הטעות כנקודת מוצא

מאת: ארתור גודמן ונורית זהבי
Queens College מכון ויצמן למדע
New-York רחובות

כל מורה למתמטיקה ניתקל פעמים רבות בטעויות של תלמידים ה"ממציאים" שיטות שנראות להם מתאימות לפתרון, תוך התעלמות מהכללים המחייבים.

טעויות כאלו יכולות לשמש כנקודת מוצא לחקירה מתמטית מענינת, אם לא הולכים בדרך המקובלת של נזיפה ותיקון השגיאה בלבד, אלא מקשים ושואלים באילו מקרים ה"טעות" בכל זאת נכונה. נביא כאן דוגמאות לגישה כזו לגבי שתי טעויות החוזרות ונשנות באלגברה.

דוגמא ראשונה*

בשיעור באלגברה התבקשו התלמידים לחשב את ערכו של הביטוי:

$$5 - 3[5 - 3(5 - 3)]$$

תלמידים אחדים פישטו את הביטוי באופן הבא:

$$5 - 3[5 - 3(5 - 3)] = (2)[(2)(2)] = 8$$

וקיבלו את התשובה הנכונה תוך התעלמות מסדר הפעולות, הקובע כי כפל קודם לחיסור. התלמידים, על אף שהבינו את הטעות, התקשו לעכל את העובדה שהתוצאה הנכונה התקבלה במקרה. המורה, במטרה לפזר את הספקות, "שלף מן המותן" דוגמא "נגדית":

$$7 - 4[7 - 4(7 - 4)]$$

ואולם מיד התברר כי השיטה הלא נכונה פועלת גם כאן.

עכשיו גברה ההתרגשות בכיתה והמורה ביקש מתלמידיו לבדוק דוגמאות ולהיווכח בטעות, וגם לחפש מקרים נוספים בהם השיטה פועלת.

השלב הבא היה חקירת השאלה מתי מתקיים:

$$x - y[x - y(x - y)] = (x - y)[(x - y)(x - y)] = (x - y)^3$$

---

*מעובד לפי:
"A Problem with the Order of Operations" by Arthur Goodman
Mathematics Teacher, February 1979.

שימוש חוזר בחוק הפילוג נותן:

$$x - xy + xy^2 - y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

ועל-ידי העברה לאגף אחד

$$x^3 - 3x^2y + 2xy^2 + xy - x = 0$$

נוכל כמובן להניח כי $x \neq 0$ (אחרת אין עניין בבעיה) ולצמצם ב-x .

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + y - 1 = 0$$

תהליך פתרונות כלליים למשוואה זו מאפשר שימוש "מתוחכם" בטכניקות של פירוק לגורמים.

$$(x^2 - 2xy + y^2) - xy + y^2 + y - 1 = 0$$

$$(x - y)^2 - y(x - y - 1) - 1 = 0$$

$$(x - y)^2 - 1 - y(x - y - 1) = 0$$

שימוש בנוסחה להפרש ריבועים נותן:

$$(x - y + 1)(x - y - 1) - y(x - y - 1) = 0$$

$$(x - y - 1)(x - 2y + 1) = 0$$

מכאן שקיימים שני פתרונות כלליים למשוואה:

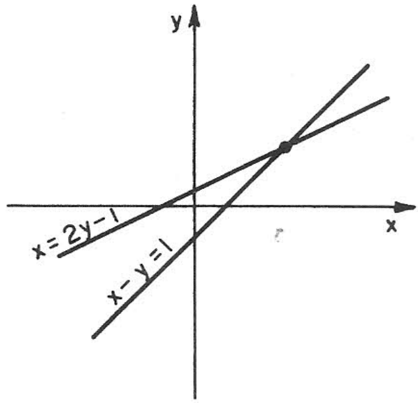
פתרון אחד $x - y = 1$

זהו פתרון ברור למדי של הבעיה שהצגנו.

פתרון שני $x = 2y - 1$

שתי הדוגמאות אשר מהן צמחה הבעיה הן כמובן מקרים פרטיים של פתרון זה.

אפשר להמחיש באופן גרפי את שתי המשפחות של הפתרונות:



נקודת החיתוך של שני הישרים מתארת את הזוג $x = 3$ $y = 2$, שהוא אכן משותף לשני הפתרונות הכלליים.

ראינו איפוא כיצד טעות נפוצה בסדר הפעולות, אשר "במקרה" נתנה תשובה נכונה, שימשה כנקודת מוצא לפעילות לא שיגרתית בכיתה. התלמידים והמורה התנסו בחוויה של חקירה משותפת ומצאו שימושים נאים לטכניקות הנלמדות, במיוחד בנושא של פירוק לגורמים.

קיימות כמובן דרכים נוספות למציאת הפתרונות הכלליים של המשוואה:

$$x^2 - xy^2 + y - 1 = 0$$

נביא כאן שתי הצעות נוספות:

I. $$x^2 - 3xy + 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(x - 2y)(x - y) + y - 1 = 0$$

נסמן: $$x - 2y = a$$

$$x - y = b$$

ומכאן: $$b - a = y$$

ולכן: $$ab + b - a - 1 = 0$$

$$b(a + 1) - (a + 1) = 0$$

$$(a + 1)(b - 1) = 0$$

כלומר: $$(x - 2y + 1)(x - y - 1) = 0$$

II

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2) - \frac{9}{4}y^2 + 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$x^2 - 3xy + \frac{9}{4}y^2 = \frac{y^2}{4} - y + 1$$

$$(x - \frac{3}{2}y)^2 = (\frac{y}{2} - 1)^2$$

מכאן :

$$x - \frac{3}{2}y = \frac{y}{2} - 1$$

או

$$x - \frac{3}{2}y = 1 - \frac{y}{2}$$

$$x - 2y + 1 = 0$$

$$x - y - 1 = 0$$

דוגמא שניה *

בחוברת *מתמטיקה ומבחן ב'* (חוברה על-ידי רחל בוהדנה, המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע) מופיעה בין שאלות העשרה, הבעיה הבאה:

נתונות שתי תבניות $x^2 - y^2$; $(x - y)^2$

מצא זוגות מספרים אשר אם נציב אותם בשתי התבניות נקבל תוצאות שוות.

בעיה זו ניתנה כמשימה לתלמידים בכיתה ט' במחקר שנועד לבדוק ולפתח פעילות מתמטית של תלמידים במסגרת תכנית הלימודים.

א) **הטעות הנפוצה** $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ (בערך 5%)

"שתי התבניות תמיד שוות לכן כל זוג שנציב יתן תוצאות שוות". המספר הקטן יחסית של התלמידים אשר ביצעו את הטעות הנפוצה נובע כפי הנראה מהצורה שבה הוצגה המשימה. ראויה לציון תשובתו של אחד התלמידים אשר פתר נכון את הבעיה והוסיף את ההערה הבאה: "רציתם להפיל אותנו בפח הטעות $(x - y)^2 = x^2 - y^2$!".

אך לא זאת היתה כוונתנו. רצינו להיפך, להסב את תשומת לב התלמידים לעובדה שקיימים בכל זאת מקרים שבהם $(x - y)^2$ כן שווה ל $x^2 - y^2$.

ב) **טעויות פשטניות** (בערך 5%)

"אי אפשר למצוא כי התבניות שונות".
"אין תשובות כי סדר הפעולות שונה בשתי התבניות".
"אי אפשר, למשל $x = 7$ $y = 2$ **נותן**..."

על מנת להדריך תלמידים שנתנו תשובות מסוג זה הוצע להם להציב $x = 3$ ולחפש ערכים מתאימים עבור y.

---

*מעובד לפי:

"$(x - y)^2$ *is* equal to $x^2 - y^2$ " by N. Zehavi and M. Bruckheimer Mathematics in School, January 1984.

ג) גישה אינדוקטיבית (בערך 65%)

"(0 ,0) , (1 ,1) , (2 ,2) , ... "

"(0 ,0) , (5 ,0) , (10 ,0), .. $x\ ,\ y = 0$ כלשהו".

"$x = y$ או $x = 0$ או $y = 0$".

התשובה האחרונה, שהיא שגויה כמובן, התקבלה על-ידי אינדוקציה מדוגמאות מספריות אחדות. ההדרכה לתלמידים שעשו זאת נעשתה בעזרת השאלה: האם התבניות $(x - y)^2$ ו $x^2 - y^2$ הן שתיהן סימטריות לגבי x ו y ?

התקבלו גם תשובות נכונות: "$x = y$ או $y = 0$", בדרך אינדוקטיבית. ההדרכה שניתנה כיוונה להצדקה דדוקטיבית של התשובה.

ד) גישה דדוקטיבית (בערך 25%)

דוגמא לתשובה לא מלאה בתהליך דדוקטיבי

$$x = y$$

$$x^2 = y^2 \qquad\qquad x - y = 0$$

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad\qquad (x - y)^2 = 0$$

על אף שנראה כל כך טבעי לרשום את המשוואה $(x - y)^2 = x^2 - y^2$ ולחפש לה פתרונות, מעט מאוד תלמידים ניגשו בדרך זו אל הבעיה.

"$(x - y)^2 = x^2 - y^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = x^2 - y^2$

$-2xy = -2y^2$

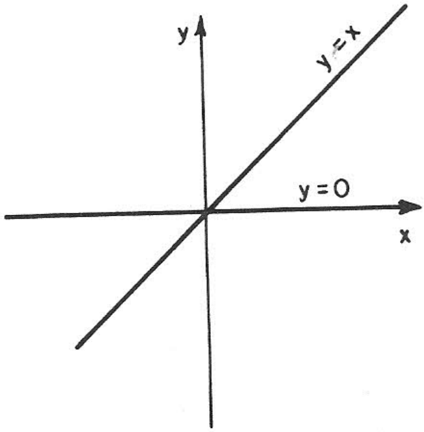
$-2xy = -2y^2$

$xy = y^2$ צמצום ב-y!

$x = y$ "

תלמידים מעטים בלבד, לא נפלו בפח של איבוד פתרון בשל צמצום וקיבלו כפתרון למשוואה גם את התנאי $y = 0$. מעניין לציין כי ארבעה תלמידים (מכיתות שונות) אשר פתרו את המשוואה ואיבדו פתרון בשל צמצום, הגיעו

לתשובה המלאה בדרך אינדוקטיבית. הם היו מוטרדים מהדילמה, "כיצד יתכן שההוכחה לא נתנה את התשובה *המלאה*?" מאחר ולא הצליחו להסביר את הסתירה, ניסו ל"הצדיק" את תשובתם באופן גרפי.



<u>לסיכום:</u>

בשתי הדוגמאות שתוארו, ההתייחסות לאלגברה היא לא רק כנושא שבו עוסקים בחישובים וטכניקות, כי אם כנושא מעורר לחקירה.
תשובת התלמיד מזמינה לפי אופיה את ההדרכה המתאימה, שתפקידה לעודד את התלמיד להמשיך ולהתקדם.

שבבים, עלון למורי מתמטיקה - תיק מס' 24.