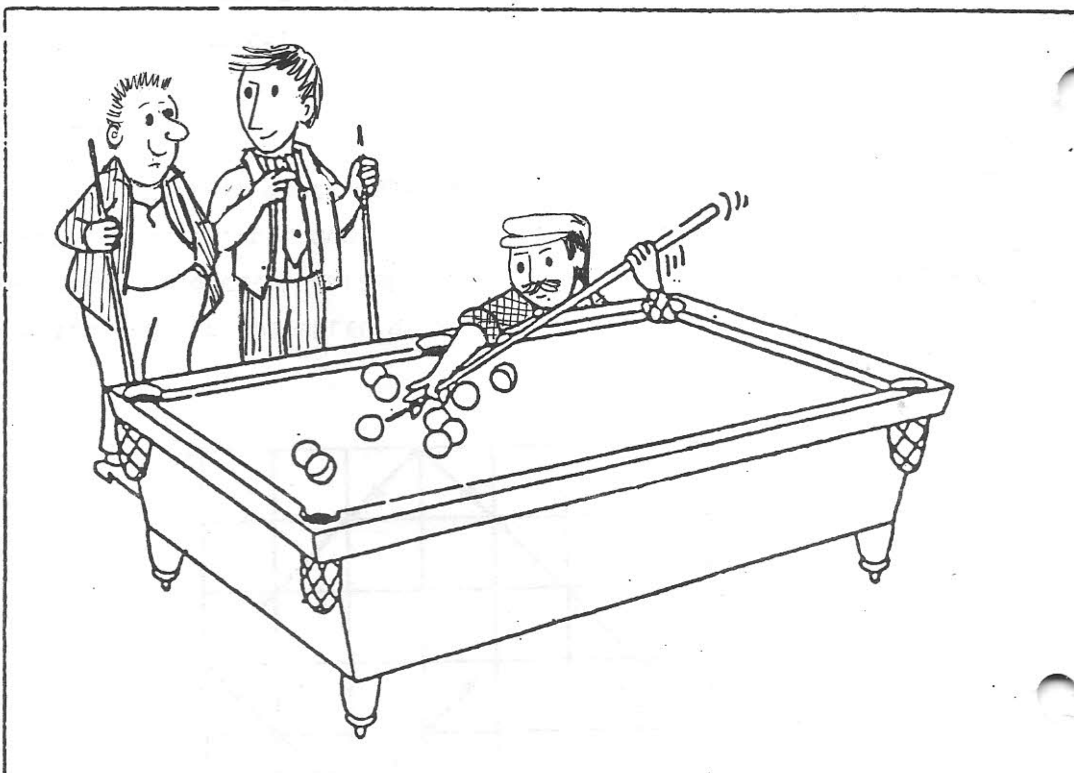
מתמטיקה על שולחן ביליארד

מאת: דוד בן חיים
אוניברסיטת חיפה
בית הספר לחינוך,
אורנים

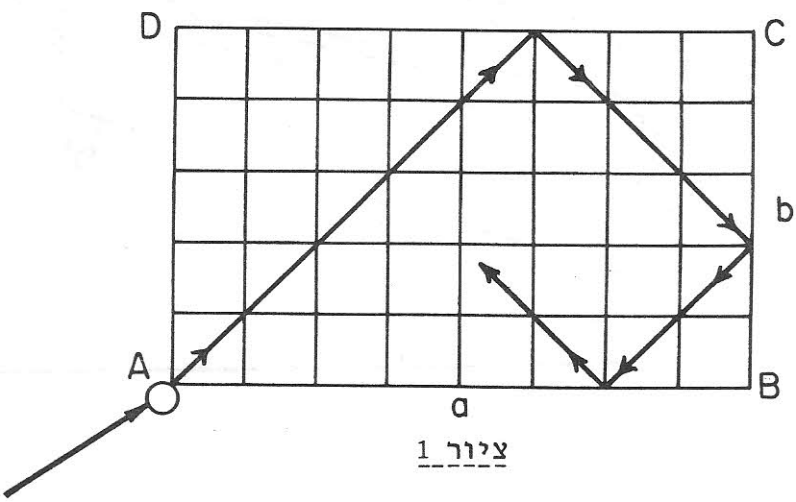
פריץ הרצוג
Michigan State University
MICHIGAN



אחת הפעילויות החשובות ביותר במהלך הוראת המתמטיקה בכל הרמות ובכל הגילים היא הצגת בעיות פתוחות לחקירה ופתרון. פעילות מסוג זה נעשית מעניינת יותר והמוטיבציה מצד התלמידים גדלה כאשר הבעיה מוצגת באמצעות מודל קונקרטי המוכר לתלמידים מנסיונם היומיומי ובפרט אם יש בו גם אלמנט של משחק. פתרון בעיות הוא תהליך הכולל את האמצעים, שבהם משתמש התלמיד בידע, במיומנויות ובהבנה שברשותו כדי לספק את הדרישות של מצב לא מוכר המוצג על-ידי הבעיה. על התלמיד לעשות סינתזה של מה שלמד וליישם אותה למצב החדש. כמובן, שעל הבעיה לכלול בפתרונה עיסוק במושגים ומיומנויות מתמטיים, בנוסף לאפשרות של הכללה או הרחבה נוספת הניתנים להוכחה בדרך מתמטית. להלן, נציג בעיה פתוחה, שהוצגה הן בכיתות שונות בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה והן בהשתלמויות מורים למתמטיקה ועוררה פעילות מתמטית רבת ענין.

<u>הצגת הבעיה</u>

נתון שולחן ביליארד מלבני ABCD בעל מידות של $a\times b$ יחידות, a ו-b מספרים טבעיים. חובטים בכדור מהפינה A בזוית 45° ונניח שאין חיכוך, כך שכל פעם שהכדור חובט בדופן השולחן מוחזר בזוית 45° (ראה ציור 1). בכל פינה של השולחן יש כיס ואם הכדור מגיע לאחת הפינות מסיים את מסלולו.



<u>ציור 1</u>

בהינתן המימדים של שולחן ביליארד מן הסוג המתואר כאן:

(i) האם ניתן לנבא באיזו פינה הכדור יסיים את מסלולו?

(ii) האם ניתן לנבא את מספר החבטות שהכדור סופג? (נספור את החבטה הראשונה של המקל בכדור, את החבטות בדפנות השולחן ואת החבטה האחרונה כאשר הכדור מסיים באחת הפינות).

(iii) האם ניתן לנבא את מספר המשבצות שהכדור חוצה במסלולו (או לחילופין את אורך מסלולו של הכדור מן ההתחלה ועד לסיום)?

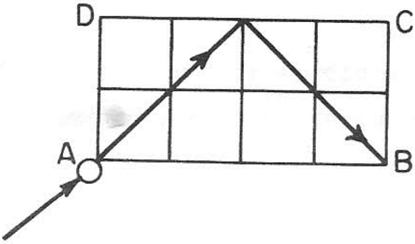
* כאן אנו מציעים לקוראים לנסות לפתור את הבעיה ולגלות חוקיות לגבי כל אחת מהשאלות ובמידת האפשר גם להוכיח באופן כללי.

הפעילות בכיתה

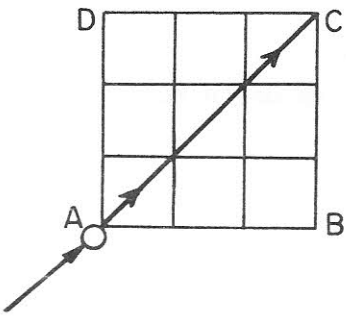
כאשר בעיה זו מוצגת בפני התלמידים יש להדגיש את ההסכמה מראש על צורת השולחן, ציון המימדים כך ש-a מסמן את המימד האופקי ו-b את המימד האנכי, סימון הפינות באותו סדר, הפינה ממנה נשלח הכדור (תמיד מהפינה השמאלית התחתונה - A), חבטה בכדור בזוית 45° וההנחה שאין חיכוך. כמו כן יש לתת מספר דוגמאות של שולחנות שונים ותשובות ספציפיות לשאלות שהועלו.

דוגמאות:

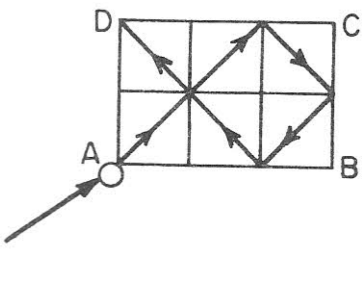
א) מימדי השולחן 4×2 יחידות.
הכדור מסיים את מסלולו בפינה B.
מספר החבטות שהכדור סופוג - 3.
מספר המשבצות שהכדור חוצה - 4.
(אורך מסלולו של הכדור $4\sqrt{2}$ יחידות).



ב) מימדי השולחן 3×3 יחידות.
הכדור מסיים את מסלולו בפינה C.
מספר החבטות שהכדור סופג - 2.
מספר המשבצות שהכדור חוצה - 3.
(אורך מסלולו של הכדור $3\sqrt{2}$ יחידות).



ג) מימדי השולחן 3×2 יחידות.
הכדור מסיים את מסלולו בפינה D.
מספר החבטות שהכדור סופג - 5.
מספר המשבצות שהכדור חוצה - 6.
(אורך מסלולו של הכדור $6\sqrt{2}$ יחידות).



עתה נבקש מהתלמידים מימדי שולחן ביליארד כלשהו, כגון 20×12 יחידות ומיד ללא שרטוט מסלול הכדור נציין שהכדור מסיים את מסלולו בפינה C, מספר החבטות שהכדור סופג 8 ומספר המשבצות שהכדור חוצה 60 ובכך אנו רומזים שקיימים כללים לקבוע זאת ונבקש את התלמידים למצוא את החוקיות.

בכיתות חטיבות הביניים וברמות הנמוכות רצוי לספק לתלמידים דפי עבודה המכילים שולחנות שונים ואפשרות נאותה לאיסוף נתונים כדי לחקור בשלב ראשון את השאלות בנוגע לפינת הסיום ומספר החבטות שהכדור סופג. דוגמא לאחד הדפים ניתנת בציור 2. יש להציע לתלמידים לחקור גם שולחנות נוספים בהתאם להשערות והכללים שהם מנבאים.

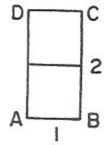
לאחר שלב איסוף הנתונים באופן אינדיבידואלי מוצע לעבור לריכוז נתונים כיתתי באמצעות הטבלה המוצעת בציור 3, כאשר בכל משבצת יש למלא מימדי שולחנות בהתאם למספר החבטות שהכדור סופג והפינה בה מסיים את מסלולו. תוך כדי מילוי הטבלה יתברר, שכאשר הכדור מסיים את מסלולו ב-C מספר החבטות זוגי ואילו עבור הפינות B ו-D מספר החבטות אי־זוגי. לא נמצא שולחן שבו הכדור מסיים את מסלולו בפינה A. בכל השולחנות הריבועיים הכדור מסיים את מסלולו בפינה C ומספר החבטות 2, לכן במשבצת (C , 2) בטבלת ריכוז הנתונים ניתן לרשום את ההכללה של המימדים על ידי $a\times a$ יחידות. במשבצות אחרות לאחר רישום של מספר שולחנות יתגלה שיש קשר ביניהם, כאשר אחד השולחנות "בסיסי" ואחרים כפולות של מימדיו. לדוגמא, עבור המשבצת (B , 3) בטבלת ריכוז הנתונים, השולחן הבסיסי בעל מימדים של 2×1 ובאופן כללי כל שולחן בעל מימדים של $2a\times a$ ואילו במשבצת (B , 5) יש שני שולחנות בסיסיים 2×3 ו-4×1, ובאופן כללי $2a\times3a$ ו-$4a\times a$. כמו כן, ניתן לגלות שאם מופיע שולחן בעל מימדים של $a\times b$ במשבצת (B , n) כאשר n מספר החבטות, אז במשבצת (D , n) יופיע השולחן בעל מימדים של $b\times a$.

מריכוז הנתונים בטבלה ניתן לגלות, שמספר החבטות שהכדור סופג, שווה לסכום מימדי השולחן הבסיסי, כלומר דרוש למצוא תחילה את היחס המצומצם ביותר של המימדים או להביאם לשני מספרים ראשוניים יחסית. פינת הסיום של מסלול הכדור נקבעת על פי הזוגיות והאי זוגיות של מימדי השולחן הבסיסי וקיימות רק 3 אפשרויות:

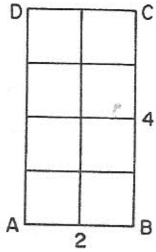
מימד אנכי × מימד אופקי	פינת סיום
אי־זוגי × אי־זוגי	C
אי־זוגי × זוגי	B
זוגי × אי־זוגי	D

האפשרות הנוספת של זוגי×זוגי, שאינה קיימת לגבי שולחן בסיסי מרמזת על כך שהכדור לא יכול לסיים את מסלולו בפינה A ממנה יצא. על ידי שימוש במספר שכבות של שקפים ניתן להמחיש שפינת הסיום ומספר החבטות שהכדור סופג במסלולו על שולחן הביליארד אינם משתנים כאשר מגדילים או מקטינים את מימדי השולחן באותו יחס.

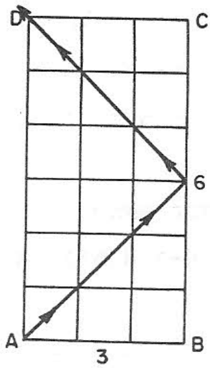
1.



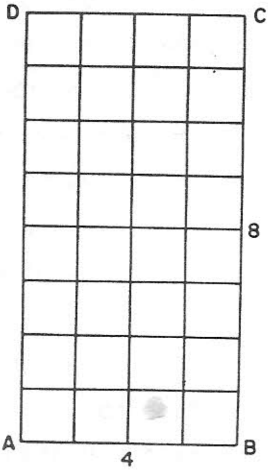
2.



3.

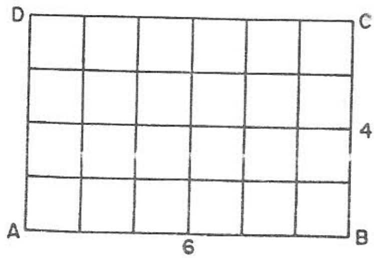


4.

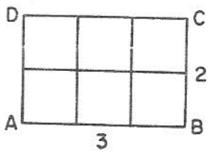


	1.	2.	3.	4.
פינת הסיום	____	____	D	____
מספר החבטות	____	____	3	____

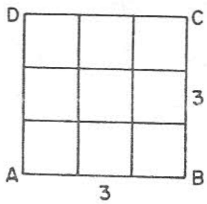
5.



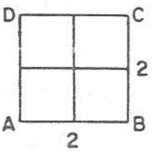
6.



7.

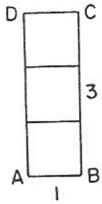


8.

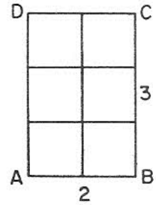


	5.	6.	7.	8.
פינת הסיום	____	____	____	____
מספר החבטות	____	____	____	____

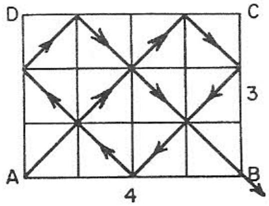
.9



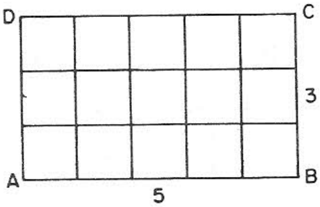
.10



.11



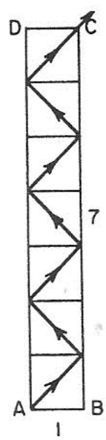
.12



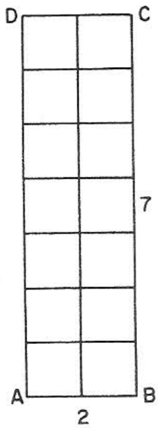
פינת הסיום ____ ____ B ____

מספר החבטות ____ ____ 7 ____

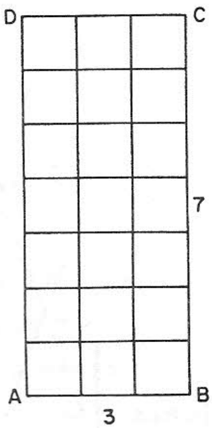
.13



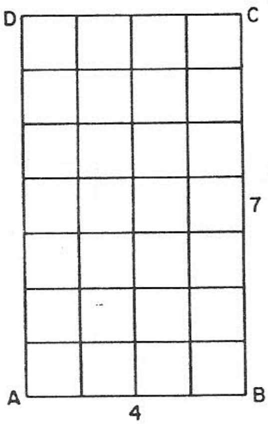
.14



.15



.16



פינת הסיום C ____ ____ ____

מספר החבטות 8 ____ ____ ____

ציור 2

מספר החבטות שהכדור סופג

פינת הסיום של הכדור	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A									
B	X	4 x 2 8 x 4 2 x 1 2a x a	X	2 x 3 4 x 1	X	4 x 3 2 x 5 6 x 1	X		
C	2 x 2 3 x 3 1 x 1 a x a	X	1 x 3 3 x 1	X	1 x 5 5 x 1	X		X	
D	X	1 x 2 a x 2a	X	3 x 2 1 x 4	X	1 x 6 5 x 2 3 x 4	X		

ציור 3 - טבלת ארגון נתונים

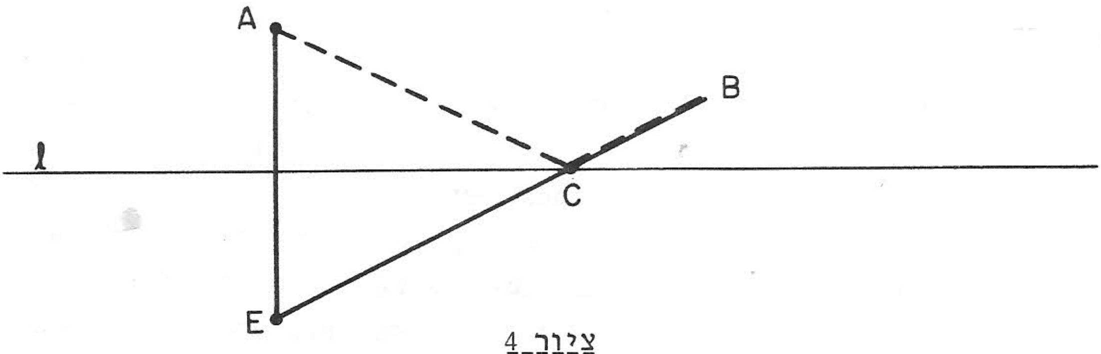
בדיון על מספר החבטות ושולחנות בסיסיים ניתנת האפשרות להשתמש או להסביר את מושג המחלק המשותף הגדול ביותר (ממג"ב) ואת סימונו $(a\ ,\ b)$. ניתן לבטא את מימדי השולחן הבסיסי על ידי $\frac{a}{(a,b)} \times \frac{b}{(a,b)}$ ואילו את מספר החבטות נקבע על פי $\frac{a\ +\ b}{(a,b)}$. דיון נוסף שניתן לערוך קשור לקביעת מספר השולחנות הבסיסיים השונים בהינתן מספר החבטות, כגון עבור $n = 15$ יש 8 כאלו: $(14\ ,\ 1)$, $(13\ ,\ 2)$, $(11\ ,\ 4)$, $(8\ ,\ 7)$, $(7\ ,\ 8)$, $(4\ ,\ 11)$, $(2\ ,\ 13)$, $(1\ ,\ 14)$ ואם n ראשוני יש $n - 1$ שולחנות בסיסיים. כמובן, שסך הכל מספר השולחנות האפשריים עבור כל מספר חבטות הוא אינסופי כי לכל שולחן בסיסי יש אינסוף כפולות של מימדיו.

בהמשך החקירה לגבי השאלה על מספר המשבצות שהכדור חוצה במסלולו, ניתן לנצל את הנתונים שנאספו והמסלולים ששורטטו. תחילה מוצע להסתכל בשולחנות בסיסיים ולאחר מכן באחרים. במהרה יתגלה שלגבי שולחנות בסיסיים, מספר המשבצות שנחצות על ידי הכדור שווה למכפלת המימדים ואילו באחרים צריך לחלק את המכפלה של המימדים בממג"ב $\frac{a\ \times\ b}{(a,b)}$. את התוצאה הזו אפשר להציג גם על ידי הכפולה המשותפת הקטנה ביותר (כמק"ב), ובהזדמנות זו להתיחס לסימונה $[a\ ,\ b]$ ולקשר $[a\ ,\ b] = \frac{a\ \times\ b}{(a,b)}$. עיסוק באורך מסלולו של הכדור יוביל גם לחישובים בעזרת משפט פיתגורס.

כמו בכל פעילות, חשוב לשאול שאלות נוספות כדי לבחון ולהעמיק את ההבנה. לדוגמא: אם המימד האופקי של שולחן ביליארד הוא 14 יחידות, מה צריך להיות המימד האנכי כדי <u>שלפחות</u> יהיו 50 חבטות בכדור? לאחר מכן לדרוש <u>בדיוק</u> 50 חבטות או <u>לכל היותר</u> 50 חבטות. שאלה דומה בנוגע ל-20 משבצות לפחות נחצות על ידי הכדור. שאלות כאלו בודקות את ההבנה והיישום של החוקיות שהתגלתה בכיוון הלוך וחזור, הבנה ויישום שדרושים בכל תהליך מתמטי. שאלה נוספת מענינת היא בהינתן שהכדור חוצה 100 משבצות עד לסיום מסלולו על שולחן הביליארד, מה אפשר לומר על מימדי שולחן כזה? חשוב במקרה זה להשוות את התשובה לשאלה זו שהיא סופית (25 שולחנות אפשריים) לעומת התשובה במקרה של מספר חבטות נתון שהיא אינסופית.
הכללים והחוקיות שנמצאו עד כה נקבעו בהסתמך על המקרים הפרטיים וללא הוכחה מתמטית. כמובן, שבמידת האפשר יש לשאוף לשלמות על ידי הוכחה מתמטית מלאה. להלן נביא הוכחה מתמטית המאמתת את התוצאות הנ"ל, מכלילה אותם ופותחת פתח להרחבה ולשאילת שאלות נוספות.

הוכחה

הרעיון להוכחה נבע מהתשובה לשאלה הבאה שמופיעה בתכנים שונים: נתונות 2 נקודות A ו-B בצד האחד של ישר ℓ; מצא על הישר נקודה C כך שסכום המרחקים AC ו-BC הוא מינימלי (ראה ציור 4).



ציור 4

כדי למצוא את נקודה C מורידים אנך מ-A לישר ℓ וממשיכים אותו כאורכו עד נקודה E. מחברים את B עם E והיכן שהישר BE חותך את ℓ, מקבלים את נקודה C המבוקשת כי $AC = EC$ והקטע BE הוא הקצר ביותר בין B ל-E ולכן גם סכום הקטעים AC ו-BC הוא מינימלי.

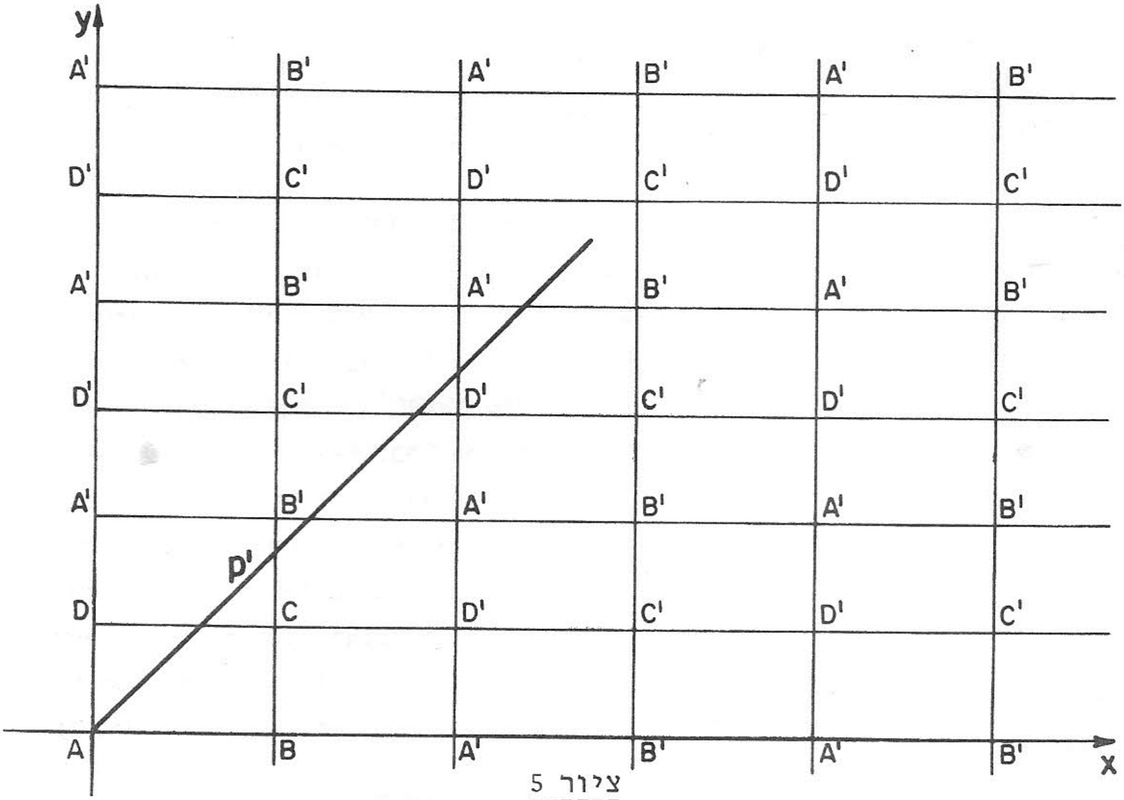
נתיחס עתה לציור 5 המורכב מכל המלבנים ברביע הראשון של מישור ה-xy שקודקודיהם בנקודות הסריג (Ka , nb) כאשר k ו-n הם שלמים אישליליים. נסמן את קבוצת נקודות הסריג (Ka , nb) הפנימיות ברביע הראשון ($n > 0$, $K > 0$) ב-L. נוכל לתאר לעצמנו שהמבנה בציור 5 התקבל מהמלבן המקורי עם הקודקודים $A = (0 , 0)$, $B = (a , 0)$, $C = (a , b)$, $D = (0 , b)$ ע"י שיקופים בישרים $x = Ka$ ו- $y = nb$; מכאן יוצא שהתמונות של המקורות A, B, C, D שנסמנן ב- A', B', C', D' בהתאמה הן הנקודות הבאות:

$A' = (Ka , nb)$ כאשר K ו-n זוגיים;

$B' = (Ka , nb)$ כאשר K אי־זוגי ו-n זוגי;

$C' = (Ka , nb)$ כאשר K ו-n אי־זוגיים;

$D' = (Ka , nb)$ כאשר K זוגי ו-n אי־זוגי.



ציור 5

התוצאות הנ"ל נובעות מהעובדה ששיקוף של נקודה (Ka , nb) בישר אנכי של ציור 5 משנה את ערכו של K על ידי שלם זוגי ואילו שיקוף בישר אופקי משנה את n על ידי שלם זוגי. למסלול p של הכדור בציור 1 שאינו ישר בדרך כלל מתאים מסלול 'p בציור 5 המושג כדלהלן: בכל פעם שהכדור פוגע בדופן של המלבן המקורי, במקום לשרטט את ההחזרה נמשיך אותו באותו כיוון ולכן ייכנס כמובן למלבן נוסף בציור 5. באופן כזה, המסלול 'p נעשה מסלול קוי ליניארי ולמעשה זהו הישר $y = x$ היוצא מהראשית כלפי מעלה ולימין.

נתיחס עתה לשאלות שהוצגו בהצגת הבעיה בהתחלה. השאלה (i) בנוגע לכך שמסלול הכדור יגיע לפינה של השולחן אקוילנטית עתה לבעיה שהמסלול 'p של ציור 5 יעבור דרך אחת מנקודות L. לנקודה כזו צריך להתקיים $Ka = nb$ או

$$\frac{n}{K} = \frac{a}{b} \qquad (1)$$

יהי $\frac{\alpha}{\beta}$ השבר המצומצם ביותר של $\frac{a}{b}$ כלומר $\alpha = \frac{a}{d}$, $\beta = \frac{b}{d}$ כאשר $d = (a , b)$ המחלק המשותף הגדול ביותר של a ו-b. הערכים החיוביים הקטנים ביותר של K ו-n המקיימים את (1) הם $K = \beta$ ו- $n = \alpha$. לכן הנקודה הראשונה של L המונחת על המסלול 'p היא $(\beta a , \alpha b)$. מכאן ניתן להסיק שהמסלול p

בפינה B אם α זוגי ו-β איזוגי;

בפינה C אם α ו-β איזוגיים;

בפינה D אם α איזוגי ו-β זוגי.

שים לב שהמסלול p לא יכול להסתיים בפינה A.
אשר לשאלה (ii) בנוגע למספר החבטות שהכדור סופג, נתעלם תחילה מהחבטה הראשונה של המקל בכדור והאחרונה של כניסת הכדור לאחד הכיסים בפינות. מספר הפעמים שהכדור פוגע בדפנות AB או CD שווה למספר הישרים האופקיים בציור 5 בין $(0 , 0)$ ו- $(\beta a , \alpha b)$; אלו הם הישרים $y = \lambda b$ כאשר $\lambda = 1,2,... ,\alpha - 1$. לכן, הכדור פוגע בדפנות AB ו-CD בדיוק $\alpha - 1$ פעמים. באופן דומה, הכדור פוגע בדפנות BC או AD בדיוק $\beta - 1$ פעמים. כאשר נוסיף את החבטה הראשונה והאחרונה נקבל שמספר החבטות שהכדור סופג במסלולו הוא בדיוק $\beta + \alpha$ פעמים.
שאלה (iii) התיחסה למספר המשבצות שהכדור חוצה ולאורך מסלולו. האורך של המסלול p מההתחלה ועד לסיום שווה לאורך של המסלול 'p מהנקודה $(0 , 0)$ עד ל-$(\beta a , \alpha b)$ ואילו מספר המשבצות שהכדור חוצה שווה ל-βa או ל-αb.

לפי תנאי הבעיה מתקיים:

$$\beta a = \alpha b = \frac{ab}{d} = [a , b]$$

כאשר $[a , b]$ מסמן את הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של a ו-b. כמו כן נובע מכאן שאורך המסלול p שווה ל- $\sqrt{2} \times [a , b]$.

הכללה והרחבה

עתה נתיחס למקרה הכללי יותר בו הכדור מתחיל את מסלולו בכיוון הישר $y = mx$ כאשר m הוא מספר ממשי חיובי כלשהו. כדי שהמסלול p יגיע לפינה, כלומר במילים אחרות, כדי שהמסלול 'p יעבור דרך נקודה של L דרושים K ו-n שלמים חיוביים כך שהנקודה (Ka , nb) מונחת על הישר $y = mx$ כלומר $nb = mKa$ ומכאן m חייב להיות רציונלי.
נניח ש- $m = p/_q$ כאשר p ו-q שלמים חיוביים ומבלי להפסיד הכלליות נניח גם שהם ראשוניים יחסית. לכן נקבל

$$nb = (^p/q)Ka$$

$$\frac{n}{K} = \frac{Pa}{qb}$$

בהתאם לכך, במקרה זה נגדיר את $\frac{\alpha}{\beta}$ כשבר המצומצם ביותר של $\frac{pa}{qb}$ כך שהנקודה $(\beta a\ ,\alpha b)$ תהיה הראשונה ב-L שמונחת על המסלול 'P. לכן התשובה לשאלה (i) תהיה זהה כבמקרה של הישר $y = x$ כמובן בהתיחס להגדרה החדשה של $\frac{\alpha}{\beta}$. גם התשובה לשאלה (ii) תהיה שוב $\alpha + \beta$. התשובה לשאלה (iii) בנוגע לאורך המסלול ששווה למרחק בין $(0,\ 0)$ ו-$(\beta a\ ,\alpha b)$ היא $(\beta^2 a^2 + \alpha^2 b^2)^{\frac{1}{2}}$. אם נסמן את $(pa\ ,qb) = d$ כך ש- $\alpha = \frac{pa}{d}$, $\beta = \frac{qb}{d}$ נקבל

$$\sqrt{(\beta a)^2 + (\alpha b)^2} = \frac{ab}{d}\sqrt{p^2 + q^2}$$

שאלה מענינת שנובעת מהתוצאה ש-m חייב להיות רציונלי כדי שהכדור יסיים באחת הפינות כאשר מסלולו מתחיל בכיוון $y = mx$ היא האם קיימות עוד זויות שלמות במעלות בין 0 ל-90 בנוסף לזוית $45°$ כך ש-m הוא רציונלי.

במילים אחרות, האם קיימות עוד זויות במעלות שלמות ϕ כך ש- $tg\ \phi$ הוא רציונלי. אנו נראה שאין אפילו זוית במספר מעלות רציונלי נוספת ל-$45°$ שעבורה $tg\ \phi$ הוא רציונלי. נשתמש במושג "זוית רציונלית" לציין זוית של מספר רציונלי של מעלות או אם הזוית ברדיאנים שתהיה ϕ שעבורה $\frac{\phi}{\pi}$ הוא מספר רציונלי.

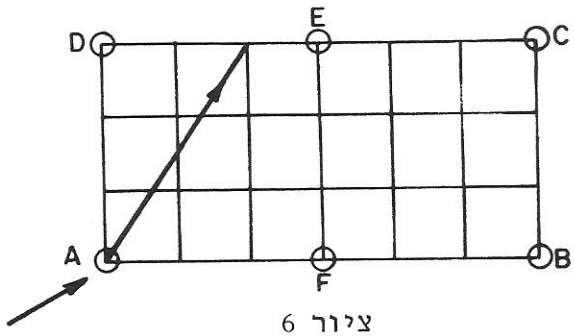
הנוסחה $\cos 2\phi = \frac{1 - tg^2\phi}{1 + tg^2\phi}$ מוכיחה שהרציונליות של $tg\ \phi$ גוררת את הרציונליות של $\cos 2\phi$, (אבל לא בכיוון הפוך). אנו נראה להלן שהזויות הרציונליות היחידות בין $0°$ ל-$180°$ שעבורן הקוסינוס הוא רציונלי הן $60°$, $90°$ ו-$120°$. מזה ומהנוסחה הנ"ל עבור $\cos 2\phi$ נובע שהזויות הרציונליות היחידות בין $0°$ ל-$90°$ שקיימת אפשרות עבורן שהטנגנס שלהן יהיה רציונלי הן $30°$, $45°$ ו-$60°$. אבל משלושת זוויות אלו רק $45°$ יש לה טנגנס רציונלי.

כדי להשלים את ההוכחה, נניח שקיימת זוית רציונלית ϕ (ברדיאנים), $0 < \phi < \pi$ כך ש- $\cos\phi$ הוא מספר רציונלי ρ ומכאן $\omega = e^{i\phi}$ וקיים הקשר

$\rho = \cos\phi = \frac{(\omega + \omega^{-1})}{2}$ ומכאן $\omega^2 - 2\rho\omega + 1 = 0$. לכן, ω הוא שורש של משוואה ריבועית עם מקדמים רציונליים ושורשי היחידה היחידים שהם אירציונליים ממעלה שניה הם שורשי היחידה השלישי, הרביעי והשישי. שורשים אלו מתיחסים לזויות $\phi = 2\pi/_3$, $\theta = \pi/_2$, $\theta = \pi/_3$ בהתאמה או לזויות במעלות, $120°$, $90°$ ו-$60°$.

כמובן שניתן לבחור אינסוף כיוונים שעבורם השיפוע m רציונלי על ידי כך שחובטים את הכדור בכיוון היתר של משולש ישר זוית שניצביו רציונליים, או היחס ביניהם רציונלי, אבל אז הזוית בין ישר המסלול של הכדור וציר x אינה רציונלית פרט למקרה שהניצבים שווים. מצד שני אם מתחילים לחבוט בכדור בזוית רציונלית מדודה כלשהי פרט ל-45° ואין חיכוך, הכדור ימשיך במסלולו עד אינסוף ולא יפגע בפינת השולחן.

אנו משאירים לקוראים לחקור את מסלול הכדור על שולחן ביליארד מלבני ובו 2 כיסים נוספים באמצע המימד האופקי, כפי שמתואר בציור 6. כמובן שיש לחקור בשיגור כדור בזוית אחרת מאשר 45°.



ציור 6