מתמטיקה לחוגי העשרה

המחבר: אביגדור רוזנטולר

חוברת לתלמיד

מס' 5

היחידה לפעולות נוער
המחלקה להוראת המדעים
מכון ויצמן למדע - רחובות

חוברת זו מוקדשת על ידי המחבר
לזכרו על תלמידו **חיים בראון ז"ל**,
שנפל במערכות ישראל.

חיים בראון השתתף בחוגים
ובאולימפיאדות במתמטיקה שנערכו
על ידי היחידה לפעולות נוער
במכון ויצמן למדע, ואף זכה
בפרסים רבים.

יהי זכרו ברוך

מספרים הנכתבים על ידי הספרה 1

פעם אחת נגש אלי תלמיד מכיתה ט', בחוג שלי למתמטיקה ואמר: ''לא מזמן קראתי בעתון כי המספר R_{317}, כלומר המספר הנכתב על ידי 317 אחדות, הוא מספר ראשוני. האם אתה מוכן לספר לנו על מספרים מהסוג הזה ולהביא בעיות הקשורות למספרים אלו?''.

בחוברת זו נדון במספר דוגמאות המתקשרות לשאלת התלמיד.

ב ה צ ל ח ה,

המחבר

תשרי, תשמ''ה

ערכה: צפורה ברגלס

מרסן (Martin Mersenne, 1588-1648) היה מתמטיקאי צרפתי. הוא השקיע מאמץ גדול מאוד בחקירת מספרים מהצורה $2^p - 1$ שבהם המעריך p הוא מספר ראשוני. (למספרים אלו קוראים מספרי מרסן.) מרסן שאל את עצמו מתי מספר כזה הוא ראשוני.

החיפוש של מספרים ראשוניים מהצורה הנ"ל התמקד במספרים בעלי מעריך ראשוני, שכן אם מספר $2^p - 1$ הוא מספר ראשוני, אז המעריך p הוא מספר ראשוני.

<u>הוכחה</u>: נניח שהמעריך p אינו ראשוני, כלומר p הוא מספר פריק: $p = ab$ כאשר $a > 1$, $b > 1$. מקבלים:

$$2^p - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$$

הביטוי $(2^a)^b - 1$ הוא ביטוי שאפשר לפרקו לגורמים שאחד מהם הוא $2^a - 1$. ואולם, נתון כי $2^p - 1$ הוא מספר ראשוני, לכן p אינו יכול להיות מספר פריק.

אבל ההיפך אינו נכון. לדוגמא:

$$2^{11} - 1 = 2047 = 89 \times 23$$

נעזוב עתה את מספרי מרסן ונחזור לשאלתו של התלמיד, בה פתחנו: אילו מספרים הנכתבים ע"י אחדות בלבד הם ראשוניים?

עד שנת 1978 נתגלו רק שלושה מספרים מסוג זה, כלומר שלושה מספרים שהם ראשוניים, ואלו הם:

$$R_2 = 11 = \frac{10^2 - 1}{9}$$

$$R_{19} = 1,111,111,111,111,111,111 = \frac{10^{19} - 1}{9}$$

$$R_{23} = 11,111,111,111,111,111,111,111 = \frac{10^{23} - 1}{9}$$

בשנת 1978 נתגלה מספר חדש מסוג זה, הנכתב על ידי 317 אחדות, והוא מספר ראשוני:

$$R_{317} = \underbrace{11,111,\ldots,111}_{\text{317 אחדות}} = \frac{10^{317} - 1}{9}$$

נציג עתה לפניכם מספר בעיות שיעסיקו אתכם בבניית מספרים בעלי תכונות התחלקות שונות.

בעיה 1

מצא מספר בן שש ספרות המתחלק ב-2 ובעל התכונה הבאה: ניתן ליצור ממספר זה חמישה מספרים, ע"י העברת הספרה הראשונה לסוף המספר, כך שהמספרים החדשים גם הם יתחלקו ב-2.

בעיה 2

מצא מספר בן 7 ספרות המתחלק ב-3 ובעל התכונה הבאה: ניתן ליצור ממספר זה שישה מספרים חדשים על ידי העברת הספרה הראשונה לסוף המספר, כך שהמספרים המתקבלים יתחלקו גם הם ב-3.

בעיה 3

כנ"ל עבור מספר כלשהו המתחלק ב-9.

בעיה 4

נתון מספר בן שלוש ספרות 629 המתחלק ב-37 (בדוק!)
נעביר את הספרה הראשונה לסוף המספר ונקבל 296. גם מספר זה מתחלק ב-37 (בדוק!). נמשיך בתהליך ונקבל את המספר 962, גם מספר זה מתחלק ב-37 (בדוק!). הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי, כלומר הוכח כי אם נתון מספר בן שלוש ספרות המתחלק ב-37, אזי אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר נקבל מספרים חדשים שגם הם מתחלקים ב-37.

בעיה 5

נתון מספר בן תשע ספרות 267,934,601 המתחלק ב-333,667 (המנה 803)
יוצרים מספרים חדשים ע"י העברת הספרה הראשונה לסוף המספר ומקבלים
שמונה מספרים חדשים ואלו הם:

679346012

793460126

934601267

346012679

460126793

601267934

012679346

126793460

ומתברר שכל המספרים החדשים מתחלקים ב-333,667.

נבדוק שני מספרים

679346012:333667 = 2036

793460126:333667 = 2378

בדוק מספר נוסף.
הוכח שתכונה זו נכונה באופן כללי, כלומר, הוכח, כי אם נתון מספר בן
תשע ספרות המתחלק ב-333,667 אז אם נעביר את ספרתו הראשונה לסוף המספר,
נקבל מספרים חדשים, שגם הם מתחלקים ב-333,667.

נשאלת השאלה, כיצד "ממציאים" בעיות כמו אלו שהופיעו לעיל. זאת נראה
בדוגמא הבאה.

דוגמא:

נתון מספר בן חמש ספרות המתחלק במספר דו-ספרתי שהוא מספר ראשוני;
יוצרים ארבעה מספרים חדשים כמו בבעיה 5, וגם הם מתחלקים באותו מספר
דו ספרתי. מהו המספר הדו-ספרתי הראשוני?

פתרון:

נתון מספר בן חמש ספרות $\overline{abcde}$ המתחלק במספר דו ספרתי $\overline{xy}$ שהוא ראשוני. המספרים המתקבלים הם: $\overline{bcdea}$ $\overline{cdeab}$ $\overline{deabc}$ $\overline{eabcd}$ וגם הם מתחלקים ב-$\overline{xy}$.

אם המספר $\overline{abcde}$ מתחלק במספר $\overline{xy}$ אז גם $10\cdot\overline{abcde}$ מתחלק ב-$\overline{xy}$.

נסתכל על ההפרש:

$$10\cdot\overline{abcde} - \overline{bcdea} = 10(10000a + 1000b + 100c + 10d + e) -$$

$$- (10000b + 1000c + 100d + 10e + a) = 100000a + 10000b +$$

$$+ 1000c + 100d + 10e - 10000b - 1000c - 100d - 10e - a =$$

$$= 99999a = 9\cdot a\cdot 11111$$

עכשיו הבעיה היא כיצד לפרק לגורמים את 11111?

נסמן: $N = 11111$

נכפול ב-7 ונקבל: $7N = 77777$ ונוציא שורש ריבועי כלומר

$$\sqrt{7N} = \sqrt{77777} = 279$$

	4
47×7	377
	-329
549×9	4877
	-4941
	-64

קבלנו:

$$7N = 77777 = 279^2 - 64 = 279^2 - 8^2 = (279 + 8)(279 - 8)$$

$$= 287\cdot 271$$

ומכאן:

$$N = (287:7)\cdot 271 = 41\cdot 271$$

כלומר המספר הדו ספרתי $\overline{xy} = 41$.

בהוכחה זו מצאנו מספר נוסף המהווה פתרון לבעיה נוספת. נסח את הבעיה.

בעיה 6

נתון מספר בן ארבע ספרות המתחלק במספר בן שלוש ספרות שהוא מספר ראשוני; יוצרים מספרים חדשים כמו בבעיה 5, וגם הם מתחלקים באותו מספר בן שלוש ספרות. מהו המספר הראשוני בן שלוש הספרות.

בעיה 7

כמו בעיה 7 עבור מספר בן שבע ספרות המתחלק במספר ראשוני בן ארבע ספרות.

בעיה 8

כנ"ל עבור מספר בן שמונה ספרות.
מהו מספר המספרים הראשוניים שבהם מתחלק המספר בן שמונה הספרות?