרמוני הוא הממוצע החשבוני של היפוכם של המספרים a_i, כלומר

$$\frac{1}{H(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

ד) <u>הממוצע השורשי ריבועי</u>

נחזור לדון ב-n מדידות חוזרות אותן הזכרנו בסעיף אודות הממוצע החשבוני. נסמן את תוצאות המדידות ב- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ואת הממוצע החשבוני שלהן ב-m כך שהטעויות של מדידה i היא $\varepsilon_i = m - a_i$. כמובן ש- ε_i יכול להיות חיובי, שלילי או אפס, כך שהממוצע החשבוני של הטעויות איננו מספק אינפורמציה נכונה על ממוצע הטעויות ב-n המדידות החוזרות. לכן החליטו אנשי מדע לחשב את ממוצע ריבועי הטעויות ואז מקבלים מספר המסומן ב- σ^2 ושנקרא השונות של סידרת המדידות כך ש- $\sigma^2 = \frac{1}{n}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2)$. אבל היות והעלינו בריבוע את הטעויות ε_i התרחקנו מהערכים המציאותיים ε_i וגם קיבלנו

יחידת מידה שונה מהמקורית. לכן הגיוני לחשב את השורש הריבועי של σ^2 כך ש-

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}[(m-a_1)^2 + (m-a_2)^2 + \ldots + (m-a_n)^2]}$$

במקרה זה σ היא הממוצע השורשי ריבועי של המספרים $(m - a_i)$ ובחישובים סטטיסטיים σ נקראת סטיית התקן של המספרים a_i.

במקרה הכללי, בדרך כלל נתונים n מספרים a_i והמספר $R(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ המוגדר על ידי הנוסחה:

$$R(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

R נקרא הממוצע השורשי ריבועי של המספרים a_i.

ה) <u>הממוצע ההרמוני השורשי</u>

במקרה זה לא נצביע על בעיה שפתרונה מוביל להגדרת הממוצע ההרמוני השורשי של n מספרים אלא נרחיב את ההגדרה של ממוצע זה עבור 2 ו-3 מספרים ל-n מספרים. נגדיר את $HR(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ כממוצע ההרמוני השורשי של המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ על ידי הנוסחה

$$\frac{1}{HR(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}}$$

VI. תכונות יסודיות של הממוצעים

הממוצעים מאופינים על ידי שתי תכונות יסודיות ולמעשה תכונות אלו גם נחוצות בכדי שביטוי כלשהו ימלא תפקיד של ממוצע.

<u>תכונה 1</u>. כל ממוצע נמצא בין המספר הקטן ביותר ובין המספר הגדול ביותר מבין המספרים

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

ואם כל המספרים $a_1, a_2, \dots, a_n$ שווים ביניהם, אזי כל ממוצע שווה לאחד מהם.

נראה את קיום התכונה הראשונה עבור כל ממוצע שהגדרנו. נסמן את המספר הקטן ביותר בין המספרים $a_1, a_2, \dots, a_n$ על ידי $a_{min} = \min\{a_i\}$ ואת הגדול ביותר על ידי $a_{max} = \max\{a_i\}$.

א) צריך להוכיח כי <u>הממוצע החשבוני</u> $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ מקיים

$$\min(a_1,a_2,\dots,a_n\} \leqq A(a_1,a_2,\dots,a_n\} \leqq \max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$$

<u>הוכחה:</u> לפי נוסחת הממוצע החשבוני:

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

נחליף כל אחד מהמספרים $a_1, a_2, \dots, a_n$ ב- a_{min} ולכן

$$A(a_1,a_2,\dots,a_n) \geqq \frac{a_{min} + a_{min} + \dots + a_{min}}{n} = \frac{na_{min}}{n} = a_{min} = \min\{a_i\}$$

כלומר $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \geqq \min\{a_i\}$ ורק אם כל המספרים a_i שווים ביניהם (ושווים ל- a_{min}) אז נקבל $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \min\{a_i\}$.

באופן דומה, נחליף את $a_1, a_2, \dots, a_n$ ב- a_{max} ונקבל

$$A(a_1,a_2,\dots,a_n) \leqq \frac{a_{max} + a_{max} + \dots + a_{max}}{n} = \frac{na_{max}}{n} = a_{max} = \max\{a_i\}$$

כלומר $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \leqq \max\{a_i\}$ וגם הפעם $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \max\{a_i\}$ רק אם כל המספרים a_i שווים ביניהם (ושווים ל- a_{max}).

באופן דומה מוכיחים עבור הממוצע החשבוני המשוקלל.

ב) נוכיח עתה <u>שהממוצע הגיאומטרי המשוקלל</u> $G(a_1,a_2,\dots,a_n;\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$ מקיים $\min\{a_i\} \leqq G(a_1, a_2, \dots, a_n ; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \leqq \max\{a_i\}$

גם כאן, תחילה נחליף את כל המספרים ב- a_{min} ונקבל

$$G(a_1,a_2,\dots,a_n;\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n) = \sqrt[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]{a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n}} \geqq \sqrt[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]{a_{min}^{\mu_1} a_{min}^{\mu_2} \dots a_{min}^{\mu_n}}$$

$$= \sqrt[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]{a_{min}^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]{a_{min}^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}} = a_{min} = \min\{a_i\}$$

ואם נחליף את כל המספרים ב- a_{max} נקבל

$$G(a_1,a_2,\ldots,a_n;\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n) \leqq \sqrt[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]{a_{max}^{\mu_1} a_{max}^{\mu_2} \ldots a_{max}^{\mu_n}} =$$

$$= \sqrt[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]{a_{max}^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{n}\mu_i]{a_{max}^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}} = a_{max} = \max\{a_i\}$$

ולכן

$$\min\{a_i\} \leqq G(a_1,a_2,\ldots,a_n;\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n) \leqq \max\{a_i\}$$

אם $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 1$, אז הממוצע הגיאומטרי המשוקלל יבטא את הממוצע הגיאומטרי הרגיל ונקבל

$$\min\{a_i\} \leqq G(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leqq \max\{a_i\}$$

ואם כל המספרים a_i שווים ביניהם, נקבל $G(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_i$

ג) הוכחת התכונה הראשונה עבור <u>הממוצע ההרמוני H</u>

לפי נוסחת הממוצע ההרמוני

$$\frac{1}{H(a_1,a_2,\ldots,a_n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

אם נחליף כל איבר a_i ב- a_{min} אזי $\frac{1}{a_i} \leqq \frac{1}{a_{min}}$ ולכן

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{min}} + \frac{1}{a_{min}} + \ldots + \frac{1}{a_{min}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{a_{min}} = \frac{1}{a_{min}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{H} \leqq \frac{1}{a_{min}} \Longrightarrow H \geqq a_{min} = \min\{a_i\}$$

ובאופן דומה אם נחליף כל איבר a_i ב- a_{max} , אזי $\frac{1}{a_i} \geqq \frac{1}{a_{max}}$ ונקבל

$$\frac{1}{H} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_{max}} + \frac{1}{a_{max}} + \ldots + \frac{1}{a_{max}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{a_{max}} = \frac{1}{a_{max}}$$

ומכאן נובע $H(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqq a_{max} = \max\{a_i\}$ וכתוצאה מכך

$$\min\{a_i\} \leqq H(a_1,a_2,\ldots,a_n) \leqq \max\{a_i\}$$

ד) בדרך דומה על ידי החלפות איברים ב- $a_{min} = \min\{a_i\}$ וב- $a_{max} = \max\{a_i\}$ ניתן להוכיח שהתכונה הראשונה מתקיימת עבור הממוצע השורשי ריבועי והממוצע ההרמוני השורשי.

<u>תכונה 2.</u> כל ממוצע הוא פונקציה הומוגנית ממעלה 1 של $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

לפני שנוכיח שכל ממוצע מקיים את תכונה 2, נגדיר את מושג הפונקציה ההומוגנית שיש לו השלכות רבות ושימושים באלגברה, אנליזה, גיאומטריה ועוד. פונקציה f של n משתנים ממשיים נקראת פונקציה הומוגנית ממעלה p אם היא מקיימת את התנאי: $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ עבור כל t ממשי.

לדוגמא: עבור $f(x) = 5x^2$ מתקיים $f(tx) = 5(tx)^2 = t^2 f(x)$ ומכאן $f(x)$ היא פונקציה הומוגנית ממעלה 2. אבל $g(x) = 5x^2 + 4$ אינה פונקציה הומוגנית מכיוון ש- $g(tx) = 5t^2x^2 + 4 \neq t^2(5x^2 + 4)$.
לעומת זאת הפונקציה f בשני משתנים x ו- y, $f(x, y) = 3x + 4y$ היא פונקציה הומוגנית ממעלה 1 מכיוון שהיא מקיימת

$$f(tx, ty) = t(3x + 4y) = tf(x, y)$$

ואילו $f(x) = \sin x$ אינה פונקציה הומוגנית מפני ש- $\sin 2x \neq 2\sin x$.
עתה נוכיח את התכונה השניה עבור הממוצעים השונים.

א) <u>עבור הממוצע החשבוני המשוקלל והרגיל</u>

לפי נוסחת הממוצע החשבוני המשוקלל:

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n ; \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

נחליף כל איבר a_i ב- ta_i ונקבל

$$A(ta_1, ta_2, \dots, ta_n ; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i ta_i}{\sum\limits_{i-1}^{n} \mu_1} = \frac{t\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i}$$

$$= tA(a_1, a_2, \dots, a_n ; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

ולכן הממוצע החשבוני המשוקלל הוא פונקציה הומוגנית ממעלה 1.

אם $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 1$ נקבל $A(ta_1, ta_2, \dots, ta_n) = tA(a_1, a_2, \dots, a_n)$

כלומר הממוצע החשבוני הרגיל הוא פונקציה הומוגנית ממעלה 1.

ב) <u>עבור הממוצע ההנדסי המשוקלל והרגיל</u>

לפי נוסחת הממוצע ההנדסי המשוקלל

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n ; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \sqrt[\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i]{a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n}}$$

נחליף כל איבר a_i ב- ta_i ונקבל

$$G(ta_1, ta_2, \dots, ta_n ; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \sqrt[\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i]{(ta_1)^{\mu_1} (ta_2)^{\mu_2} \dots (ta_n)^{\mu_n}}$$

$$= \sqrt[\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i]{t^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n} a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n}} = t \sqrt[\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i]{a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \dots a_n^{\mu_n}}$$

$$= tG(a_1, a_2, \dots, a_n ; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

ואם $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 1$ אז מדובר בממוצע ההנדסי הרגיל
ומקבלים עבורו

$$G(ta_1, ta_2, \dots, ta_n) = tG(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

כלומר, גם הממוצע ההנדסי המשוקלל וגם הממוצע ההנדסי הרגיל הם פונקציות הומוגניות ממעלה 1.

כאן יש להעיר, שהגדרת הממוצע ההנדסי של n משתנים $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ אינה שרירותית. התלמיד יכול לתמוה לאחר הסתכלות על הממוצע ההנדסי של שני משתנים $G(a_1,a_2) = \sqrt{a_1a_2}$ מדוע לא מגדירים את $G(a_1, a_2, \dots, a_n)$ על ידי $\sqrt{a_1a_2\dots a_n}$. הסיבה לכך היא ש- $G(a_1,a_2) = \sqrt{a_1a_2}$ היא פונקציה הומוגנית ממעלה 1, אבל $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt{a_1a_2\dots a_n}$ אינה פונקציה הומוגנית ממעלה 1 היות ובמקרה זה

$$G(ta_1,ta_2,\dots,ta_n) = \sqrt{ta_1\cdot ta_2\dots ta_n} = \sqrt{t^na_1a_2\dots a_n}$$

$$= t^{\frac{n}{2}}G(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

ואי לכך נחוץ היה להגדיר $G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$ מפני שזו פונקציה הומוגנית ממעלה 1 וזאת על פי דרך המתמטיקה שהרחבה של מושג קיים צריכה לקיים את התכונות היסודיות של המושג הבסיסי (כדוגמא נוספת, נזכיר כי ההגדרות של $a^\circ = 1$ או $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ניתנו בצורה זו כדי שהרחבת מושג החזקות למעריך אפס ולמעריך שלילי תשמור על כלל מנת שתי חזקות בעלות בסיס משותף $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ לכל n ו-m טבעיים).

ג) באופן דומה להוכחות הקודמות על ידי החלפת כל a_i ב- ta_i ניתן להראות שהממוצע ההרמוני, הממוצע השורשי ריבועי והממוצע ההרמוני שורשי מקיימים את התכונה השניה, כלומר שהם פונקציות הומוגניות ממעלה 1.

VII. ספקטרום של ממוצעים

על ידי שימוש בתכונות היסודיות של הממוצעים וכאשר נניח $0 < a \leqq b$ ניתן להרחיב את שרשרת אי השוויונים (1) ונקבל

$$a \leqq HR(a,b) \leqq H(a,b) \leqq G(a,b) \leqq A(a,b) \leqq R(a,b) \leqq b$$

כאשר בוחנים את סידרת הממוצעים ויחס הסדר ביניהם ניתן גם לגלות את הקשרים הבאים:

$$H(a,b)\cdot A(a,b) = G^2(a,b) \tag{3}$$

$$HR(a,b)\cdot R(a,b) = G^2(a,b) \tag{4}$$

כלומר, הממוצע הגיאומטרי הממוקם ב"מרכז" סידרת הממוצעים (1) איננו רק ממוצע גיאומטרי של a ו-b אלא גם של הממוצעים החשבוני וההרמוני וגם של הממוצעים השורשי ריבועי וההרמוני השורשי. כמו כן, ניתן להוכיח שעבור $0 < a < b$ מתקיים

$$A(a,b) - G(a,b) > G(a,b) - H(a,b) \tag{5}$$

נוכיח את אי השוויון (5) בעזרת השקילויות הבאות:

$$A - G > G - H \iff (A + H)^2 > (2G)^2 \iff$$

$$\iff \left(\frac{a+b}{2} + \frac{2ab}{a+b}\right)^2 > 4ab \iff \left(\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}\right)^2 > 0 \iff$$

$$\iff \quad \frac{(a - b)^2}{2(a + b)} > 0$$

את סידרת הממוצעים ניתן להרחיב אם בוחנים את ההכללות של הממוצע השורשי ריבועי ושל הממוצע ההרמוני שורשי ביחס למעריכי החזקות ומעלת השורש (לעומת ההכללות ביחס למספר המשתנים a, b, ...). נגדיר את הממוצע השורשי ריבועי המוכלל על ידי

$$R_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}(a^n + b^n)} \tag{6}$$

ואת הממוצע ההרמוני שורשי המוכלל על ידי

$$HR_n = \sqrt[n]{\frac{2a^nb^n}{a^n + b^n}} \tag{7}$$

כאשר n שלם חיובי. ההגדרות הנ"ל עבור R_n ו-HR_n שומרות על שתי התכונות היסודיות של ממוצעים כפי שפורטו בסעיף VI.

יש לשים לב כי (7) אקויולנטי ל-

$$\frac{1}{HR_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}\right)}$$

וכמו כן שעבור כל n מתקיים הקשר $HR_n \cdot R_n = G^2(a\ ,b)$ (8)

יותר מכך, את השוויונים (6) ו-(7) ניתן לקשר על ידי הגדרה אחת באמצעות הקשר (Hardy at. el, 1952)

$$HR_n = R_{-n} \tag{9}$$

ועבור n = 1, שוויון (6) נותן את הממוצע החשבוני של a ו-b ואילו שוויון (7) נותן את הממוצע ההרמוני של a ו-b, כך ש- $R_1 = A(a\ ,b)$ ו- $HR_1 = H(a\ ,b)$.

עבור n = 2, שוויון (6) נותן את הממוצע השורשי ריבועי ואילו שוויון (7) נותן את הממוצע ההרמוני השורשי כך ש- $R_2 = R(a\ ,b)$ ו- $HR_2 = HR(a\ ,b)$.

עתה, אנו יכולים לשער שסידרת הממוצעים (1) ניתנת להרחבה על ידי ה-R_n. Maor (1977) מעלה השערה ש- R_n היא סידרה מונוטונית עולה אבל אינו מוכיח את טענתו באופן כללי ולעומת זאת הוא רק בודק את ערכי R_n ו- HR_n עבור $a = 1$ ו- $b = 2$ וערכים שונים של n.
במאמר הבא נתאר ונוכיח על ידי מספר שיטות את ההתנהגות המונוטונית של R_n ונבחון את ההשלכות לגבי קיום ספקטרום רציף של ממוצעים במירווח בין a ו- b. בהמשך ננסה להוכיח קיום הסדר של (1) גם עבור ממוצעים של n משתנים ובעיקר נתרכז בקשר בין הממוצע החשבוני והממוצע ההנדסי של n משתנים.

Boyer, C.B. (1968), A History of Mathematics, John Wiley & Sons Inc.

Courant, R. and Robins, H. (1961), What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods, Oxford University Press.

Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G. (1952), Inequalities, Cambridge at the University Press.

Iles, K. and Wilson, L.J. (1977), A further neglected mean, The Mathematics Teacher, 70, 1, pp. 27-28.

Maor, E. (1977), A mathematician's Repertoire of means, The Mathematics Teacher, 70, 1, pp. 20-25.